ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ ЮНОГО МАТЕМАТИКА



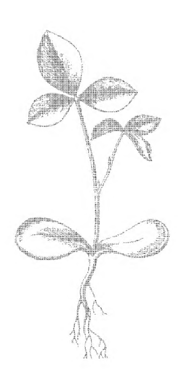
ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ
ЮНОГО МАТЕМАТИКА



|x|+|y|+|z|=
z
y
x
А
Б
В
Г
Д
Е
∫f(x) dx
f(xк)

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ ЮНОГО МАТЕМАТИКА





МОСКВА
«ПЕДАГОГИКА»
1989



Составитель
САВИН А. П.

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ ЮНОГО МАТЕМАТИКА

ДЛЯ
СРЕДНЕГО И СТАРШЕГО
ШКОЛЬНОГО
ВОЗРАСТА

2-е издание, исправленное
и дополненное

ББК 22.1 я2
Э68

Энциклопедический словарь юного математика/Сост.
Э-68 А. П. Савин.– М.: Педагогика, 1989.– 352 с.: ил.

ISBN 5-7155-0218-7

Словарь поможет читателю получить сведения об истории развития математической науки, основных направлениях ее приложений на практике, познакомит с основными математическими понятиями.

Одна из задач книги – заинтересовать школьников этой древней и важнейшей ныне наукой, помочь в формировании логического мышления, в усвоении учебной программы. В словаре рассказывается о выдающихся ученых-математиках, приведены занимательные математические задачи.

Для школьников среднего и старшего возраста.

Э $\frac{4306000000\,(4802060000)-059}{005\,(01)-89}$ КБ–48–74–1989 ББК 22.1я2

ISBN 5-7155-0218-7

К ЧИТАТЕЛЯМ

В наши дни каждый школьник получает первичные знания по математике. Еще до школы ребята учатся считать, а затем на уроках получают представление о неограниченности числового ряда, об элементах геометрии, о дробных и иррациональных числах, изучают начала алгебры и математического анализа. Эти знания абсолютно необходимы каждому молодому человеку, независимо от того, кем он станет в будущем: рабочим, инженером, механизатором, врачом, офицером или ученым.

Зачатки счета теряются в глубине веков и относятся к тому периоду истории человечества, когда еще не было письменности. Писать человек научился тогда, когда он довольно далеко продвинулся в умении считать. Математические знания в далеком прошлом применялись для решения повседневных задач, и именно практика в значительной степени руководила всем дальнейшим развитием математики. И в наше время, как и в далеком прошлом, практика выдвигает перед математикой сложные задачи. Именно в этом причина современного бурного развития математики, появления многих новых ее ветвей, позволяющих глубже и детальнее изучать явления окружающего нас мира и решать конкретные практические задачи, которые неизбежно возникают в связи с прогрессом инженерного дела и науки. Чтобы решить их, необходимо не только безукоризненно владеть теми знаниями, которые человечество приобрело в прошлом, но и находить, открывать новые средства математического исследования.

Не сомневаюсь, что многим читателям этой книги самим придется принять участие в решении проблем научно-технического прогресса: конструировать новые самолеты, космические ракеты, создавать системы связи, исследовать законы природы и использовать их для нужд практики. Чем больше и глубже нашим читателям удастся усвоить дух математики и научиться использовать ее методы хотя бы в простейших ситуациях, тем дальше и быстрее они сумеют продвинуться в использовании математических средств в той области деятельности, которой займутся после школы.

В ранней юности я мечтал стать кораблестроителем: хотелось конструировать корпуса судов идеальной формы, искать возможности увеличения их скорости без увеличения мощности двигателей. Однако я не стал кораблестроителем, а выбрал математику, но это не отдалило меня от осуществления давней мечты, поскольку математическими методами мне удалось решить ряд задач, способствующих развитию морского дела. Математика дала возможность заниматься и другими практическими вопросами, которые требовали не только применения уже имеющихся математических средств, но и развития самой математической науки. Что принесло большую радость, сказать трудно, поскольку удовлетворение получаешь только тогда, когда преодолеваешь трудности, когда удается найти такой путь, который приводит к решению задачи, казавшейся раньше неразрешимой. Убежден, что многие читатели этой книги в будущем не раз испытают ни с чем не сравнимое наслаждение от благополучного завершения работы над сложной проблемой, теоретической или производственной. Это убеждение связано с тем, что занятия математикой, решение математических проблем требуют непрерывного размышления, поиска, а не просто запоминания или применения уже готового приема.

Последние три столетия дали науке ряд блестящих математических результатов: решены три классические задачи древности, над которыми трудились ученые в течение четырех тысячелетий,– квадратура круга, трисекция угла и удвоение куба, построены новые математические науки, позволившие открыть неизвестные ранее объекты математического познания; достигнута огромная гибкость математических понятий и методов исследования, способных охватить все многообразие проблем естествознания, технических и социальных дисциплин. Математика превратилась в необходимое орудие познания, без которого многие естествоиспытатели не мыслят себе саму возможность развития их областей знания.

Датский физик Нильс Бор говорил, что математика является значительно большим, чем наука, поскольку она является языком науки. И действительно, математика стала для многих отраслей знания не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Каждому ясно, что без современной матема-

тики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс физики, инженерного дела и организации производства, так и остались бы нерешенными многие принципиальные проблемы авиации и космонавтики, метеорологии и радиотехники. В наши дни без предварительных расчетов на заводе не начнут производства ни одной сложной машины, не станут модернизировать технологический процесс. С развитием науки возросло количество экспериментальных исследований. В связи с этим потребовалась разработка математической теории эксперимента, позволяющей так организовать наблюдения, чтобы при минимальном их числе получать максимальное количество информации об интересующем нас явлении или процессе. Роль математики в современном познании, современной практической деятельности так велика, что наше время называют эпохой математизации знаний.

Современная наука далеко продвинулась по пути изучения явлений макро- и микромира. Совершены первые полеты в космос, и в их осуществлении математика занимает почетное место. Расчет конструкций ракет, траекторий движения, построение моделей бомбардировки поверхности ракеты метеоритами и метеоритной пылью – это лишь малая часть тех отраслей естествознания и техники, где широко и по существу дела использовалась математика. Достаточно много говорит и тот факт, что о существовании ряда элементарных частиц удалось узнать не опытным путем, а из результатов математических расчетов.

Но для того чтобы математика и далее оставалась орудием исследования новых глубоких явлений микромира (и не только микромира), она должна систематически развивать и оттачивать разработанные ею методы исследования и создавать новые. Для этого абсолютно необходим приток в науку молодых сил, способных принести с собой и новые идеи.

Выявление и развитие способностей молодежи, привлечение их к творческому труду – одна из основных задач школы. Стране крайне необходимы творцы нового во всех областях деятельности, в том числе и в математике. Для этого делается многое: введены факультативные занятия, созданы математические классы и математические школы, издается обширная литература для школьников, в которой рассматриваются вопросы, требующие серьезного размышления, предлагаются нестандартные задачи.

Хотелось бы сказать, что хорошее математическое образование и развитие математических способностей необходимы не только тому, кто впоследствии займется научными исследованиями в области математики, физики, астрономии или инженерного дела, но и тому, кто станет экономистом, организатором производства, агрономом, квалифицированным рабочим. Математический стиль мышления, умение рассуждать строго, без логических скачков нужны также будущим юристам и историкам, биологам и лингвистам, врачам. В связи с моими научными интересами одно время мне нужно было работать с врачами. Хотелось бы отметить, что врачи, когда ставят диагноз, проявляют исключительную логическую скрупулезность при выводе заключений. Порой казалось, что я нахожусь среди коллег-математиков. Недаром многие врачи считают абсолютно необходимым для прогресса медицины привлекать не только физику, химию и биологию, но и математику.

Мой более чем пятидесятилетний педагогический опыт показал мне, что математические способности встречаются гораздо чаще, чем мы обычно думаем. Как правило, неудачи с усвоением школьного или вузовского курса математики происходят не из-за отсутствия математических способностей, а из-за отсутствия привычки систематически работать и доводить познаваемое до понимания, а не до запоминания. Часто случается, что учащийся переходит к последующим частям курса без хорошего усвоения предшествующих, он не проникает в суть фундаментальных понятий и идей, лежащих в основе всего изложения. А нередко учащиеся стремятся набить руку в пользовании определенными алгоритмами без проникновения в их смысл. Часто жалобы на отсутствие математических способностей приходится слушать от тех, кто учится с ленцой, которая мешает преодолевать трудности, встречающиеся на пути познания. А ведь только в самостоятельном преодолении препятствий вырабатывается характер и появляется уверенность в собственных силах.

Но мало выявить способности, необходимо создать условия для их развития, для творческого поиска. Вы, сегодняшние школьники, через несколько лет возьмете на свои плечи трудовые заботы отцов и матерей. Вам придется не

только применять на практике достижения науки и техники, экономики и культуры, но и способствовать их прогрессу. Для того чтобы стать творцом, необходимо пройти своеобразную школу творчества. Она начинается в обычной школе и продолжается в кружках, при чтении специальной литературы, в размышлениях над нестандартными задачами, в самостоятельном преодолении трудностей, в воспитании привычки напряженно работать.

Жизнь – изумительный дар природы, но, чтобы она приносила радость, нужно научиться трудиться с увлечением, стремиться облегчить свой труд и усовершенствовать его привычные формы. Миллионы граждан нашей страны принимают участие в изобретательстве, совершенствовании орудий труда и методах их использования. Такая привычка мыслить, открывать новое в обыденном окажет вам огромную помощь в практической работе и позволит превратить труд во внутреннюю потребность.

В Постановлении Пленума ЦК КПСС от 18 февраля 1988 г. подчеркивается: «Важно предоставить каждому человеку возможность постоянного пополнения знаний через разнообразные формы обучения... Стремление к овладению знаниями, духовному росту должно поощряться, получать общественное, государственное признание... Следует уделять первостепенное внимание развитию индивидуальных способностей учащихся, расширять дифференцированное обучение учащихся в соответствии с их запросами и склонностями».

Мы убеждены, что предлагаемая книга внесет свой вклад в большое всенародное дело воспитания нового человека, способного отдавать свои знания и силы решению больших задач, стоящих перед нашим народом.

В добрый путь, друзья!

Академик АН УССР
ГНЕДЕНКО Б. В.

Б. Гнеденко

ОТ РЕДКОЛЛЕГИИ

Дорогие ребята! В этой книге собрано около 200 статей, посвященных основным понятиям математики и ее приложениям.

Ряд статей словаря, такие, как «Группа», «Геометрические преобразования», «Топология», знакомят с новыми областями математики, бурно развивающимися в последние десятилетия. Не забыты и математические развлечения, в том числе и знаменитый венгерский кубик.

В нашей стране много делается для того, чтобы математически одаренные юноши и девушки могли развивать свои способности. Проводятся математические олимпиады, создаются летние математические школы. Об этом вы также сможете прочитать в статьях словаря.

Книга познакомит вас с жизнью и творчеством великих математиков всех времен, с современными и русскими математиками.

Словарь иллюстрирован многочисленными схемами и графиками, которые дополняют текст. Образные иллюстрации, которые даны, например, к статьям «Алгебра», «Арифметика», «Анализ математический», «Геометрия», «Функция», тесно связаны с содержанием статьи, и понять их можно, только прочитав статьи.

Статьи в книге расположены в алфавитном порядке их названий. Если же интересующее вас понятие не является названием статьи словаря, то следует посмотреть в алфавитный указатель, находящийся в конце книги.

Некоторые слова в тексте набраны курсивом. Это значит, что в словаре имеется статья с таким названием. Ряд статей, в частности биографии ученых, даны не в алфавитном порядке, а как приложения к другим статьям. Чтобы найти их, также удобно воспользоваться алфавитным указателем, где даны страницы, на которых напечатаны эти статьи. В конце книги имеется список рекомендованной литературы.



А,Б

АКСИОМА

Начальные геометрические сведения дошли до нас из глубокой древности. Например, формулы для вычисления площадей земельных участков, имеющих форму прямоугольника, треугольника, трапеции, приведены в древнеегипетских математических папирусах, относящихся к 2000 г. до н.э., в клинописных таблицах Древнего Вавилона.

Начальные геометрические знания были добыты опытным путем. Получение новых геометрических фактов при помощи рассуждений (*доказательств*) началось от древнегреческого ученого Фалеса (VI в. до н.э.). Ему приписывают установление свойств равнобедренного треугольника, доказательство равенства вертикальных углов, доказательство того, что вписанный угол, опирающийся на диаметр,– прямой, и др. Фалес, по-видимому, применял поворот части фигуры и перегибание чертежа, т.е. то, что в наши дни называют перемещениями, или движениями (см. *Геометрические преобразования*).

Постепенно доказательства приобретают в геометрии все большее значение. К III в. до н.э. геометрия становится дедуктивной наукой, т.е. наукой, в которой большинство фактов устанавливается путем вывода (дедукции), доказательства. К этому времени относится книга «Начала», написанная древнегреческим ученым Евклидом (см. *Евклид и его «Начала»*). В ней доказываются свойства параллелограммов и трапеций, приведена теорема Пифагора (см. *Пифагора теорема*), изучается подобие многоугольников, рассматриваются многие другие геометрические факты.

В этой книге Евклид проводит аксиоматический взгляд на геометрию. Точка зрения Евклида была следующей. Взяв какую-либо теорему, можно проследить, какие ранее доказанные теоремы были использованы при ее выводе. Для этих ранее доказанных теорем в свою очередь можно выделить те более простые факты, из которых они выводятся, и т.д. В конце концов получается набор некоторых фактов, которые позволяют доказать все изучаемые теоремы геометрии. Эти выделенные факты настолько просты, что не возникает вопроса о необходимости их вывода. Их назвали аксиомами (это греческое слово означает «удостоенное, принятое положение»). Весь набор аксиом (система) называется аксиоматикой. Таким образом, аксиомы – это первоначальные факты геометрии, которые принимаются без доказательства и позволяют вывести из них все дальнейшие факты этой науки. Утверждения, выводимые из аксиом, называют *теоремами*.

Среди сформулированных Евклидом аксиом имеются, например, следующие: «через две точки можно провести прямую»; «порознь равные третьему равны между собой»; «если в плоскости даны прямая и лежащая вне этой прямой точка, то через эту точку можно провести в плоскости не более одной прямой, которая не пересекается с данной» (последняя из этих аксиом – аксиома параллельности – у Евклида формулировалась иначе).

Аксиомы есть не только в геометрии, но и в алгебре, и других математических науках. Например, равенства:

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba,$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c, \qquad a(bc) = (ab)c,$$
$$a + 0 = a, \qquad a \cdot 1 = a,$$
$$a + (-a) = 0, \qquad a \cdot \left(\frac{1}{a}\right) = 1, \ (a \neq 0),$$
$$a(b + c) = ab + ac,$$

выражающие свойства сложения и умножения, являются в алгебре аксиомами: они принимаются без доказательства и используются для вывода новых фактов (для доказательства теорем). Например, с помощью аксиом доказывают формулы квадрата суммы или разности, правила умножения многочленов, формулу суммы членов геометрической прогрессии и т.д.

В каждой математической науке аксиомы возникают в процессе ее долгого и сложного исторического развития. Первоначальные факты накапливаются в результате практической деятельности человека. Их проверяют, уточняют, систематизируют. Исключают из них те, которые могут быть выведены из других первоначальных фактов. Иногда обнаруживается, что оставшийся список простейших фактов (аксиом) – неполный, т.е. этих фактов недостаточно для вывода всех теорем, и тогда к этому списку добавляют недостающие аксиомы. В результате и получается полный набор аксиом (аксиоматика).

После Евклида математики многих поколений стремились улучшить, дополнить его аксиоматику геометрии. Большую роль сыграли работы современника Евклида, древнегреческого ученого *Архимеда*, который сформулировал аксиомы, относящиеся к измерению геометрических величин. Из ученых более позднего времени существенный вклад в усовершенствование аксиоматики геометрии внесли русский математик Н.И. Лобачевский, французский математик М. Паш, итальянский ма-

тематик Д.Ж. Пеано. Логически безупречный список аксиом геометрии был указан на рубеже XIX и XX вв. немецким математиком *Д. Гильбертом*.

АКСИОМАТИКА И АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Аксиоматика – система *аксиом* той или иной математической науки. Например, аксиоматика элементарной геометрии содержит около двух десятков аксиом, аксиоматика числового *поля* – 9 аксиом. Наряду с ними важнейшую роль в современной математике играет аксиоматика *группы*, аксиоматика метрического и векторного пространств (см. *Вектор*) и др. Советским математикам С.Н. Бернштейну и А.Н. Колмогорову принадлежит заслуга аксиоматического описания теории вероятностей (см. *Вероятностей теория*). Десятки других направлений современной математики также развиваются на аксиоматической основе, т.е. на базе соответствующей системы аксиом (аксиоматики).

«Аксиомы обладают наивысшей степенью общности и представляют начала всего».
Аристотель

Аксиоматический метод – важный научный инструмент познания мира. Большинство направлений современной математики, теоретическая механика и ряд разделов современной физики строятся на основе аксиоматического метода. В самой математике аксиоматический метод дает законченное, логически стройное построение научной теории. Не меньшее значение имеет и то, что математическая теория, построенная аксиоматически, находит многократные приложения в математике и естествознании.

Во многих разделах современной математики применяются метрические пространства как совокупности элементов произвольной природы, в которых для каждой пары a и b определено число $\rho(a, b)$, называемое расстоянием между a и b и удовлетворяющее аксиоматике, состоящей всего из трех аксиом:

1) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$;
2) $\rho(a, b) \geqslant 0$, причем $\rho(a, b) = 0$ в том, и только в том случае, если $a = b$;
3) $\rho(a, b) \leqslant \rho(a, c) + \rho(b, c)$.



В приложениях математики рассматриваются метрические пространства, «точками» которых могут являться линии, фигуры, траектории полета космических кораблей, плановые задания заводов и т.д. Доказав (на основе аксиом) какую-либо теорему о метрических пространствах, можно утверждать, что она будет справедлива для метрических пространств, применяемых в геометрии, алгебре, астронавтике, экономике и, вообще, во всех тех областях, где появляются метрические пространства.

Развив ту или иную аксиоматическую теорию, мы можем, не проводя повторных рассуждений, утверждать, что ее выводы имеют место в каждом случае, когда справедливы рассматриваемые аксиомы. Таким образом, аксиоматический метод позволяет целые аксиоматически развитые теории применять в различных областях знаний. В этом состоит сила аксиоматического метода.

Современная точка зрения на аксиоматическое построение какой-либо области математики заключается в следующем: во-первых, перечисляются первоначальные (неопределяемые) понятия; во-вторых, указывается список аксиом, в которых устанавливаются некоторые связи и взаимоотношения между первоначальными понятиями; в-третьих, с помощью *определений* вводятся дальнейшие понятия и, в-четвертых, исходя из первоначальных фактов, содержащихся в аксиомах, выводятся, доказываются с помощью некоторой логической системы дальнейшие факты — *теоремы*. Первоначальные понятия и аксиомы заимствованы из опыта. Поэтому очевидно, что все последующие факты, выводимые в аксиоматической теории, хотя их получают на основе системы аксиом чисто умозрительным, дедуктивным путем, имеют тесную связь с жизнью и могут быть применены в практической деятельности человека.

Важнейшим требованием к системе аксиом является ее непротиворечивость, которую можно понимать так: сколько бы мы ни выводили теорем из этих аксиом, среди них не будет двух теорем, противоречащих друг другу. Противоречивая аксиоматика не может служить основой построения содержательной теории.

Чтобы объяснить подробнее, как в современной математике рассматриваются вопросы непротиворечивости, приведем пример. Несколько школьников решили организовать шахматный турнир по упрощенной схеме: каждый должен сыграть ровно три партии с кем-либо из остальных участников (а белыми или черными фигурами – по жребию). Составить расписание турнира никак не удавалось, и мальчики обратились за помощью к учителю. По просьбе учителя юные шахматисты подсчитали общее число участников: оно оказалось нечетным. Тогда учитель предложил сформулировать требования, которые ученики предъявили к турниру, в виде аксиом. Для этого потребовалось ввести три первоначальных (неопределяемых) понятия: «игрок», «партия», «участие игрока в партии». Аксиом получилось четыре:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

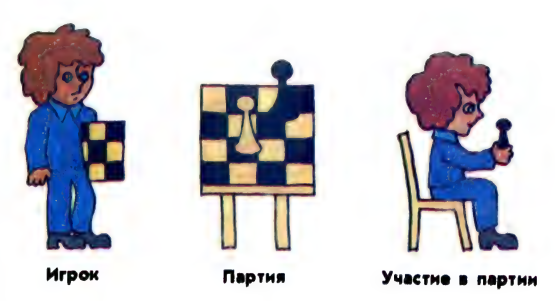
Аксиома 2. Каждый игрок участвует в трех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

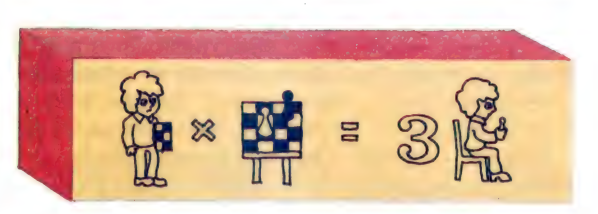
Аксиома 4. Для каждых двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Из этих аксиом можно вывести ряд теорем.

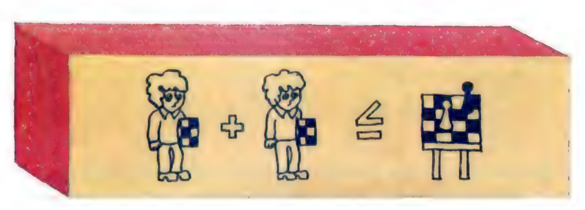
Рис. 1













Первую из них предложил для примера сам учитель.

Теорема 1. Число игроков не меньше пяти.

Доказательство. Так как нуль – четное число, то по аксиоме 1 число игроков не равно нулю, т. е. существует хотя бы один игрок A. Этот игрок в силу аксиомы 2 участвует в трех партиях, причем в каждой из этих партий, кроме A, участвует еще один игрок (аксиома 3). Пусть B, C, D – игроки, отличные от A, которые участвуют в этих партиях. По аксиоме 4 все игроки B, C, D различны (если бы, например, было $B = C$, то оказалось бы, что имеются две партии, в которых участвуют игрок A и игрок $B = C$). Итак, мы нашли уже четырех игроков: A, B, C, D. Но тогда по аксиоме 1 число игроков не меньше пяти.

Следующую теорему доказал один из учеников. Для этого он определил новое понятие: если q – некоторая партия и A – один из участвующих в ней игроков, то пару (q, A) назовем выступлением игрока.

Теорема 2. Число всех выступлений игроков четно.

Доказательство. Если в партии q участвуют игроки A и B, то мы получаем два выступления игроков: (q, A) и (q, B), т. е. каждая партия дает ровно два выступления игроков (аксиома 3). Значит, число всех выступлений игроков четно, так как оно вдвое больше числа всех партий.



Однако другой ученик доказал теорему, противоречащую предыдущей.

Теорема 3. Число всех выступлений игроков нечетно.

Доказательство. По аксиоме 2 игрок A участвует ровно в трех партиях, скажем q_1, q_2, q_3. Это дает три выступления игрока: (q_1, A), (q_2, A), (q_3, A). Отсюда следует, что число всех выступлений игроков равно $3n$, где n – число игроков. Так как n нечетно (аксиома 1), то и $3n$ нечетно.



Таким образом, взятая аксиоматика позволяет доказать ряд теорем, однако среди них имеются две, противоречащие друг другу. Это означает, что такая аксиоматика противоречива, т. е. требования, выдвинутые организаторами турнира, несовместимы (рис. 1). Не удивительно, что мальчики не сумели составить расписание турнира: такого расписания просто не существует.

Рис. 1

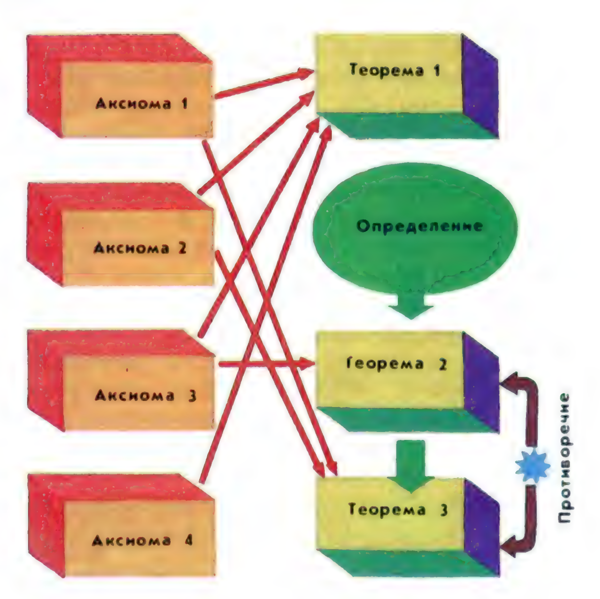
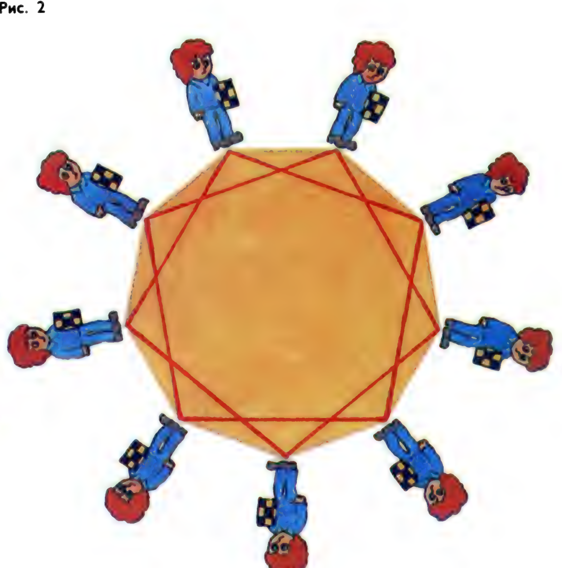


Рис. 2



После этого учитель предложил другую си-

«Так называемые аксиомы математики – это те немногие мыслительные определения, которые необходимы в математике в качестве исходного пункта».
Ф. Энгельс



стему организации турнира, при которой каждый из участников должен сыграть не три, а четыре партии с кем-либо из остальных участников. Иначе говоря, он предложил рассмотреть «теорию», в которой те же первоначальные понятия, а аксиомы формулируются следующим образом:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

Аксиома 2. Каждый игрок участвует в четырех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждых двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Однако ученики не спешили выводить теоремы из этих аксиом: вдруг опять обнаружится противоречие. Учитель же заверил мальчиков, что, сколько бы теорем они ни выводили из этих аксиом, никогда противоречий не будет. Вот как он убедил их в этом.

Рассмотрим девятиугольник, в котором кроме сторон проведем девять диагоналей, соединяющих вершины через одну (рис. 2). Вершины девятиугольника будем считать «игроками», проведенные отрезки (стороны и диагонали) – «партиями», а концы соответствующего отрезка – «игроками», участвующими в некоторой «партии». Мы получаем модель (или схему) интересующего нас турнира. Легко установить, что все четыре аксиомы здесь выполняются. Итак, удается построить модель, в которой выполняются все рассматриваемые аксиомы, причем эта модель построена из «материала» геометрии, т. е. науки, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся.

Предположим теперь, что из рассматриваемых четырех аксиом можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу. Тогда доказательства этих двух теорем можно было бы повторить и в построенной модели (ведь в этой модели все четыре аксиомы имеют место). В результате получается, что, рассуждая о правильном девятиугольнике, мы можем получить две противоречащие друг другу теоремы. Но это означало бы, что геометрия – наука противоречивая, чего мы не допускаем. Таким образом, мы должны признать, что двух противоречащих друг другу теорем вывести из рассматриваемых четырех аксиом невозможно.

Вообще, пусть рассматриваются две теории P и Q, причем теория P задается аксиоматически (и в ее непротиворечивости мы заранее не уверены), а Q – это хорошо известная нам теория, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся. Если из «материала» теории Q удается построить модель, в которой выполняются все аксиомы теории P, то этим непротиворечивость теории P будем считать установленной.

Именно с помощью построения моделей в современной математике установлена непротиворечивость геометрии – в предположении непротиворечивости теории действительных чисел. Далее, установлена непротиворечивость теории действительных чисел – в предположении непротиворечивости теории рациональных чисел; наконец, установлена непротиворечивость теории рациональных чисел – в предположении непротиворечивости теории натуральных чисел.

АЛГЕБРА

Алгебра – часть математики, которая изучает общие свойства действий над различными величинами и решение уравнений, связанных с этими действиями.

Решим задачу: «Возрасты трех братьев 30, 20 и 6 лет. Через сколько лет возраст старше-

го будет равен сумме возрастов обоих младших братьев?» Обозначив искомое число лет через x, составим уравнение: $30 + x = (20 + x) + (6 + x)$, откуда $x = 4$. Близкий к описанному метод решения задач был известен еще во II тысячелетии до н. э. писцам Древнего Египта (однако они не применяли буквенной символики). В сохранившихся до наших дней математических папирусах имеются не только задачи, которые приводят к уравнениям первой степени с одним неизвестным, как в задаче о возрасте братьев, но и задачи, приводящие к уравнениям вида $ax^2 = b$ (см. *Квадратные уравнения*).

Еще более сложные задачи умели решать с начала II тысячелетия до н. э. в Древнем Вавилоне: в математических текстах, выполненных клинописью на глиняных пластинках, есть квадратные и биквадратные уравнения, системы уравнений с двумя неизвестными и даже простейшие кубические уравнения. При этом вавилоняне также не использовали букв, а приводили решения «типовых» задач, из которых решения аналогичных задач получались заменой числовых данных. В числовой же форме приводились и некоторые правила тождественных преобразований. Если при решении уравнения надо было извлекать квадратный корень из числа a, не являющегося точным квадратом, находили приближенное значение корня x: делили a на x и брали среднее арифметическое чисел x и a/x.

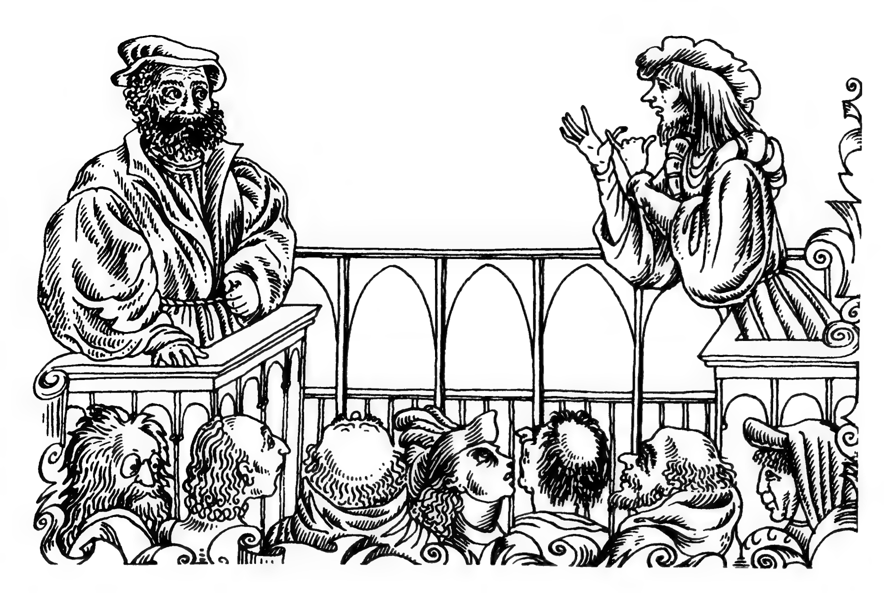
Первые общие утверждения о тождественных преобразованиях встречаются у древнегреческих математиков, начиная с VI в. до н. э. Среди математиков Древней Греции было принято выражать все алгебраические утверждения в геометрической форме. Вместо сложения чисел говорили о сложении отрезков, произведение двух чисел истолковывали как площадь прямоугольника, а произведение трех чисел – как объем прямоугольного параллелепипеда. Алгебраические формулы принимали вид соотношений между площадями и объемами. Например, говорили, что площадь квадрата, построенного на сумме двух отрезков, равна сумме площадей квадратов, построенных на этих отрезках, увеличенной на удвоенную площадь прямоугольника, построенного на этих отрезках. С того времени и идут термины «квадрат числа» (т. е. произведение величины на самое себя), «куб числа», «среднее геометрическое». Геометрическую форму приняло у греков и решение квадратных уравнений – они искали стороны прямоугольника по заданным периметру и площади.

Большинство задач решалось в Древней Греции путем построений циркулем и линейкой (см. *Геометрические построения*). Но не все задачи поддавались такому решению. Например, «не решались» задачи удвоения куба, трисекции угла, задачи построения правильного семиугольника (см. *Классические задачи древности*). Они приводили к кубическим уравнениям вида $x^3 = 2$, $4x^3 - 3x = a$ и $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ соответственно. Для решений этих задач был разработан новый метод, связанный с отысканием точек пересечения конических сечений (эллипса, параболы и гиперболы).

Геометрический подход к алгебраическим проблемам сковывал дальнейшее развитие науки, так как, например, нельзя было складывать величины разных размерностей (длины и площади или площади и объемы), нельзя было говорить о произведении более чем трех множителей и т. д. Отказ от геометрической трактовки наметился у Диофанта Александрийского, жившего в III в. В его книге «Арифметика» появляются зачатки буквенной символики и специальные обозначения для степеней неизвестного вплоть до 6-й. Были у него и обозначения для степеней с отрицательными показателями, обозначения для отрицательных чисел, а также знак равенства (особого знака для сложения еще не было), краткая запись правил умножения положительных и отрицательных чисел. На дальнейшее развитие алгебры сильное влияние оказали разобранные Диофантом задачи, приводящие к сложным системам алгебраических уравнений, в том числе к системам, где число уравнений было меньше числа неизвестных. Для таких уравнений Диофант искал лишь положительные рациональные решения (см. *Диофантовы уравнения*).

С VI в. центр математических исследований перемещается в Индию и Китай, страны Ближнего Востока и Средней Азии. Китайские ученые разработали метод последовательного исключения неизвестных (см. *Неизвестных исключение*) для решения систем линейных уравнений, дали новые методы приближенного решения уравнений высших степеней. Индийские математики использовали отрицательные числа и усовершенствовали буквенную символику. Однако лишь в трудах ученых Ближнего Востока и Средней Азии алгебра оформилась в самостоятельную ветвь математики, трактующую вопросы, связанные с решением уравнений. В IX в. узбекский математик и астроном Мухаммед ал-Хорезми написал трактат «Китаб аль-джебр валь-мукабала», где дал общие правила для решения уравнений первой степени. Слово «аль-джебр» (восстановление), от которого новая наука алгебра получила свое название, означало перенос отрицательных членов уравнения из одной его части в другую с изменением знака. Ученые Востока изучали и решение кубических уравнений, хотя не сумели получить общей формулы для их корней.

В Западной Европе изучение алгебры нача-



Так можно представить себе математический турнир между итальянскими учеными А.-М. Фиоре и Н. Тартальей

лось в XIII в. Одним из крупных математиков этого времени был итальянец Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (ок. 1170 – после 1228). Его «Книга абака» (1202) – трактат, который содержал сведения об арифметике и алгебре до квадратных уравнений включительно (см. *Числа Фибоначчи*). Первым крупным самостоятельным достижением западноевропейских ученых было открытие в XVI в. формулы для решения кубического уравнения. Это было заслугой итальянских алгебраистов С. дель Ферро, Н. Тарталья и Дж. Кардано. Ученик последнего – Л. Феррари решил и уравнение 4-й степени (см. *Алгебраическое уравнение*). Изучение некоторых вопросов, связанных с корнями кубических уравнений, привело итальянского алгебраиста Р. Бомбелли к открытию *комплексных чисел*.

Отсутствие удобной и хорошо развитой символики сковывало дальнейшее развитие алгебры: самые сложные формулы приходилось излагать в словесной форме. В конце XVI в. французский математик Ф. Виет ввел буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для произвольных постоянных. Символика Виета была усовершенствована многими учеными. Окончательный вид ей придал в начале XVII в. французский философ и математик Р. Декарт, который ввел (употребляемые и поныне) обозначения для показателей степеней.

Постепенно расширялся запас чисел, с которыми можно было производить действия. Завоевывали права гражданства отрицательные числа, потом – комплексные, ученые стали свободно применять иррациональные числа (см. *Число*). При этом оказалось, что, несмотря на такое расширение запаса чисел, ранее установленные правила алгебраических преобразований сохраняют свою силу. Наконец, Декарту удалось освободить алгебру от несвойственной ей геометрической формы. Все это позволило рассматривать вопросы решения уравнений в самом общем виде, применять уравнения к решению геометрических задач. Например, задача об отыскании точки пересечения двух линий свелась к решению системы уравнений, которым удовлетворяли точки этих линий. Такой метод решения геометрических задач получил название аналитической геометрии.

Развитие буквенной символики позволило установить общие утверждения, касающиеся алгебраических уравнений: теорему Безу о делимости многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$, где a – корень этого многочлена; соотношения Виета между корнями уравнения и его коэффициентами; правила, позволяющие оценивать число действительных корней уравнения; общие методы исключения неизвестных из систем уравнений и т.д.

Особенно далеко было продвинуто в XVIII в. решение систем *линейных уравнений* – для них были получены формулы, позволяющие выразить решения через коэффициенты и свободные члены. Дальнейшее изучение таких систем уравнений привело к созданию теории *матриц* и *определителей*. В конце XVIII в. было доказано, что любое алгебраическое уравнение с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень. Это утверждение носит название основной теоремы алгебры.

В течение двух с половиной столетий внимание алгебраистов было приковано к задаче о выводе формулы для решения общего уравнения 5-й степени. Надо было выразить корни этого уравнения через его коэффициенты с помощью арифметических операций и извлечений корней (решить уравнение в радикалах). Лишь в начале XIX в. итальянец П. Руффини и норвежец *Н. Абель* независимо друг от друга доказали, что такой формулы не существует. Эти исследования были завершены

французским математиком Э. *Галуа*, методы которого позволяют для каждого данного уравнения определить, решается ли оно в радикалах. Один из крупнейших математиков – К. *Гаусс* выяснил, при каких условиях можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник: вопрос оказался связанным с изучением корней уравнения $x^n = 1$. Выяснилось, что эта задача разрешима лишь в случае, когда число n является простым числом Ферма или произведением нескольких различных простых чисел Ферма (простыми числами Ферма называются простые числа, представимые в виде $2^{2^n} + 1$; до сих пор известны лишь пять таких чисел: 3, 5, 17, 257, 65 537). Тем самым молодой студент (Гауссу было в то время лишь 19 лет) решил задачу, которой безуспешно занимались ученые более двух тысячелетий.

В начале XIX в. были решены основные задачи, стоявшие перед алгеброй в первом тысячелетии ее развития. Она получила самостоятельное обоснование, не опирающееся на геометрические понятия, и, более того, алгебраические методы стали применяться для решения геометрических задач. Были разработаны правила буквенного исчисления для рациональных и иррациональных выражений, выяснен вопрос о разрешимости уравнений в радикалах и построена строгая теория комплексных чисел. Поверхностному наблюдате-

«Алгебра есть не что иное, как математический язык, приспособленный для обозначения отношений между количествами».

И. Ньютон



лю могло показаться, что теперь математики будут решать новые и новые классы алгебраических уравнений, доказывать новые алгебраические тождества и т.д. Однако развитие алгебры пошло иным путем: из науки о буквенном исчислении и уравнениях она превратилась в общую науку об операциях и их свойствах.

После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании «гиперкомплексных чисел» – чисел с несколькими «мнимыми единицами». Такую систему чисел, имевших вид $a + bi + cj + dk$, где $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, построил в 1843 г. ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их «кватернионами». Правила действий над кватернионами напоминают правила обычной алгебры, однако их умножение не обладает свойством коммутативности (переместительности): например, $ij = k$, а $ji = -k$.

С операциями, свойства которых лишь отчасти напоминают свойства арифметических операций, математики XIX в. столкнулись и в других вопросах. В 1858 г. английский математик А. Кэли ввел общую операцию умножения матриц и изучил ее свойства. Оказалось, что к умножению матриц сводятся и многие изучавшиеся ранее операции. Английский логик Дж. Буль в середине XIX в. начал изучать операции над высказываниями, позволявшие из двух данных высказываний построить третье, а в конце XIX в. немецкий математик Г. Кантор ввел операции над *множествами*: объединение, пересечение и т.д. Оказалось, что как операции над высказываниями, так и операции над множествами обладают свойствами коммутативности (переместительности), ассоциативности (сочетательности) и дистрибутивности (распределительности), но некоторые их свойства не похожи на свойства операций над числами.

Таким образом, в течение XIX в. в математике возникли разные виды алгебр: обычных чисел, комплексных чисел, кватернионов, матриц, высказываний, множеств и т.д. Каждая из них имела свои правила, свои тождества, свои методы решения уравнений. При этом для некоторых видов алгебр правила были очень похожими. Например, правила алгебры рациональных чисел не отличаются от правил алгебры действительных чисел. Именно поэтому формулы, которые в VI классе устанавливают для рациональных значений букв, оказываются верными и для любых действительных (и даже любых комплексных) значений тех же букв. Одинаковыми оказались и правила в алгебре высказываний и в алгебре множеств. Все это привело к созданию абстрактного понятия композиции, т.е. операции, которая каждой паре (a, b) элементов некоторого множества X сопоставляет третий элемент c того же множества. Композициями были сложение и умножение как натуральных, так и любых целых, а также рациональных, действительных и комплексных чисел, «умножение» матриц, пересечение и объединение подмножеств некоторого множества U и т.д. А вычитание и деление в множестве натуральных чисел не являются композициями, так как и разность, и частное могут не быть натуральными числами.

Изучение свойств композиций разного вида привело к мысли, что основная задача алгебры – изучение свойств операций, рассматриваемых независимо от объектов, к которым они применяются. Иными словами, алгебра стала рассматриваться как общая наука о свойствах законов композиции, свойствах операций. При этом два множества, в каждом из которых заданы композиции, стали считаться тождественными с точки зрения алгебры (или, как говорят, «изоморфными»), если между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, переводящее один закон композиции в другой. Если два множества с композициями изоморфны, то, изучая одно из них, мы узнаем алгебраические свойства другого.

Поскольку совокупность различных множеств с заданными в них законами композиции необозрима, были выделены типы таких множеств, которые хотя и не изоморфны друг другу, но обладают общими свойствами композиции. Например, изучив свойства операций сложения и умножения в множествах рациональных, действительных и комплексных чисел, математики создали общее понятие *поля* – множества, где определены эти две операции, причем выполняются их обычные свойства. Исследование операции умножения матриц привело к выделению понятия *группы*, которое является сейчас одним из важнейших не только в алгебре, но и во всей математике.

В наши дни алгебра – одна из важнейших частей математики, находящая приложения как в сугубо теоретических отраслях науки, так и во многих практических вопросах.

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Алгебраические уравнения – уравнения вида

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

где P – *многочлен* от переменных $x_1, \ldots x_n$. Эти переменные называют неизвестными. Упорядоченный набор чисел $(a_1, \ldots, a_n)$ удовлетворяет этому уравнению, если при замене x_1 на a_1, x_2 на a_2 и т.д. получается верное числовое равенство (например, упорядоченная тройка чисел (3, 4, 5) удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, поскольку $3^2 + 4^2 = 5^2$). Чис-

ло, удовлетворяющее алгебраическому уравнению с одним неизвестным, называют корнем этого уравнения. Множество всех наборов чисел, удовлетворяющих данному уравнению, есть множество решений этого уравнения. Два алгебраических уравнения, имеющих одно и то же множество решений, называются равносильными. Степень многочлена P называется степенью уравнения $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Например, $3x - 5y + z = c$ – уравнение первой степени, $x^2 + y^2 = z^2$ – второй степени, а $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ – четвертой степени. Уравнения первой степени называют также линейными (см. *Линейные уравнения*).

Алгебраическое уравнение с одним неизвестным имеет конечное число корней, а множество решений алгебраического уравнения с большим числом неизвестных может представлять собой бесконечное множество определенных наборов чисел. Поэтому обычно рассматривают не отдельные алгебраические уравнения с n неизвестными, а системы уравнений и ищут наборы чисел, одновременно удовлетворяющие всем уравнениям данной

НИЛЬС ГЕНРИХ АБЕЛЬ (1802–1829)



В Королевском парке в Осло стоит скульптура сказочного юноши, попирающего двух поверженных чудовищ; по цоколю идет надпись "ABEL".

Что же символизируют чудовища? Первое из них, несомненно,– алгебраические уравнения 5-й степени. Еще в последних классах школы Абелю показалось, что он нашел формулу для их решения, подобную тем, которые существуют для уравнений степени, не превышающей четырех. Никто в провинциальной Норвегии не смог проверить доказательство. Абель сам нашел у себя ошибку, он уже знал, что не существует выражения для корней в радикалах. Тогда Абель не знал, что итальянский математик П. Руффини опубликовал доказательство этого утверждения, содержащее, однако, пробелы.

К тому времени Абель был уже студентом университета в Осло (тогда Христиании). Он был совершенно лишен средств к существованию, и первое время стипендию ему выплачивали профессора из собственных средств. Затем он получил государственную стипендию, которая позволила ему провести два года за границей. В Норвегии были люди, которые понимали, сколь одарен Абель, но не было таких, кто мог бы понять его работы. Будучи в Германии, Абель так и не решился посетить К. Гаусса.

Во Франции Абель с интересом собирает математические новости, пользуется каждой возможностью увидеть П. Лапласа или А. Лежандра, С. Пуассона или О. Коши, но серьезных научных контактов с великими математиками установить не удалось. Представленный в академию «Мемуар об одном очень общем классе трансцендентных функций» не был рассмотрен, рукопись Абеля была обнаружена через сто лет. (В скульптуре эту работу олицетворяло второе поверженное чудовище.) Речь шла о рассмотрении некоторого класса замечательных функций, получивших название эллиптических и сыгравших принципиальную роль в дальнейшем развитии математического анализа. Абель не знал, что 30 лет назад в этих вопросах далеко продвинулся Гаусс, но ничего не опубликовал.

В 1827 г. Абель возвращается на родину, и там выясняется, что для него нет работы. Он получает временную работу вместо профессора, уехавшего в длительную экспедицию в Сибирь. Долги становятся его вечным уделом, но работоспособность Абеля не уменьшается. Он продолжает развивать теорию эллиптических функций, близок к пониманию того, какие уравнения решаются в радикалах. Неожиданно появляется соперник – К. Г. Якоби, который был на два года моложе Абеля. Якоби публикует замечательные результаты в области, которую Абель считал своей собственностью. И Абель работает еще интенсивнее и наконец сообщает: «Я нокаутировал Якоби».

К работам Абеля пришло признание, математики стали проявлять заботу о его судьбе. Французские академики-математики обращаются с посланием к шведскому королю, правившему Норвегией, с просьбой принять участие в судьбе Абеля. Тем временем у Абеля быстро прогрессирует туберкулез, и 6 апреля 1829 г. его не стало.

системы. Совокупность всех этих наборов образует множество решений системы. Например, множество решений системы уравнений $x^2 + y^2 = 10$, $x^2 - y^2 = 8$ таково: $\{(3; 1), (3; -1), (-3; 1), (-3; -1)\}$.

Алгебраические уравнения 1-й степени с одним неизвестным решали уже в Древнем Египте и Древнем Вавилоне. Вавилонские писцы умели решать и *квадратные уравнения*, а также простейшие системы линейных уравнений и уравнений 2-й степени. С помощью особых таблиц они решали и некоторые уравнения 3-й степени, например $x^3 + x = a$. В Древней Греции квадратные уравнения решали с помощью *геометрических построений*. Греческий математик Диофант (III в.) разработал методы решения алгебраических уравнений и систем таких уравнений со многими неизвестными в рациональных числах. Например, он решил в рациональных числах уравнение $x^4 - y^4 + z^4 = n^2$, систему уравнений $y^3 + x^2 = u^2$, $z^2 + x^2 = v^3$ и т. д. (см. *Диофантовы уравнения*).

Некоторые геометрические задачи: удвое-

ЭВАРИСТ ГАЛУА (1811–1832)



Он прожил двадцать лет, всего пять лет из них занимался математикой. Математические работы, обессмертившие его имя, занимают чуть более 60 страниц.

В 15 лет Галуа открыл для себя математику и с тех пор, по словам одного из преподавателей, «был одержим демоном математики». Юноша отличался страстностью, неукротимым темпераментом, что постоянно приводило его к конфликтам с окружающими, да и с самим собой.

Галуа не задержался на элементарной математике и мгновенно оказался на уровне современной науки. Ему было 17 лет, когда его учитель Ришар констатировал: «Галуа работает только в высших областях математики». Ему было неполных 18 лет, когда была опубликована его первая работа. И в те же годы Галуа два раза подряд не удается сдать экзамены в Политехническую школу, самое престижное учебное заведение того времени. В 1830 г. он был принят в привилегированную Высшую нормальную школу, готовившую преподавателей. За год учебы в этой школе Галуа написал несколько работ; одна из них, посвященная теории чисел, представляла исключительный интерес.

Бурные июльские дни 1830 г. застали Галуа в стенах Нормальной школы. Его все более захватывает новая страсть – политика. Галуа присоединяется к набиравшей силы республиканской партии – Обществу друзей народа,– недовольной политикой Луи-Филиппа. Возникает конфликт с директором школы, всеми силами противодействовавшим росту политических интересов у учащихся, и в январе 1831 г. Галуа исключают из школы. В январе 1831 г. Галуа передал в Парижскую академию наук рукопись своего исследования о решении уравнений в радикалах. Однако академия отвергла работу Галуа – слишком новы были изложенные там идеи. В это время Галуа находился в тюрьме. После освобождения уже в июле он вновь оказывается в тюрьме Сент-Пелажи после попытки организовать манифестацию 14 июля (в годовщину взятия Бастилии), на сей раз Галуа приговорен к 9 месяцам тюрьмы. За месяц до окончания срока заключения заболевшего Галуа переводят в больницу. В тюрьме он встретил свое двадцатилетие.

29 апреля он выходит на свободу, но ему было суждено прожить еще лишь только один месяц. 30 мая он был тяжело ранен на дуэли. На следующий день он умер. В день перед дуэлью Галуа написал своему другу Огюсту Шевалье письмо: «Публично обратись к Якоби или Гауссу с просьбой дать мнение не об истинности, а о значении тех теорем, развернутого доказательства которых я не даю, и тогда, надеюсь, кто-нибудь сочтет полезным разобраться во всей этой путанице». Работы Галуа содержали окончательное решение проблемы о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, то, что сегодня называется теорией Галуа и составляет одну из самых глубоких глав алгебры. Другое направление в его исследованиях связано с так называемыми абелевыми интегралами и сыграло важную роль в математическом анализе XIX в. Работы Галуа были опубликованы лишь в 1846 г. Ж. Лиувиллем, а признание к ним пришло еще позже, когда с 70-х гг. понятие группы постепенно становится одним из основных математических объектов.

ние куба, трисекция угла (см. *Классические задачи древности*), построение правильного семиугольника – приводят к решению кубических уравнений. По ходу решения требовалось отыскать точки пересечения *конических сечений* (*эллипсов, парабол* и *гипербол*). Пользуясь геометрическими методами, математики средневекового Востока исследовали решения кубических уравнений. Однако им не удалось вывести формулу для их решения. Первым крупным открытием западноевропейской математики была полученная в XVI в. формула для решения кубического уравнения. Поскольку в то время отрицательные числа еще не получили распространения, пришлось отдельно разбирать такие типы уравнений, как $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$ и т. д. Итальянский математик С. дель-Ферро (1465–1526) решил уравнение $x^3 + px = q$ и сообщил решение своему зятю и ученику А.-М. Фиоре, который вызвал на математический турнир замечательного математика-самоучку Н. Тарталью (1499–1557). За несколько дней до турнира Тарталья нашел общий метод решения кубических уравнений и победил, быстро решив все предложенные ему 30 задач. Однако найденная Тартальей формула для решения уравнения $x^3 + px + q = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

была опубликована не им, а итальянским же ученым Дж. Кардано (1501–1576), который узнал ее от Тартальи. В это же время Л. Феррари (1522–1565), ученик Кардано, нашел решение уравнения 4-й степени.

Создание алгебраической символики и обобщение понятия числа вплоть до *комплексных чисел* позволили в XVII–XVIII вв. исследовать общие свойства алгебраических уравнений высших степеней, а также общие свойства многочленов от одного и нескольких переменных.

Одной из самых важных задач теории алгебраических уравнений в XVII–XVIII вв. было отыскание формулы для решения уравнения 5-й степени. После бесплодных поисков многих поколений алгебраистов усилиями французского ученого XVIII в. Ж. Лагранжа (1736–1813), итальянского ученого П. Руффини (1765–1822) и норвежского математика *Н. Абеля* в конце XVIII – начале XIX в. было доказано, что не существует формулы, с помощью которой можно выразить корни любого уравнения 5-й степени через коэффициенты уравнения, используя лишь арифметические операции и извлечение корней. Эти исследования были завершены работами Э. *Галуа*, теория которого позволяет для любого уравнения определить, выражаются ли его корни в радикалах. Еще до этого К. Ф. *Гаусс* решил проблему выражения в квадратных радикалах корней уравнения $x^n - 1 = 0$, к которому сводится задача о построении с помощью циркуля и линейки правильного n-угольника. В частности, невозможно с помощью этих инструментов построить правильный семиугольник, девятиугольник и т. д. – такое построение возможно лишь в случае, когда n – простое число вида $2^{2^k} + 1$ или произведение различных простых чисел такого вида.

Наряду с поисками формул для решения конкретных уравнений был исследован вопрос о существовании корней у любого алгебраического уравнения. В XVIII в. французский философ и математик Ж. Д'Аламбер доказал, что любое алгебраическое уравнение ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень. В доказательстве Д'Аламбера были пропуски, восполненные потом Гауссом. Из этой теоремы следовало, что любой многочлен n-й степени от x разлагается в произведение n линейных множителей.

В настоящее время теория систем алгебраических уравнений превратилась в самостоятельную область математики, называемую алгебраической геометрией. В ней изучаются *линии*, поверхности и многообразия высших размерностей, задаваемые системами таких уравнений.

АЛГОРИТМ

Алгоритм – точное предписание, определяющее процесс перехода от исходных данных к искомому результату.

Предписание считается алгоритмом, если оно обладает тремя следующими свойствами:

определенностью, т. е. общепонятностью и точностью, не оставляющими место произволу;

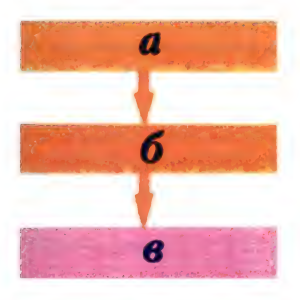
массовостью, т. е. возможностью исходить из меняющихся в известных пределах значений исходных данных;

результативностью, т. е. направленностью на получение искомого результата.

Перечисленных свойств вполне достаточно, чтобы можно было определить, является данное конкретное предписание алгоритмом или нет.

Совершенно очевидно, что хорошо известное предписание: «Пойди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что» – алгоритмом не является.

Примерами алгоритмов нематематического



характера могут служить различные рецепты из поваренной книги. Рассмотрим алгоритм приготовления бутерброда.

Исходные данные: хлеб (белый, черный), продукт (колбаса, ветчина, сыр, масло).

Искомый результат: бутерброд (ломтик продукта, наложенный на ломтик хлеба).

Предписание:

а) отрезать ломтик продукта;

б) отрезать ломтик хлеба;

Можно легко убедиться, что это предписание обладает всеми тремя свойствами алгоритма:

определенностью (всем понятно, что значит отрезать ломтик, положить один ломтик на другой и как все это сделать);

массовостью (хлеб может быть черным или белым, продукт – колбасой, ветчиной, сыром, маслом);

результативностью (при выполнении предписания получается искомый результат – бутерброд).

При этом последовательность выполнения пунктов а) и б) не существенна. Бутерброды получаются одинаковыми в обоих случаях а) – б) – в) и б) – а) – в). Это объясняется тем, что пункты а) и б) взаимно независимы друг от друга. Пункт в) может быть выполнен только после выполнения и пункта а), и пункта б), т. е. пункт в) зависит и от а), и от б).

Если пункты предписания изображать в виде прямоугольников, а зависимости – стрелочками, направленными в сторону зависимости, то алгоритму приготовления бутерброда будет соответствовать изображенная схема. (Интересно, что если в наличии имеются два ножа и соответствующее количество рук, то пункты а) и б) можно выполнять не только в любой последовательности, но и одновременно, и время приготовления бутерброда существенно уменьшится.)

В качестве примеров алгоритмов математического характера можно привести правила выполнения арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) над многозначными числами («столбиком»), правила выполнения таких же операций над простыми дробями, алгоритм Евклида (см. Евклида алгоритм), описания решений различных задач на построение в геометрии и т. д.

Рассмотрим алгоритм деления обыкновенных дробей.

Исходные данные: первая дробь (делимое), вторая дробь (делитель).

Искомый результат: дробь (частное).

Предписание:

а) числитель первой дроби умножить на знаменатель второй;

б) знаменатель первой дроби умножить на числитель второй;

в) записать дробь, числитель которой есть результат выполнения пункта а), а знаменатель – результат выполнения пункта б).

Все сказанное про последовательность выполнения пунктов в алгоритме приготовления бутерброда относится и к этому алгоритму.

Для того чтобы можно было изучать общие свойства алгоритмов, доказывать теоремы, нужно иметь строгое математическое определение этого термина. Такое определение удалось сформулировать сравнительно недавно советским ученым А. Н. Колмогорову и А. А. Маркову.

Вопросы, связанные с понятием алгоритма, выросли в последнее время в большую «теорию алгоритмов», потребность в которой вызвана появлением электронных вычислительных машин, станков с числовым программным управлением, промышленных роботов, автоматических линий и т. д. Во всех перечисленных случаях требуется создание алгоритмов выполнения машинами тех или иных операций, притом в таком порядке, который приводит к нужной цели. Эти алгоритмы зачастую бывают чрезвычайно сложными по структуре и для их выполнения компьютер должен сделать тысячи операций.

Если алгоритм предназначен для выполнения его на вычислительной машине, то он должен быть записан на языке, понятном этой машине. Такая запись алгоритма называется *программой для ЭВМ*, а язык, на котором написана программа,– *языком программирования*.

В процессе развития теории алгоритмов выяснилось, что существуют математические задачи, для которых невозможно составить общий алгоритм решения. Такие задачи получили название алгоритмически неразрешимых. Наиболее важные результаты в этой области принадлежат советскому математику П. С. Новикову.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ

В истории математики условно можно выделить два основных периода: элементарной и современной математики. Рубежом, от которого принято вести отсчет эпохи новой

(иногда говорят – высшей) математики, стал XVII век – век появления математического анализа. К концу XVII в. И. *Ньютоном*, Г. *Лейбницем* и их предшественниками был создан аппарат нового *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*, составляющий основу математического анализа и даже, пожалуй, математическую основу всего современного естествознания.

Математический анализ – это обширная область математики с характерным объектом изучения (переменной величиной), своеобразным методом исследования (анализом посредством бесконечно малых или посредством предельных переходов), определенной системой основных понятий (*функция*, *предел*, производная, дифференциал, интеграл, *ряд*) и постоянно совершенствующимся и развивающимся аппаратом, основу которого составляют дифференциальное и интегральное исчисления.

Попробуем дать представление о том, какая математическая революция произошла в XVII в., чем характеризуется связанный с рождением математического анализа переход от элементарной математики к той, что ныне составляет предмет исследований математического анализа и чем объясняется его фундаментальная роль во всей современной системе теоретических и прикладных знаний.

«Математический анализ не менее всеобъемлющ, чем сама природа; он определяет все ощутимые взаимосвязи, измеряет времена, пространства, силы, температуры».

Ж. Фурье

Представьте себе, что перед вами прекрасно выполненная цветная фотография набегающей на берег штормовой океанской волны: могучая сутуловатая спина, крутая, но чуть впалая грудь, уже наклоненная вперед и готовая упасть голова с терзаемой ветром седой гривой. Вы остановили мгновение, вам удалось поймать волну, и вы можете теперь без спешки внимательно изучать ее во всех подробностях. Волну можно измерить, и, пользуясь средствами элементарной математики, вы сделаете много важных выводов об этой волне, а значит, и всех ее океанских сестрах. Но, остановив волну, вы лишили ее движения и жизни. Ее зарождение, развитие, бег, сила, с которой она обрушивается на берег, – все это оказалось вне вашего поля зрения, потому что вы не располагаете пока ни языком, ни математическим аппаратом, пригодными для описания и изучения не статических, а развивающихся, динамических процессов, переменных величин и их взаимосвязей.

Движение, переменные величины и их взаимосвязи окружают нас повсюду. Различные виды движения и их закономерности составляют основной объект изучения конкретных наук: физики, геологии, биологии, социологии и др. Поэтому точный язык и соответствующие математические методы описания и изучения переменных величин оказались необходимыми во всех областях знания примерно в той же степени, в какой числа и арифметика необходимы при описании количественных соотношений. Так вот, математический анализ и составляет основу языка и математических методов описания переменных величин и их взаимосвязей. В наши дни без математического анализа невозможно не только рассчитать космические траектории, работу



ядерных реакторов, бег океанской волны и закономерности развития циклона, но и экономично управлять производством, распределением ресурсов, организацией технологических процессов, прогнозировать течение химических реакций или изменение численности различных взаимосвязанных в природе видов животных и растений, потому что все это – динамические процессы.

Элементарная математика была в основном математикой постоянных величин, она изучала главным образом соотношения между элементами геометрических фигур, арифметические свойства чисел и алгебраические уравнения. Ее отношение к действительности в какой-то мере можно сравнить с внимательным, даже тщательным и полным изучением каждого фиксированного кадра киноленты, запечатлевшей изменчивый, развивающийся живой мир в его движении, которого, однако, не видно на отдельном кадре и которое можно наблюдать, только посмотрев ленту в целом. Но как кино немыслимо без фотографии, так и современная математика невозможна без той ее части, которую мы условно называем элементарной, без идей и достижений многих выдающихся ученых, разделенных порой десятками столетий.

Математика едина, и «высшая» ее часть связана с «элементарной» примерно так же, как следующий этаж строящегося дома связан с предшествующим, и ширина горизонтов, которые математика открывает нам в окружающий мир, зависит от того, на какой этаж этого здания нам удалось подняться. Родившийся в XVII в. математический анализ открыл нам возможности для научного описания, количественного и качественного изучения переменных величин и движения в широком смысле этого слова.

Каковы же предпосылки появления математического анализа?

К концу XVII в. сложилась следующая ситуация. Во-первых, в рамках самой математи-



ки за долгие годы накопились некоторые важные классы однотипных задач (например, задачи измерения площадей и объемов нестандартных фигур, задачи проведения касательных к кривым) и появились методы их решения в различных частных случаях. Во-вторых, оказалось, что эти задачи теснейшим образом связаны с задачами описания произвольного (не обязательно равномерного) механического движения, и в частности с вычислением его мгновенных характеристик (скорости, ускорения в любой момент времени), а также с нахождением величины пройденного пути для движения, происходящего с заданной переменной скоростью. Решение этих проблем было необходимо для развития физики, астрономии, техники.

Наконец, в-третьих, к середине XVII в. трудами Р. Декарта и П. Ферма были заложены основы аналитического метода координат

НИКОЛАЙ НИКОЛАЕВИЧ ЛУЗИН (1883–1950)



Н. Н. Лузин – советский математик, основоположник советской школы теории функций, академик (1929).

Лузин родился в Томске, учился в томской гимназии. Формализм гимназического курса математики оттолкнул от себя талантливого юношу, и лишь способный репетитор смог раскрыть перед ним красоту и величие математической науки.

В 1901 г. Лузин поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. С первых лет обучения в круг его интересов попали вопросы, связанные с бесконечностью. В конце XIX в. немецкий ученый Г. Кантор создал общую теорию бесконечных множеств, получившую многочисленные применения в исследовании разрывных функций. Лузин начал изучать эту теорию, но его занятия были прерваны в 1905 г. Студенту, принимавшему участие в революционной деятельности, пришлось на время уехать во Францию. Там он слушал лекции виднейших французских математиков того времени. По возвращении в Россию Лузин окончил университет и был оставлен для подготовки к профессорскому званию. Вскоре он вновь уехал в Париж, а затем в Геттинген, где сблизился со многими учеными и написал первые научные работы. Основной проблемой, интересовавшей ученого, был вопрос о том, могут ли существовать множества, содержащие больше элементов, чем множество натуральных чисел, но меньше, чем множество точек отрезка (проблема континуума).

Для любого бесконечного множества, которое можно было получить из отрезков с помощью операций объединения и пересечения счетных совокупностей множеств, эта гипотеза выполнялась, и, чтобы решить проблему, нужно было выяснить, какие еще есть способы конструирования множеств. Одновременно Лузин изучал вопрос, можно ли представить любую периодическую функцию, даже имеющую бесконечно много точек разрыва, в виде суммы тригонометрического ряда, т. е. суммы бесконечного множества гармонических колебаний. По этим вопросам Лузин получил ряд значительных результатов и в 1915 г. защитил диссертацию «Интеграл и тригонометрический ряд», за которую ему сразу присудили ученую степень доктора чистой математики, минуя существовавшую в то время промежуточную степень магистра.

В 1917 г. Лузин стал профессором Московского университета. Талантливый преподаватель, он привлекал к себе наиболее способных студентов и молодых математиков. Своего расцвета школа Лузина достигла в первые послереволюционные годы. Ученики Лузина образовали творческий коллектив, который шутливо называли «лузитанией». Многие из них получили первоклассные научные результаты еще на студенческой скамье. Например, П. С. *Александров* и М. Я. Суслин (1894–1919) открыли новый метод конструирования множеств, что послужило началом развития нового направления – дескриптивной теории множеств. Исследования в этой области, проводившиеся Лузиным и его учениками, показали, что обычных методов теории множеств недостаточно для решения многих возникавших в ней проблем. Научные предвидения Лузина полностью подтвердились в 60-е гг. XX в. Многие ученики Н. Н. Лузина стали впоследствии академиками и членами-корреспондентами АН СССР. Среди них *П. С. Александров*, *А. Н. Колмогоров*, М. А. *Лаврентьев*, Л. А. Люстерник, Д. Е. Меньшов, П. С. Новиков, Л. Г. Шнирельман и другие.

Современные советские и зарубежные математики в своих работах развивают идеи Н. Н. Лузина.

(так называемой аналитической геометрии), позволившие сформулировать разнородные по своему происхождению геометрические и физические задачи на общем (аналитическом) языке чисел и числовых зависимостей, или, как мы теперь говорим, числовых функций.

Стечение этих обстоятельств и привело к тому, что в конце XVII в. двум ученым – И. Ньютону и Г. Лейбницу – независимо друг от друга удалось создать для решения названных задач математический аппарат, подытоживший и обобщивший отдельные результаты предшественников, среди которых и ученый древности Архимед и современники Ньютона и Лейбница – Б. Кавальери, Б. Паскаль, Д. Грегори, И. Барроу. Этот аппарат и составил основу математического анализа – нового раздела математики, изучающего различные развивающиеся процессы, т.е. взаимосвязи переменных величин, которые в математике называют функциональными зависимостями или, иначе, *функциями*. Кстати, сам термин «функция» потребовался и естественно возник именно в XVII в., а к настоящему времени он приобрел не только общематематическое, но и общенаучное значение.

Начальные сведения об основных понятиях и математическом аппарате анализа даны в статьях *«Дифференциальное исчисление»* и *«Интегральное исчисление»*.

В заключение хотелось бы остановиться только на одном общем для всей математики и характерном для анализа принципе математического абстрагирования и в этой связи объяснить, в каком виде математический анализ изучает переменные величины и в чем секрет такой универсальности его методов для изучения всевозможных конкретных развивающихся процессов и их взаимосвязей.

Рассмотрим несколько поясняющих примеров и аналогий.

Мы порой уже не отдаем себе отчета в том, что, например, математическое соотношение $2+2=4$, написанное не для яблок, стульев или слонов, а в отвлеченном от конкретных объектов абстрактном виде,– выдающееся научное завоевание. Это математический закон, который, как показывает опыт, применим к различным конкретным объектам. Значит, изучая в математике общие свойства отвлеченных, абстрактных чисел, мы тем самым изучаем количественные соотношения реального мира.

Например, из школьного курса математики известно, что $12=6+6=4+4+4$, поэтому в конкретной ситуации вы могли бы сказать: «Если мне для перевозки 12 т грунта не выделят два шеститонных самосвала, то можно запросить три четырехтонки и работа будет выполнена, а если дадут только одну четырехтонку, то ей придется сделать три рейса». Так привычные теперь для нас отвлеченные числа и числовые закономерности связаны с их конкретными проявлениями и приложениями.

Примерно так же связаны законы изменения конкретных переменных величин и развивающихся процессов природы с той абстрактной, отвлеченной формой – функцией, в которой они появляются и изучаются в математическом анализе.

Например, абстрактное соотношение $y=20x$ может быть отражением зависимости кассового сбора y кинотеатра от количества x проданных билетов, если 20 – это 20 копеек – цена одного билета. Но если мы едем по шоссе на велосипеде, проезжая 20 км в час, то это же соотношение можно истолковать как взаимосвязь времени x (часов) нашей велосипедной прогулки и покрытого за это время расстояния y (километров).

Вообще зависимость $y=kx$, где k – некоторый числовой коэффициент, встречается очень часто. В математике ее называют прямой пропорциональной зависимостью переменной величины y от переменной величины x или говорят также, что y – *линейная функция* от x. Какова бы ни была конкретная природа переменных величин x и y, связанных соотношением $y=kx$, вы всегда можете утверждать, что, например, изменение x в несколько раз приводит к пропорциональному (т.е. во столько же раз) изменению величины y, а если $k \neq 0$, то верно и обратное заключение. Значит, в частности, для увеличения кассового сбора кинотеатра в два раза вам придется привлечь вдвое больше зрителей, а для того, чтобы на велосипеде с той же скоростью проехать вдвое большее расстояние, вам придется ехать вдвое дольше.

Математика изучает и простейшую зависимость $y=kx$, и другие, значительно более сложные зависимости в отвлеченном от частной интерпретации, общем, абстрактном виде. Выявленные в таком исследовании свойства функции или методы изучения этих свойств будут носить характер общих математических приемов, заключений, законов и выводов, применимых к каждому конкретному явлению, в котором встречается изученная в абстрактном виде функция, независимо от того, к какой области знания это явление относится.

Итак, математический анализ как раздел математики оформился в конце XVII в. Предметом изучения в математическом анализе (как он представляется с современных позиций) являются функции, или, иначе, зависимости между переменными величинами.

С возникновением математического анализа математике стало доступно изучение и отражение развивающихся процессов реального мира; в математику вошли переменные величины и движение.

АРИФМЕТИКА

С арифметики, науки о числе, начинается наше знакомство с математикой. Один из первых русских учебников арифметики, написанный Л. Ф. Магницким в 1703 г., начинался словами: «Арифметика или числительница, есть художество честное, независтное, и всем удобнопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное». С арифметикой мы входим, как говорил М. В. Ломоносов, во «врата учености» и начинаем наш долгий и нелегкий, но увлекательный путь познания мира.

Слово «арифметика» происходит от греческого *arithmos*, что значит «число». Эта наука изучает действия над числами, различные правила обращения с ними, учит решать задачи, сводящиеся к сложению, вычитанию, умножению и делению чисел. Часто представляют себе арифметику как некоторую первую ступень математики, основываясь на которой можно изучать более сложные ее разделы – *алгебру*, *анализ математический* и т. д. Даже целые числа – основной объект арифметики – относят, когда рассматривают их общие свойства и закономерности, к высшей арифметике, или теории чисел. Такой взгляд на арифметику, конечно, имеет основания – она действительно остается «азбукой счета», но азбукой «многополезнейшей» и «удобнопонятной».

Арифметика и геометрия – давние спутники человека. Эти науки появились тогда, когда возникла необходимость считать предметы, измерять земельные участки, делить добычу, вести счет времени.

Арифметика возникла в странах Древнего Востока: Вавилоне, Китае, Индии, Египте. Например, египетский папирус Ринда (названный по имени его владельца Г. Ринда) относится к XX в. до н. э. Среди прочих сведений он содержит разложения дроби на сумму дробей с числителем, равным единице, например:

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}.$$

Накопленные в странах Древнего Востока сокровища математических знаний были развиты и продолжены учеными Древней Греции. Много имен ученых, занимавшихся арифметикой в античном мире, сохранила нам история — Анаксагор и Зенон, Евклид (см. *Евклид и его «Начала»*), *Архимед,* Эратосфен и Диофант. Яркой звездой сверкает здесь имя *Пифагора* (VI в. до н. э.). Пифагорейцы (ученики и последователи Пифагора) преклонялись перед числами, считая, что в них заключена вся гармония мира. Отдельным числам и парам чисел приписывались особые свойства. В большом почете были числа 7 и 36, тогда же было обращено внимание на так называемые *совершенные числа*, дружественные числа и т. п.

В средние века развитие арифметики также связано с Востоком: Индией, странами арабского мира и Средней Азии. От индийцев пришли к нам цифры, которыми мы пользуемся, *нуль* и позиционная *система счисления*; от аль-Каши (XV в.), работавшего в Самаркандской обсерватории Улугбека,– десятичные дроби.

Благодаря развитию торговли и влиянию восточной культуры начиная с XIII в. повышается интерес к арифметике и в Европе. Следует вспомнить имя итальянского ученого Леонардо Пизанского (Фибоначчи), сочинение которого «Книга абака» знакомило европейцев с основными достижениями математики Востока и явилось началом многих исследований в арифметике и алгебре.

Вместе с изобретением книгопечатания (середина XV в.) появились первые печатные математические книги. Первая печатная книга по арифметике была издана в Италии в 1478 г. В «Полной арифметике» немецкого математика М. Штифеля (начало XVI в.) уже есть отрицательные числа и даже идея логарифмирования.

Примерно с XVI в. развитие чисто арифметических вопросов влилось в русло алгебры – в качестве значительной вехи можно отметить появление работ ученого из Франции Ф. Виета, в которых числа обозначены буквами. Начиная с этого времени основные арифметические правила осознаются уже окончательно с позиций алгебры.

Основной объект арифметики – *число.* Натуральные числа, т. е. числа 1, 2, 3, 4, ... и т. д., возникли из счета конкретных предметов. Прошло много тысячелетий, прежде чем человек усвоил, что два фазана, две руки, два человека и т. д. можно назвать одним и тем же словом «два». Важная задача арифметики – научиться преодолевать конкретный смысл названий считаемых предметов, отвлекаться от их формы, размера, цвета и т. п. Уже у Фибоначчи есть задача: «Семь старух идут в Рим. У каждой по 7 мулов, каждый мул несет по 7 мешков, в каждом мешке по 7 хлебов, в каждом хлебе по 7 ножей, каждый нож в 7 ножнах. Сколько всех?» Для решения задачи придется складывать вместе и старух, и мулов, и мешки, и хлеба.

Развитие понятия числа – появление нуля и отрицательных чисел, обыкновенных и десятичных дробей, способы записи чисел (цифры,

«Под наукой чисел понимаются две науки: практическая и теоретическая. Практическая изучает числа постольку, поскольку речь идет о числах считаемых Эту науку применяют в рыночных и гражданских делах. Теоретическая наука чисел изучает числа в абсолютном смысле, отвлеченные разумом от тел и всего, что поддается в них счету».

аль-Фараби



обозначения, *системы счисления*) – все это имеет богатую и интересную историю.

В арифметике числа складывают, вычитают, умножают и делят. Искусство быстро и безошибочно производить эти действия над любыми числами долгое время считалось важнейшей задачей арифметики. Сейчас в уме или на листке бумаги мы делаем лишь самые простые вычисления, все чаще и чаще поручая более сложную вычислительную работу микрокалькуляторам, которые постепенно приходят на смену таким устройствам, как счеты, арифмометр (см. *Вычислительная техника*), логарифмическая линейка. Однако в основе работы всех вычислительных машин — простых и сложных – лежит самая простая операция – сложение натуральных чисел. Оказывается, самые сложные расчеты можно свести к сложению, только делать эту опера-

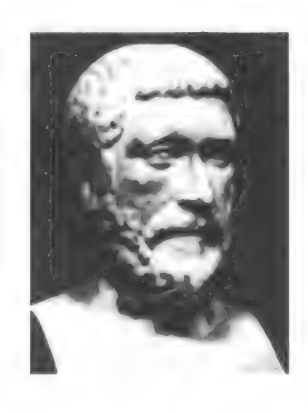
цию надо многие миллионы раз. Но здесь мы вторгаемся в другую область математики, которая берет начало в арифметике,– вычислительную математику.

Арифметические действия над числами имеют самые различные свойства. Эти свойства можно описать словами, например: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется», можно записать буквами: $a + b = b + a$, можно выразить специальными терминами.

Например, указанное свойство сложения называют переместительным или коммутативным законом. Мы применяем законы арифметики часто по привычке, не осознавая этого. Часто ученики в школе спрашивают: «Зачем учить все эти переместительные и сочетательные законы, ведь и так ясно, как складывать и умножать числа?» В XIX в. математика сделала важный шаг – она стала систематически складывать и умножать не только числа, но также *векторы*, *функции*, перемещения, таблицы чисел, *матрицы* и многое другое и даже просто буквы, символы, не очень заботясь об их конкретном смысле. И вот здесь оказалось, что самым важным является то, каким законам подчиняются эти операции. Изучение операций, заданных над произвольными объектами (не обязательно над числами),– это уже область алгебры, хотя эта задача основана на арифметике и ее законах.

Арифметика содержит много правил решения задач. В старых книгах можно встретить задачи на «тройное правило», на «пропорциональное деление», на «метод весов», на «фальшивое правило» и т. п. Большинство этих правил сейчас устарело, хотя задачи, которые решались с их помощью, никак нельзя счи-

ПИФАГОР
(ок. 570 – ок. 500 гг. до н. э.)



Письменных документов о Пифагоре Самосском не осталось, а по более поздним свидетельствам трудно восстановить подлинную картину его жизни и достижений. Известно, что Пифагор покинул свой родной остров Самос в Эгейском море у берегов Малой Азии в знак протеста против тирании правителя и уже в зрелом возрасте (по преданию в 40 лет) появился в греческом городе Кротоне на юге Италии. Пифагор и его последователи – пифагорейцы – образовали тайный союз, игравший немалую роль в жизни греческих колоний в Италии. Пифагорейцы узнавали друг друга по звездчатому пятиугольнику – пентаграмме.

На учение Пифагора большое влияние оказала философия и религия Востока. Он много путешествовал по странам Востока: был в Египте и в Вавилоне. Там Пифагор познакомился и с восточной математикой. Математика стала частью его учения, и важнейшей частью.

Пифагорейцы верили, что в числовых закономерностях спрятана тайна мира. Мир чисел жил для пифагорейца особой жизнью, числа имели свой особый жизненный смысл. Числа, равные сумме своих делителей, воспринимались как *совершенные* (6, 28, 496, 8128); дружественными называли пары чисел, из которых каждое равнялось сумме делителей другого (например, 220 и 284). Пифагор впервые разделил числа на четные и нечетные, простые и составные, ввел понятие *фигурного числа*. В его школе были подробно рассмотрены пифагоровы тройки натуральных чисел, у которых квадрат одного равнялся сумме квадратов двух других (см. *Ферма великая теорема*).

Пифагору приписывается высказывание: «Все есть число». К числам (а он имел в виду лишь натуральные числа) он хотел свести весь мир, и математику в частности. Но в самой школе Пифагора было сделано открытие, нарушавшее эту гармонию. Было доказано, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом, т. е. не выражается через натуральные числа.

Естественно, что геометрия у Пифагора была подчинена *арифметике*, это ярко проявилось в теореме, носящей его имя и ставшей в дальнейшем основой применения численных методов в геометрии. (Позже Евклид вновь вывел на первое место геометрию, подчинив ей алгебру.) По-видимому, пифагорейцы знали правильные тела: тетраэдр, куб и додекаэдр.

Пифагору приписывают систематическое введение *доказательств* в геометрию, создание планиметрии прямолинейных фигур, учения о подобии.

С именем Пифагора связывают учение об арифметических, геометрических и гармонических пропорциях, *средних*.

Следует заметить, что Пифагор считал Землю шаром, движущимся вокруг Солнца. Когда в XVI в. церковь начала ожесточенно преследовать учение Коперника, это учение упорно именовалось пифагорейским.

тать устаревшими. Знаменитая задача про бассейн, который наполняется несколькими трубами, имеет возраст не менее двух тысяч лет, и до сих пор она не легка для школьников. Но если раньше для решения этой задачи нужно было знать специальное правило, то в наши дни уже младших школьников обучают решать такую задачу, вводя буквенное обозначение x искомой величины. Таким образом, арифметические задачи привели к необходимости решать *уравнения*, а это уже снова задача алгебры.

АРХИМЕД
(ок. 287–212 гг. до н.э.)



Об Архимеде – великом математике и механике – известно больше, чем о других ученых древности. Прежде всего достоверен год его смерти – год падения Сиракуз, когда ученый погиб от руки римского солдата. Впрочем, историки древности Полибий, Ливий, Плутарх мало рассказывали о его математических заслугах, от них до наших времен дошли сведения о чудесных изобретениях ученого, сделанных во время службы у царя Гиерона II. Известна история о золотом венце царя. Чистоту его состава Архимед проверил при помощи найденного им закона выталкивающей силы, и его возгласе «Эврика!», т.е. «Нашел!». Другая легенда рассказывает, что Архимед соорудил систему блоков, с помощью которой один человек смог спустить на воду огромный корабль «Сиракосия». Крылатыми стали произнесенные тогда слова Архимеда: «Дайте мне точку опоры, и я поверну Землю».

Инженерный гений Архимеда с особой силой проявился при осаде Сиракуз, богатого торгового города на острове Сицилия.

Воины римского консула Марцелла были надолго задержаны у стен города невиданными машинами: мощные катапульты прицельно стреляли каменными глыбами, в бойницах были установлены метательные машины, выбрасывающие грады ядер, береговые краны поворачивались за пределы стен и забрасывали корабли противника каменными и свинцовыми глыбами, крючья подхватывали корабли и бросали их вниз с большой высоты, системы вогнутых зеркал (в некоторых рассказах – щитов) поджигали корабли. В «Истории Марцелла» Плутарх описывает ужас, царивший в рядах римских воинов: «Как только они замечали, что из-за крепостной стены показывается веревка или бревно, они обращались в бегство с криком, что вот Архимед еще выдумал новую машину на их погибель».

Огромен вклад Архимеда и в развитие математики. Спираль Архимеда (см. *Спирали*), описываемая точкой, двигающейся по вращающемуся кругу, стояла особняком среди многочисленных кривых, известных его современникам. Следующая кинематически определенная кривая – *циклоида* – появилась только в XVII в. Архимед научился находить *касательную* к своей спирали (а его предшественники умели проводить касательные только к *коническим сечениям*), нашел площадь ее витка, а также площадь эллипса, поверхности конуса и шара, объемы шара и сферического сегмента. Особенно он гордился открытым им соотношением объема шара и описанного вокруг него цилиндра, которое равно 2:3 (см. *Вписанные и описанные фигуры*).

Архимед много занимался и проблемой квадратуры круга (см. *Знаменитые задачи древности*). Ученый вычислил отношение длины окружности к диаметру (число π) и нашел, что оно заключено между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$. Созданный им метод вычисления длины окружности и площади фигуры был существенным шагом к созданию дифференциального и интегрального исчислений, появившихся лишь 2000 лет спустя.

Архимед нашел также сумму бесконечной *геометрической прогрессии* со знаменателем 1/4. В математике это был первый пример бесконечного *ряда*.

Большую роль в развитии математики сыграло его сочинение «Псаммит» – «О числе песчинок», в котором он показывает, как с помощью существовавшей системы счисления можно выражать сколь угодно большие числа. В качестве повода для своих рассуждений он использует задачу о подсчете количества песчинок внутри видимой Вселенной. Тем самым было опровергнуто существовавшее тогда мнение о наличии таинственных «самых больших чисел».

Среди важных понятий, которые ввела арифметика, надо отметить *пропорции* и *проценты*. Большинство понятий и методов арифметики основано на сравнении различных зависимостей между числами. В истории математики процесс слияния арифметики и геометрии происходил на протяжении многих веков.

Можно отчетливо проследить «геометризацию» арифметики: сложные правила и закономерности, выраженные формулами, становятся понятнее, если удается изобразить их геометрически. Большую роль в самой математике и ее приложениях играет обратный процесс – перевод зрительной, геометрической информации на язык чисел (см. *Графические вычисления*). В основе этого перевода лежит идея французского философа и математика Р. Декарта об определении точек на плоскости *координатами*. Разумеется, и до него эта идея уже использовалась, например в морском деле, когда нужно было определить местонахождение корабля, а также в астрономии, геодезии. Но именно от Декарта и его учеников идет последовательное применение языка координат в математике. И в наше время при управлении сложными процессами (например, полетом космического аппарата) предпочитают иметь всю информацию в виде чисел, которые и обрабатывает вычислительная машина. При необходимости машина помогает человеку перевести на язык рисунка накопленную числовую информацию.

Вы видите, что, говоря об арифметике, мы все время выходим за ее пределы – в алгебру, геометрию, другие разделы математики.

Как же очертить границы самой арифметики?

В каком смысле употребляется это слово?

Под словом «арифметика» можно понимать:

учебный предмет, занимающийся преимущественно рациональными числами (целыми числами и дробями), действиями над ними и задачами, решаемыми с помощью этих действий;

часть исторического здания математики, накопившую различные сведения о вычислениях;

«теоретическую арифметику» – часть современной математики, занимающуюся конструированием различных числовых систем (натуральные, целые, рациональные, действительные, комплексные числа и их обобщения);

«формальную арифметику» – часть математической логики (см. *Логика математическая*), занимающуюся анализом аксиоматической теории арифметики;

«высшую арифметику», или теорию чисел, самостоятельно развивающуюся часть математики.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Арифметической прогрессией называют последовательность (a_n), у которой каждый член, начиная со второго, больше (или меньше) предыдущего на постоянное (для данной прогрессии) число d. Число d называют разностью арифметической прогрессии. Другими словами, арифметическая прогрессия – это последовательность, заданная по правилу: a_1 и d даны, $a_{n+1} = a_n + d$ при $n \geqslant 1$.

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому последующего и предыдущего членов:

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Это отражено в названии последовательности: арифметическая прогрессия. Верно и более общее свойство:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant k.$$

Справедливы следующие формулы (через S_n обозначена сумма первых n членов арифметической прогрессии):

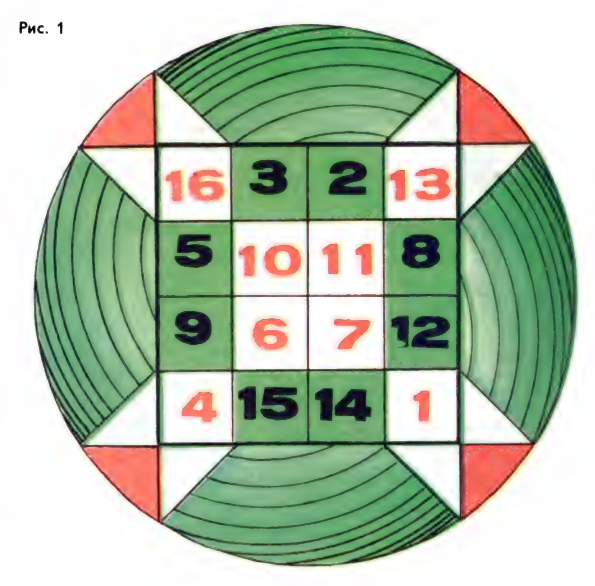
$$a_n = a_1 + (n-1)\,d, \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2} \cdot n, \qquad (2)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n. \qquad (3)$$

С формулой (3) связан интересный эпизод из жизни немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777–1855). Когда ему было 9 лет, учитель, занятый проверкой работ учеников других классов, задал на уроке следующую задачу: «Сосчитать сумму всех натуральных чисел от

Рис. 1



1 до 40 включительно:

$1+2+3+4+5+\ldots+40$».

Каково же было удивление учителя, когда один из учеников (это был Гаусс) через минуту воскликнул: «Я уже решил». Большинство учеников после долгих подсчетов получили неверный результат. В тетради Гаусса было только одно число, но зато верное.

Вот схема его рассуждений. Сумма чисел в каждой паре равна 41:

$$\begin{array}{r} 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 20 \\ +\ 40,\ 39,\ 38,\ \ldots,\ 21 \\ \hline 41,\ 41,\ 41,\ \ldots\ 41. \end{array}$$

Таких пар 20, поэтому искомая сумма равна $41\cdot 20=820$.

Арифметические прогрессии и их свойства изучались математиками с древних времен. Греческих математиков интересовала связь прогрессий с так называемыми многоугольными числами (см. *Фигурные числа*), вычислением площадей, объемов, красивыми числовыми соотношениями типа:

$$\begin{array}{rr} 1=1^2 & 1=1^3 \\ 1+3=2^2 & 3+5=2^3 \\ 1+3+5=3^2 & 7+9+11=3^3 \\ 1+3+5+7=4^2 & 13+15+17+19=4^3 \end{array}$$

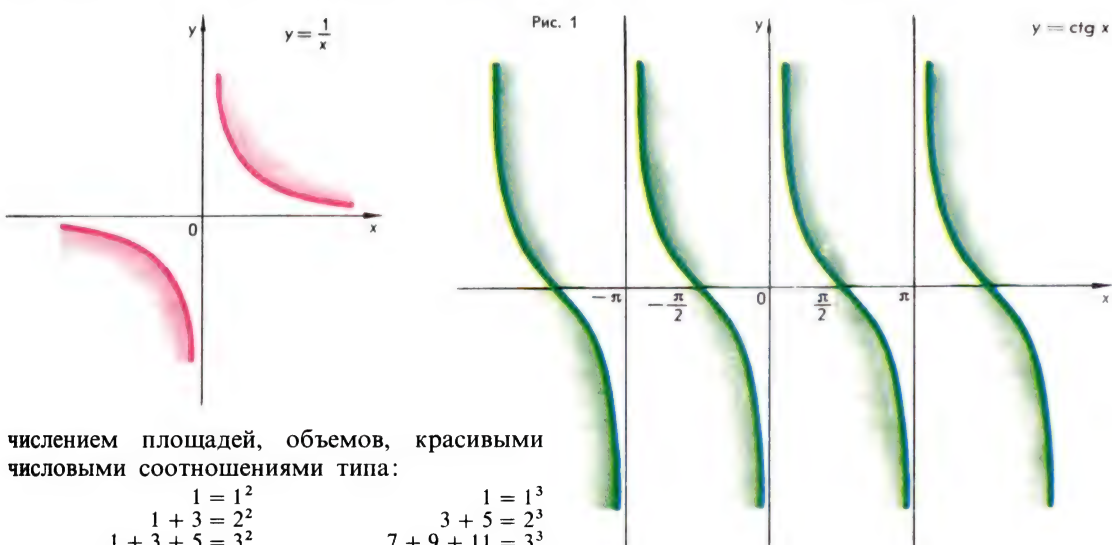
Большой популярностью даже в наши дни пользуются магические квадраты (см. *Магические и латинские квадраты*). Это квадраты, в каждую клетку которых вписаны числа так, что суммы чисел вдоль любой горизонтали, любой вертикали и любой диагонали равны (рис. 1). Такой магический квадрат изображен на гравюре немецкого художника А. Дюрера «Меланхолия».

АСИМПТОТА

Асимптота кривой – это прямая, к которой кривая приближается сколь угодно близко при удалении в бесконечность. Представьте себе мчащийся по прямолинейному шоссе автомобиль и всадника, скачущего по полю с той же скоростью, но направленной в каждый момент на автомобиль. Маршрут всадника в этом случае будет кривой линией, называемой *трактрисой*, для которой линия шоссе является асимптотой. Если кривая, заданная уравнением $y=f(x)$, удаляется в бесконечность при приближении x к конечной точке a, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой этой кривой. Такими асимптотами являются прямая $x=0$ для гиперболы $y=1/x$, каждая из прямых $x=k\pi$ ($k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$) для функции $y=\operatorname{ctg} x$ (рис. 1).

Помимо вертикальной асимптоты $x=0$ гипербола $y=1/x$ имеет еще и горизонтальную асимптоту $y=0$, как и график функции $y=e^{-x}\sin x$, однако он, в отличие от гиперболы, пересекает свою горизонтальную асимптоту в бесконечном множестве точек (рис. 2).

У кривой, носящей название «декартов лист» (рис. 3), уравнение которой $x^3+y^3-3axy=0$, имеется наклонная асимптота, как и у кривой $y=x+1/x^2$ (рис. 4). Коэффи-



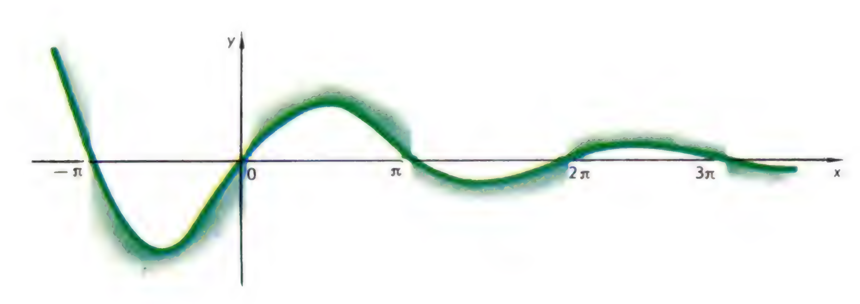
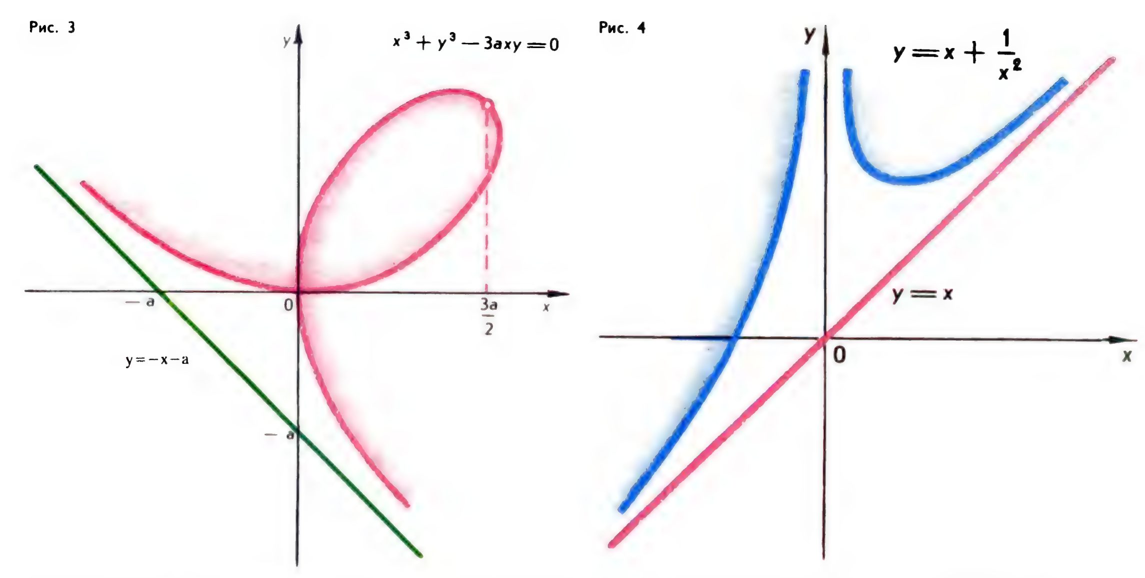


Рис. 2



циенты k и b в уравнении прямой $y = kx + b$, являющейся наклонной асимптотой кривой $y = f(x)$ при стремлении к плюс или минус бесконечности, находятся как пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной при $k = 0$.

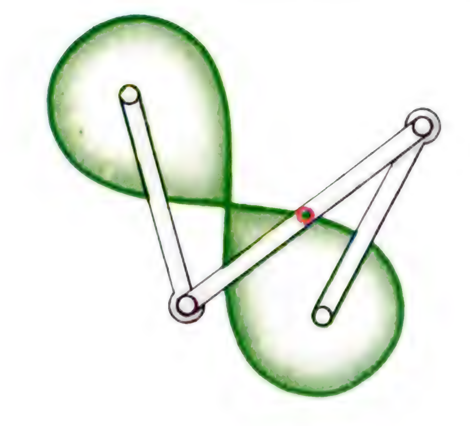
Исследование асимптот позволяет более четко представить поведение графика функции, поскольку свойства функции вблизи ее асимптоты очень близки к свойствам асимптоты – линейной функции, свойства которой хорошо изучены. Систематическое использование этого свойства породило целое направление в современной математике – «асимптотические методы исследования». Таким образом, понятие, возникшее еще в Древней Греции, переживает в наше время второе рождение.

Не у всякой кривой, уходящей в бесконечность, есть асимптота. Например, известная вам кривая *парабола* асимптот не имеет.

БЕРНУЛЛИ ЛЕМНИСКАТА

Лемниската – кривая, у которой произведение расстояний каждой ее точки до двух заданных точек-фокусов – постоянно и равно квадрату половины расстояния между ними. Эта линия изображена на рисунках, по форме напоминает восьмерку. Ее автор – швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705) дал этой кривой поэтическое название «лемниската». В античном Риме так называли бантик, с помощью которого прикрепляли венок к голове победителя на спортивных играх.

Уравнение лемнискаты в прямоугольных координатах: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$, уравнение в полярных координатах: $\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.



В

ВЕКТОР

Вектор – одно из основных геометрических понятий. Вектор характеризуется числом (длиной) и направлением. Наглядно его можно представить себе в виде направленного отрезка, хотя, говоря о векторе, правильнее иметь в виду целый класс направленных отрезков, которые все параллельны между собой, имеют одинаковую длину и одинаковое направление (рис. 1). Примерами физических величин, которые имеют векторный характер, могут служить скорость (поступательно движущегося тела), ускорение, сила и др.

Понятие вектора появилось в работах немецкого математика XIX в. Г. Грассмана

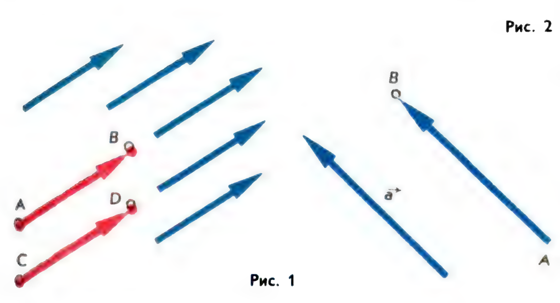


Рис. 2

Рис. 1

и ирландского математика У. Гамильтона; затем оно было охотно воспринято многими математиками и физиками. В современной математике и ее приложениях это понятие играет важнейшую роль. Векторы применяются в классической механике Галилея – Ньютона (в ее современном изложении), в теории относительности, квантовой физике, в математической экономике и многих других разделах естествознания, не говоря уже о применении векторов в различных областях математики.

Каждый из направленных отрезков, составляющих вектор (рис. 1), можно назвать представителем этого вектора. Вектор, представителем которого является направленный отрезок, идущий от точки A к точке B, обозначается через $\overrightarrow{AB}$. На рис. 1 имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, т.е. $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ – это один и тот же вектор (представителями которого являются оба направленных отрезка, выделенных на рис. 1). Иногда вектор обозначают малой буквой со стрелкой: $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Вектор, изображаемый направленным «отрезком», у которого начало и конец совпадают, называется нулевым; он обозначается через $\vec{0}$, т.е. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Два параллельных вектора, имеющих одинаковые длины, но противоположные направления, называются противоположными. Если вектор обозначен через $\vec{a}$, то противоположный ему вектор обозначается через $-\vec{a}$.

Назовем основные операции, связанные с векторами.

I. Откладывание вектора от точки. Пусть $\vec{a}$ – некоторый вектор и A – точка. Среди направленных отрезков, являющихся представителями вектора $\vec{a}$, имеется направленный отрезок, начинающийся в точке A. Конец B этого направленного отрезка называется точкой, получающейся в результате откладывания вектора $\vec{a}$ от точки A (рис. 2). Эта операция обладает следующим свойством:

I_1. Для любой точки A и любого вектора $\vec{a}$ существует, и притом только одна, точка B, для которой $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Сложение векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Возьмем произвольную точку A и отложим вектор $\vec{a}$ от точки A, т.е. найдем такую точку B, что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 3). Затем от точки B отложим вектор $\vec{b}$, т.е. найдем такую точку C, что $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается через $\vec{a} + \vec{b}$. Можно доказать, что сумма $\vec{a} + \vec{b}$ не зависит от выбора точки A, т.е. если заменить A другой точкой A_1, то получится вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$, равный $\overrightarrow{AC}$ (рис. 3). Из определения суммы векторов вытекает, что для любых трех точек A, B, C справедливо равенство

$I_2 : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(«правило трех точек»). Если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны, то их сумму удобно находить с помощью правила параллелограмма (рис. 4).

II. Основные свойства суммы векторов вы-

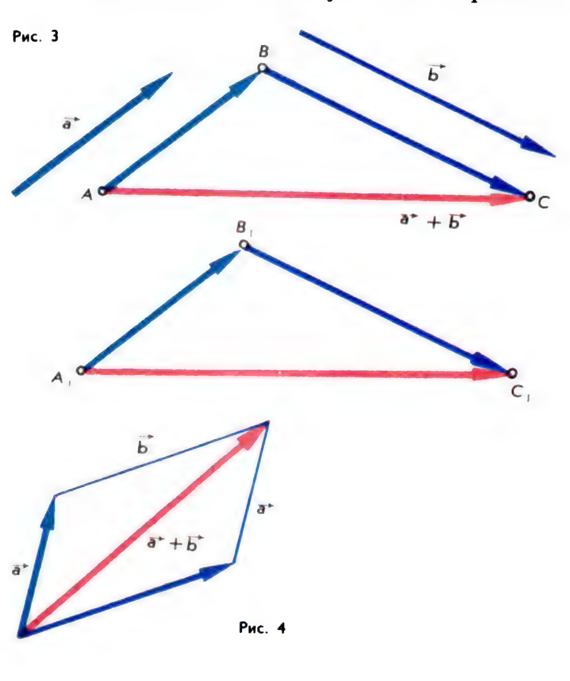


Рис. 3

Рис. 4

ражают следующие 4 равенства (справедливые для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$):

II$_1$. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

II$_2$. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$.

II$_3$. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

II$_4$. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Заметим еще, что сумма нескольких векторов находится последовательным нахождением суммы двух из них. Например: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})+\vec{d}$.

При этом, в каком бы порядке мы ни

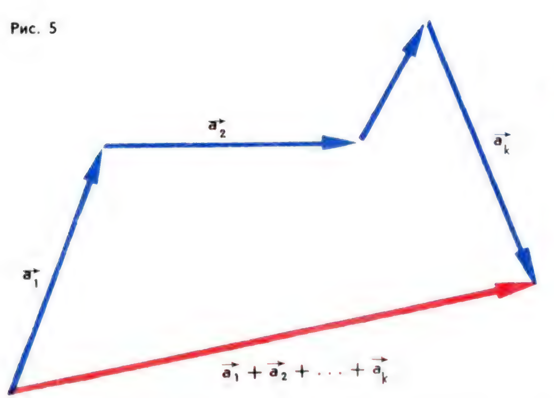


Рис. 5

складывали заданные векторы, результат (как это вытекает из свойств, названных в пунктах II$_1$ и II$_2$) всегда будет одним и тем же. Например:

$$\vec{a}+((\vec{b}+\vec{c})+\vec{d})=(\vec{d}+\vec{a})+(\vec{c}+\vec{b}).$$

Далее, геометрически сумма нескольких векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_k$ может быть получена следующим образом: надо направленные отрезки, являющиеся представителями этих векторов, последовательно отложить друг за другом (т. е. так, чтобы начало второго направленного отрезка совпадало с концом первого, начало третьего – с концом второго и т. д.); тогда вектор $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_k$ будет иметь своим представителем «замыкающий» направленный отрезок, идущий от начала первого к концу последнего (рис. 5). (Заметим, что если при таком последовательном откладывании получается «замкнутая векторная ломаная», то $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_k=0$.)

III. Умножение вектора на число. Пусть $\vec{a}$ – ненулевой вектор и k – отличное от нуля число. Через $k\vec{a}$ обозначается вектор, определяемый следующими двумя условиями: а) длина вектора $k\vec{a}$ равна $|k|\cdot|\vec{a}|$; б) вектор $k\vec{a}$ параллелен вектору $\vec{a}$, причем его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k>0$ и противоположно ему при $k<0$ (рис. 6). Если справедливо хотя бы одно из равенств $\vec{a}=\vec{0}$, $k=0$, то произведение $k\vec{a}$ считается равным $\vec{0}$. Таким образом, произведение $k\vec{a}$ определено для любого вектора $\vec{a}$ и любого числа k.

Следующие 4 равенства (справедливые для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел k, l) выражают основные свойства операции умножения вектора на число:

III$_1$. $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$.

III$_2$. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$.

III$_3$. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

III$_4$. $1\vec{a}=\vec{a}$.

Из этих свойств вытекает ряд дальнейших фактов, связанных с рассмотренными операциями над векторами. Отметим некоторые из них, часто применяемые при решении задач.

а) Если M – такая точка отрезка AB, что

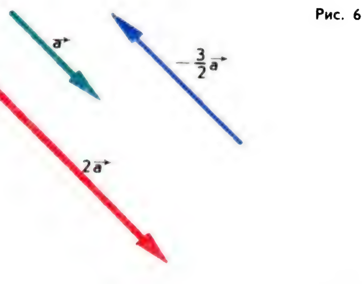


Рис. 6

$|AM|:|BM|=k$, то для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB})/(k+1)$, в частности если M – середина отрезка AB, то $\overrightarrow{OM}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})/2$.

б) Если M – точка пересечения медиан треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$; кроме того, для любой точки O справедливо равенство $\overrightarrow{OM}=1/3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})/3$ (обратные теоремы также справедливы).

в) Пусть M – точка прямой l и $\vec{a}$ – ненулевой вектор, параллельный этой прямой. Точка A в том и только в том случае принадлежит прямой l, если $\overrightarrow{MA}=k\vec{a}$ (где k – некоторое число).

г) Пусть M – точка плоскости α и $\vec{a}$, $\vec{b}$ – ненулевые и непараллельные между собой векторы, параллельные этой плоскости. Точка A в том и только в том случае принадлежит плоскости α, если вектор $\overrightarrow{MA}$ выражается через $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\overrightarrow{MA}=k\vec{a}+l\vec{b}$.

Наконец, отметим еще свойство размерности, выражающее тот факт, что пространство трехмерно.

IV. В пространстве существуют такие три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, что ни один из них не выражается через два других; любой четвертый вектор $\vec{p}$ выражается через эти три вектора: $\vec{p}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$.

Например, если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – три ненулевых вектора, направленных вдоль ребер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, то эти векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обладают свойством IV (рис. 7).

V. Скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{b})$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется равенством:

$$(\vec{a},\vec{b})=\begin{cases}|\vec{a}|\;|\vec{b}|\cos\varphi \text{ при } \vec{a}\neq 0 \text{ и } \vec{b}\neq 0\text{, где } \varphi \text{ – угол между векторами } \vec{a} \text{ и } \vec{b};\\ 0\text{, если хотя бы один из векторов } \vec{a}, \vec{b} \text{ равен } \vec{0}.\end{cases}$$

Следующие 4 соотношения (справедливые для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k) выражают основные свойства операции скалярного умножения векторов:

V_1. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

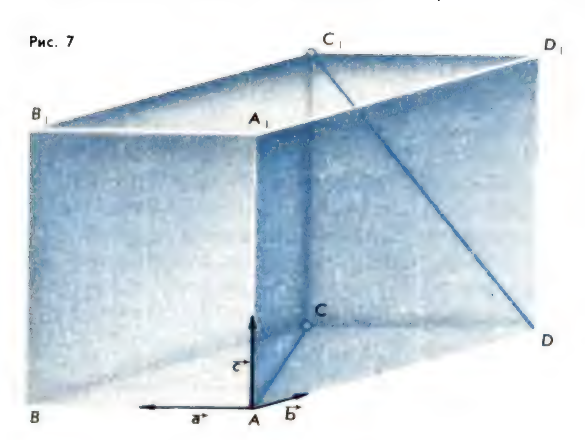
V_2. $(k\vec{a}, \vec{b}) = k(\vec{a}, \vec{b})$.

V_3. $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

V_4. Если $\vec{a} \neq 0$, то $\vec{a}^2 > 0$ (здесь через $\vec{a}^2$ обозначено скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на себя).

Заметим в связи со свойством V_4, что число

Рис. 7



$\vec{a}^2$ равно квадрату длины вектора $\vec{a}$, т.е. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Со скалярным произведением связано понятие ортогональности: два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Иначе говоря, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, то либо они оба ненулевые и образуют прямой угол, либо хотя бы один из этих векторов равен $\vec{0}$ (и тогда угол между ними не определяется).

Перечисленные выше свойства векторных операций во многом похожи на свойства сложения и умножения чисел. В то же время вектор – геометрический объект, и в определении векторных операций используются такие геометрические понятия, как длина и угол; этим и объясняется польза векторов для геометрии (и ее приложений к физике и другим областям знания). Однако для решения геометрических задач с помощью векторов необходимо прежде всего научиться «переводить» условие геометрической задачи на векторный «язык». После такого «перевода» осуществляются алгебраические вычисления с векторами, а затем полученное векторное решение снова «переводится» на геометрический «язык». В этом и состоит векторное решение геометрических задач.

При изложении курса геометрии в школе вектор дается как определяемое понятие (см. *Определение*), и потому принятая в школьном учебнике аксиоматика (см. *Аксиоматика и аксиоматический метод*) геометрии ничего не говорит о свойствах векторов, т.е. все эти свойства должны доказываться как теоремы. Существует, однако, и другой путь изложения геометрии, при котором первоначальными (неопределяемыми) понятиями считаются вектор и точка, а отмеченные выше свойства I_1, I_2, $II_1 - II_4$, $III_1 - III_4$, IV, $V_1 - V_4$ принимаются за аксиомы. Такой путь построения геометрии был предложен в 1917 г. немецким математиком Г. Вейлем. Здесь прямые и плоскости являются определяемыми понятиями. Преимущество такого построения в его краткости и в органической связи с современным пониманием геометрии как в самой математике, так и в других областях знания. В частности, аксиомы $II_1 - II_4$, $III_1 - III_4$ вводят так называемое векторное пространство, используемое в современной математике, в физике, математической экономике и т.д.

ВЕРОЯТНОСТЬ

Вероятность – числовая характеристика возможности появления случайного события в определенных условиях, которые могут быть воспроизведены неограниченное число раз.

В XVIII в. сложилось понятие классической вероятности. Согласно ему вероятность события A есть отношение числа равновозможных случаев, благоприятствующих наступлению события A, к числу всех возможных.

Классическая вероятность имеет ограниченную область применений, поскольку далеко не всегда в реальных вопросах можно выделить равновозможные случаи в конечном числе. Приведем пример. Наблюдая за космическими частицами, мы заинтересовались, какова вероятность выпадения на данную площадку земной поверхности за период в 5 мин не более трех космических частиц? Как в данном примере определить равновозможные случаи? Здесь используют статистическое определение вероятности. Статистическое определение имеет дело с проведением эксперимента, или, как принято говорить в теории вероятностей, с проведением испытаний. Пусть нас интересует оценка вероятности того, что под определенной нагрузкой диод способен проработать свыше 10 тыс. часов. С этой целью на стенд испытаний поставлена 1 тыс. диодов, изготовленных в одних и тех же условиях и из одной и той же партии исходных материалов. После 10 тыс. часов работы вышли из строя 100 штук, остальные 900 продолжали сохранять работоспособность. Частота появления диодов, способных проработать более 10 тыс. часов, оказывается равной $900 : 1000 = 9/10$. При большом числе испытаний можно считать, что вероятность события будет близка к частоте. В нашем

примере вероятность того, что наудачу взятый диод проработает более 10 тыс. часов, будет близка к 9/10. Статистическое понятие вероятности постоянно используется на практике: в биологии, медицине, инженерном деле, экономике и пр.

Предположение о существовании вероятности у интересующего нас события *А* является сильной гипотезой, которая в каждом случае требует специальной проверки. Далеко не каждое событие с неоднозначным исходом (при неизменных условиях испытаний) имеет определенную вероятность.

Часто о вероятности события пытаются судить не по объективным данным, а исходя из субъективной уверенности в наступлении или ненаступлении некоторого события. Если некто предсказывает, что футбольный матч между командами *А* и *Б* закончится со счетом 3 : 1, то это утверждение не имеет объективного значения, а является лишь убеждением лица, его высказывающего. Но на такой уверен-

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ (1903–1987)



Он рано начал проявлять разнообразные интересы. Учась в московской гимназии, Колмогоров увлекался биологией, физикой, историей. В 14 лет самостоятельно по энциклопедии стал изучать высшую математику. Вся жизнь и деятельность А. Н. Колмогорова была неразрывно связана с Московским университетом.

В университете молодой ученый примкнул к школе *Н. Н. Лузина*. В 20-е гг. лузинская школа переживала пору своего расцвета, активно работали *П. С. Александров*, Д. Е. Меньшов, Л. А. Люстерник. В возрасте 19 лет Колмогоров сделал крупное научное открытие – построил всюду расходящийся тригонометрический ряд. Его имя становится известным в научном мире. Занятия теорией множеств и тригонометрическими рядами пробудили у А. Н. Колмогорова интерес к теории вероятностей. Его книга «Основные понятия теории вероятностей» (1936), где была построена аксиоматика теории вероятностей, принадлежит к числу классических трудов в этой области науки.

А. Н. Колмогоров был одним из создателей теории случайных процессов. Ученому принадлежат фундаментальные научные открытия в классической механике, где после исследований И. Ньютона и П. Лапласа он сделал радикальный прорыв в решении основной проблемы динамики, касающейся устойчивости Солнечной системы. В гидродинамике (теории турбулентности) А. Н. Колмогорову принадлежат достижения, имеющие характер открытия законов природы. В 1956–1957 гг. ученый предпринял атаку на 13-ю проблему Гильберта, приведшую к ее полному решению (результат был получен учеником А. Н. Колмогорова – В. И. Арнольдом) и к дальнейшему развитию проблематики.

А. Н. Колмогоров обогатил науку во многих других областях: в математической логике, в топологии, математической статистике, функциональном анализе, теории дифференциальных уравнений и динамических систем, теории информации, занимался применением математических методов в теории стрельбы, лингвистике, биологии.

В конце жизни А. Н. Колмогоров сделал попытку вскрыть самую сущность понятий «порядок» и «хаос», показать, как хаотические процессы, воспринимаемые нами как случайные, возникают из детерминированных, но сложно устроенных явлений. Так возникла его концепция случайности как алгоритмической сложности.

В последние годы своей жизни ученый принимал деятельное участие в разработке вопросов математического образования в средней школе и университетах, внес огромный вклад в дело просвещения.

Многие крупнейшие академии и университеты мира избрали А. Н. Колмогорова в число своих членов, ему были присуждены Государственная (1941) и Ленинская (1965) премии, премии АН СССР им. П. Л. Чебышева и Н. И. Лобачевского, Международные премии Вольфганга (1963) и Вольфа (1981). Ученый удостоен звания Героя Социалистического Труда, награжден 7 орденами Ленина, орденами Трудового Красного Знамени и Октябрьской Революции, медалями.

А. Н. Колмогоров был неповторимой и многогранной личностью. Необыкновенная сила его разума, широта его культурных интересов, неустанное стремление к истине, благородство и бескорыстие его помыслов оказывали благотворное воздействие на всех, кто его знал.

ности делаются попытки строить теорию вероятностей. При последовательном развитии этой субъективистской позиции можно прийти к поразительному выводу: при полном незнании можно вывести из наших субъективных представлений некую «объективную истину» о значении вероятности события A. Так, совершенно ошибочны такие рассуждения: интересующее событие A может произойти, а может не произойти. Значит, из двух возможностей одна ему благоприятствует. Следовательно, по классическому определению, вероятность наступления A равна 0,5. В этом рассуждении пренебрегли требованием равновозможности возможных случаев. Обратим внимание, что такое рассуждение приводит к невероятному следствию: вероятность любого случайного события равна половине.

Подчеркнем еще раз, что о вероятности события A мы говорим всегда лишь с предположением, что выполнен некоторый комплекс условий S. Если этот комплекс условий изменился, то, как правило, и вероятность A должна измениться. Например, утверждая, что при бросании игральной кости каждая сторона выпадает с одной и той же вероятностью, равной 1/6, мы исходим из такого комплекса условий S: кость имеет одинаковую плотность, является точным кубом и подбрасывается она наудачу.

ВЕРОЯТНОСТЕЙ ТЕОРИЯ

Теория вероятностей – наука о вычислении вероятностей случайных событий.

Основные объекты изучения теории вероятностей: 1) случайное событие и его *вероятность*; 2) случайная величина и ее функция распределения; 3) случайный процесс и его вероятностная характеристика. Например, задачи, которые возникают из ситуаций, обычных на телефонной станции: а) какова вероятность того, что на станцию за время t поступят n вызовов от абонентов? б) Какова вероятность того, что длительность ожидания соединения с нужным абонентом окажется большей, чем заданное число t_0? в) Как со временем изменяется очередь на соединение? Какие закономерности появления вызовов во времени? Эти задачи показывают, что именно практика приводит к необходимости вводить математические понятия и изучать их. В задаче а) речь идет о вероятности наступления случайного события; в задаче б) – о разыскании функции распределения случайной величины (длительности ожидания); в задачах в) рассматриваются случайные процессы, связанные с обслуживанием абонентов.

Основой теории вероятностей является понятие вероятности случайного события. Интуитивно ясное понятие случайного события (появления данного числа вызовов на телефонной станции, выпадения грани 5 при бросании игральной кости и т.д.) формализуется. В современной теории вероятностей принят следующий подход. Рассматривается исходное множество – множество элементарных событий E. Далее выбираются подмножества этого множества. Например, при бросании игральной кости множество элементарных событий состоит из шести элементов (1, 2, 3, 4, 5, 6) – когда кость падает сторонами, обозначенными числами 1, 2, ..., 6. В качестве подмножеств рассматриваем возможности выпадения одной из двух граней i или j; или из трех граней i, или j, или k; ...; или выпадение одной из граней 1, или 2, или 3, ..., или 6. Это последнее событие наступает при любом бросании кости, и поэтому оно называется достоверным. И в любом случае в качестве одного из подмножеств берется все множество. Оно наступает при любом испытании и является достоверным событием. Остальные подмножества являются случайными событиями. Множество F случайных событий (множество выбранных подмножеств E) не произвольно, а должно обладать следующими свойствами: наряду с событиями A и B в него входят также события A или B, а также A и B. Событие A или B называется суммой событий A и B и обозначается символом $A+B$, или символом $A \cup B$. Событие A и B носит название пересечения (или произведения) событий A и B и обозначается символом AB (или символом $A \cap B$). Требования, наложенные на множество случайных событий, позволяют заключить, что в это множество входит еще одно событие, называемое невозможным. Оно получается каждый раз, когда рассматривается AB, но события A и B составлены из разных элементарных событий. В примере с бросанием игральной кости если выбрать $A=\{3\}$, а $B=\{5\}$, то событию AB не соответствует ни один исход бросания кости. Это невозможное событие. Оно обозначается символом $\emptyset$.

События A и B называются несовместными, если $AB=\emptyset$; иными словами, если события A и B не содержат в своем составе ни одного общего элемента (элементарного события). Определим теперь на множестве F неотрицательную функцию: каждому случайному событию A поставим в соответствие число $P\{A\} \geqslant 0$; для функции $P\{A\}$ должны быть выполнены два дополнительных свойства: 1) если A и B несовместны, то $P\{A+B\} = P\{A\}+P\{B\}$; 2) если U – достоверное событие, то $P\{U\}=1$. Легко проверить, что классическая вероятность является как раз такой функцией. Величина $P\{A\}$ называется вероятностью события A. Соотношение 1) носит

наименование теоремы сложения вероятностей; она входит в состав трех простейших соотношений, позволяющих вычислять вероятности сложных событий по заданным вероятностям простых.

Два требования, наложенные на вероятность события, позволяют получить большое число следствий: *а*) вероятность невозможного события равна 0; *б*) каковы бы ни были события A и B, $P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$.

При определении вероятности случайного события всегда предполагается, что выполнен некоторый комплекс условий: игральная кость правильная, т. е. плотность вещества, из которого она сделана, постоянна, а ее форма является идеальным кубом. Таким образом, каждая вероятность является условной. Однако принято эту первичную совокупность условий считать само собой разумеющейся, никак не отмечать ее наличие и просто писать $P\{A\}$ – вероятность события A, предполагая при этом, что указанный комплекс условий выполнен. Если же помимо этого комплекса условий известно, что осуществилось еще некоторое условие B, то в этом случае говорят об условной вероятности события A при условии B и обозначают $P\{A/B\}$. Пусть событие A состоит в том, что при бросании игральной кости выпадет не более четырех очков. Вероятность этого события равна $4/6 = 2/3$. Если нам стало известно событие B – число выпавших очков оказалось большим двух, то тогда могли выпасть лишь очки 3, 4, 5 или 6. Благоприятствуют интересующему нас событию лишь два из четырех, значит, $P\{A/B\} = 2/4 = 1/2$. Вообще говоря, условная вероятность $P\{A/B\}$ не равна безусловной $P\{A\}$, однако могут быть случаи, когда $P\{A/B\} = P\{A\}$. В этом случае говорят, что событие A независимо от события B.

Найдем вероятность события AB. Чтобы произошло событие AB, нужно, во-первых, чтобы произошло событие B, а во-вторых, чтобы наступило событие A при условии, что событие B наступило.

Рассмотрим классическую схему вероятности. Имеется n элементарных равновероятных событий. Событию A благоприятствуют какие-то j из них, событию B благоприятствует k и m – событию AB. Согласно определению $P\{AB\} = m/n = k/n \cdot m/k$. Но первый множитель правой части этого равенства равен $P\{B\}$, а второй – вероятность события A при условии, что B наступило. Таким образом, $P\{AB\} = P\{B\} \cdot P\{A/B\}$. Точно такими же рассуждениями доказываем, что $P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B/A\}$. Из этих равенств, носящих название теоремы умножения вероятностей, вытекает, во-первых, что если A независимо от B, то и B независимо от A. Во-вторых, следует равенство $P\{A/B\} = P\{AB\}/P\{B\}$.

Для общего определения вероятности равенство $P\{A/B\} = P\{AB\}/P\{B\}$ служит определением условной вероятности. Ясно, что и в этом случае имеет место теорема умножения, которая является второй основной теоремой.

Третьей основой вычислений в теории вероятностей служит так называемая формула полной вероятности. Пусть события A_1, A_2, ..., A_s попарно несовместны и пусть событие B наступает только в том случае, когда происходит одно из событий A_j. В этом случае имеет место равенство $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_s$.

Отсюда $P\{B\} = \sum\limits_{j=1}^{s} P\{A_j\} P\{B/A_j\}$

В развитии теории вероятностей важную роль играла и продолжает играть так называемая схема Бернулли. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A с одной и той же в каждом из испытаний вероятностью p и не произойти с вероятностью $q = 1 - p$. Вероятность того, что при этом событии A появится ровно m раз, а событие $\bar{A}$ (не A) $n - m$ раз, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

При больших n вычисления по этой формуле довольно сложны и технически трудны; для этого обычно используют приближенную формулу (локальную теорему Муавра – Лапласа), согласно которой

$$P_n(m) \approx (\sqrt{2\pi npq})^{-1}\, e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}.$$

В теоретических и прикладных задачах часто приходится находить суммы вида $P_n(a, b) = \sum\limits_{m=a}^{b} P_n(m)$. При больших n, a и b такие вычисления требуют значительных усилий. Для их приближенного вычисления используется интегральная теорема Муавра – Лапласа, согласно которой

$$P_n(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx,\quad \alpha = \frac{a-np}{\sqrt{npq}},\quad \beta = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}.$$

Обе теоремы дают очень высокую точность. Они относятся к так называемым предельным теоремам теории вероятностей.

Швейцарский математик Я. Бернулли (1654–1705) обнаружил фундаментальный факт теории, получивший название закона больших чисел в форме Бернулли. Пусть μ обозначает число появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p.

Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} P\{|\mu/n - p| > \varepsilon\} = 0,$$

т.е. что вероятность отклонения частоты μ/n появления события от p = вероятности этого события больше, чем на ε, стремится к 0.

Наряду со случайными событиями в теории вероятностей и ее применениях рассматривают случайные величины. Представим себе, что при каждом наблюдении некоторая величина принимает какое-то значение в зависимости от случая; например, число космических частиц, попадающих за данный промежуток времени на определенную площадку поверхности; число обрывов пряжи, изготовленной из хлопка определенного сорта и заданного номера, при испытаниях на разрыв. Таких примеров можно привести сколько угодно.

Случайные величины различаются как теми значениями, которые они способны принимать, так и вероятностями, с которыми эти значения принимаются. Так, число вызовов от абонентов на телефонной станции за промежуток времени t может быть любым целым числом: 0, 1, 2, … . Как показывают многочисленные наблюдения, вероятность того, что число вызовов окажется равным k, согласуется с формулой $P_k(t) = (1/k!)\,(\lambda t)^k e^{-\lambda t}$, где λ – некоторая положительная постоянная.

Скорость молекулы газа также случайна и может принимать любые значения. Этих значений столько же, сколько положительных

АНДРЕЙ АНДРЕЕВИЧ МАРКОВ (1856–1922)



А. А. Марков – русский математик, представитель петербургской математической школы. Он родился в Рязани. В 1874 г. поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, где под влиянием П. Л. *Чебышева* занялся теорией непрерывных дробей и теорией чисел.

В 1884 г. Марков защитил докторскую диссертацию, посвященную непрерывным дробям, в которой доказал и обобщил некоторые неравенства Чебышева, опубликованные раньше без доказательств. Маркову принадлежат также многочисленные работы по различным разделам математического анализа. В 1890 г. за глубокие научные исследования Марков был избран академиком Петербургской академии наук.

С конца 90-х гг. XIX в. главным предметом исследований ученого стала теория вероятностей. Здесь он продолжил работу своего учителя П. Л. Чебышева и ввел новый объект исследования – последовательности зависимых случайных величин, получившие в дальнейшем название марковских цепей. Так называют последовательности случайных величин, для которых вероятность появления того или иного значения на $(k+1)$-м шагу зависит лишь от того, какое значение эта величина приняла на k-м шагу, и не зависит от значений величины на 1-м, 2-м, …, $(k-1)$-м шагах.

Марковские цепи сразу после их открытия не нашли практических приложений, и ученому пришлось применять свои результаты к распределению гласных и согласных букв в поэме А. С. Пушкина «Евгений Онегин». Ведь за согласной чаще идет гласная, а за гласной – согласная, и в первом приближении можно считать, что вероятность появления гласной на $(k+1)$-м месте зависит лишь от того, гласной или согласной является буква, стоящая на k-м месте. Но, как всегда бывает с глубокими научными результатами, в дальнейшем были обнаружены гораздо более важные для практики области приложения марковских цепей (например, теория массового обслуживания). Из теории марковских цепей возникла общая теория случайных процессов, которая применяется при изучении лавинных процессов и других проблем.

А. А. Марков был страстным и убежденным борцом против произвола и несправедливости царского режима, выступал против попыток подчинить преподавание математики в школе религиозным взглядам. Он отказался от царских орденов, подал в Синод просьбу об отлучении от церкви, указав в ней, что не сочувствует всем религиям, которые, подобно православию, поддерживаются огнем и мечом и сами служат им. Резкие выпады против веры в чудеса содержатся в учебнике А. А. Маркова «Исчисление вероятностей», опубликованном в дореволюционное время. После выхода книги ученого обвинили в безбожии и «подрыве основ». От преследований его избавил лишь крах царского режима.

чисел. Как в этом случае задавать вероятности этих значений? Математики пошли по такому пути: стали определять не вероятность каждого из возможных значений, а вероятность того, что случайная величина ξ примет значение меньшее, чем заданное значение x: $P\{\xi < x\} = F(x)$. Функция $F(x)$ получила наименование функции распределения случайной величины ξ. Из теоремы сложения легко вывести следующее важное равенство: $P\{a \leqslant \xi < b\} = F(b) - F(a)$, позволяющее по функции распределения определять вероятность выполнения указанного неравенства.

В теории вероятностей и ее применениях важную роль играют числовые характеристики случайных величин – математическое ожидание и дисперсия. Мы дадим их определение для дискретных случайных величин. Пусть x_1, x_2 ... – возможные значения случайной величины ξ и p_1, p_2 ... – вероятности этих значений, тогда сумма

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$$

называется математическим ожиданием ξ, а $E(\xi - E\xi)^2 = D\xi$ – дисперсией ξ.

П. Л. *Чебышев* доказал закон больших чисел в очень общей форме, а именно: пусть ξ_1, ξ_2, ... – последовательность независимых случайных величин с математическими ожиданиями a_1, a_2... и дисперсиями $D\xi_k$, ограниченными одной и той же величиной C, тогда для любого положительного $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|(1/n) \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k)\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

Вторая предельная теорема получила наименование теоремы Ляпунова, или центральной предельной теоремы: если случайные величины ξ_1, ξ_2 ... независимы, имеют конечные математические ожидания a_1, a_2 ... и дисперсии $D\xi_k = b_k^2$, то при дополнительном условии равномерной малости отдельных слагаемых имеет место:

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a_k) < \varepsilon\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{r^2}{2}} dr,$$

где $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

Эта теорема является значительным обобщением интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

В нашем веке в связи с физическими, биологическими, инженерными и другими исследованиями возникла необходимость рассматривать случайные процессы $\xi(t)$, т. е. случайные функции от одного независимого переменного t, под которым обычно понимается время. Теория случайных процессов в наши дни является одним из основных математических средств изучения явлений реального мира.

Первые задачи теории вероятностей были рассмотрены Л. Пачоли (1445 – ок. 1514), Д. Кардано (1501–1576), Н. Тарталья (ок. 1499–1557), Б. Паскалем (1623–1662), П. Ферма (1601–1665), Х. Гюйгенсом (1629–1695). В качестве самостоятельной научной дисциплины теория вероятностей стала оформляться в работах Я. Бернулли (1654–1705), А. Муавра (1667–1754), П. Лапласа (1749–1827), С. Пуассона (1781–1840). Ее последующее развитие связано с именами П. Л. *Чебышева*, А. А. *Маркова*, А. М. Ляпунова (1857–1918), А. Я. Хинчина (1894–1959), С. Н. Бернштейна (1880–1968), А. Н. *Колмогорова* (1903–1987) и других.

ВИВИАНИ КРИВАЯ

Изображенную на рисунке пространственную кривую – «восьмерку» называют вивианой, по имени итальянского ученого XVII в. В. Вивиани, изучавшего эту кривую. Эта кривая получается как линия пересечения сферы с поверхностью цилиндра вдвое меньшего радиуса, проходящей через ее центр. Вивиана отделяет на сфере две области, суммарная площадь которых равна площади квадрата, построенного на диаметре сферы. На доказательствах свойств вивианы пробовали мощь методов математического анализа ученые, стоявшие у истоков этой науки, – Г. В. *Лейбниц*, И. Бернулли и другие.

Несложно вычертить вивиану на поверхности деревянного цилиндра. Для этого нужно взять циркуль с раствором, равным диаметру цилиндра, и, воткнув иглу в цилиндр, двигать грифель по его поверхности.

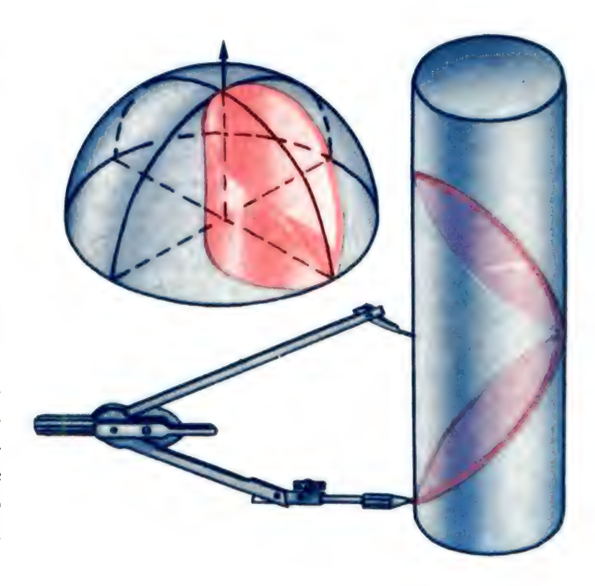
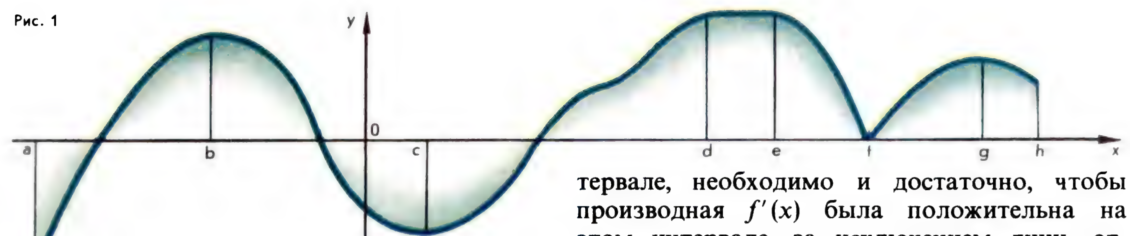


Рис. 1

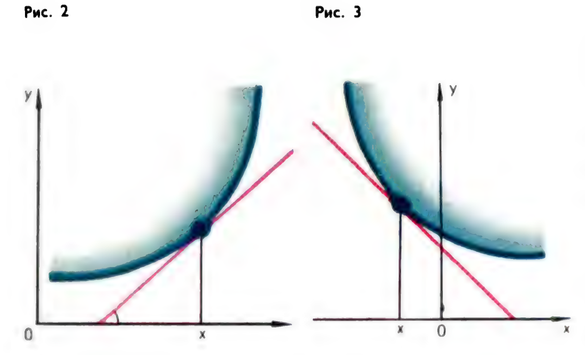


ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ

Ход изменения *функции* становится наиболее ясным, если перед глазами есть график этой функции. Для примера рассмотрим график на рис. 1.

Если при возрастании аргумента на некотором промежутке функция $y=f(x)$ в свою очередь возрастает, так что большему значению x соответствует большее значение y, то функция называется возрастающей в этом промежутке. Если же с возрастанием аргумента функция убывает, так что большему значению x соответствует меньшее значение y, то ее называют убывающей. Так, например, функция на рис. 1 – возрастающая в промежутках от a до b, от c до d и от f до g и убывающая в промежутках от b до c, от e до f и от g до h. На промежутке от d до e функция принимает постоянное значение, не изменяется, можно сказать, что на промежутке от c до d функция $f(x)$ не убывает, а на промежутке от e до f не возрастает. Функции возрастающие, убывающие, неубывающие и невозрастающие объединяются общим названием «монотонные».

Рис. 2 Рис. 3



Для функции, заданной аналитически (формулой), построение ее графика может потребовать большого труда. Исследование характера изменения функции, нахождение промежутков возрастания и убывания, экстремумов функции можно осуществить с помощью ее производной.

Пусть функция $y=f(x)$ в каждой точке некоторого интервала имеет производную. Для того чтобы функция возрастала на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительна на этом интервале, за исключением лишь отдельных точек, где эта производная может обращаться в нуль. Для того чтобы функция убывала на интервале, необходимо и достаточно, чтобы ее производная была отрицательна на этом интервале, опять же за исключением лишь отдельных точек, где производная может равняться нулю.

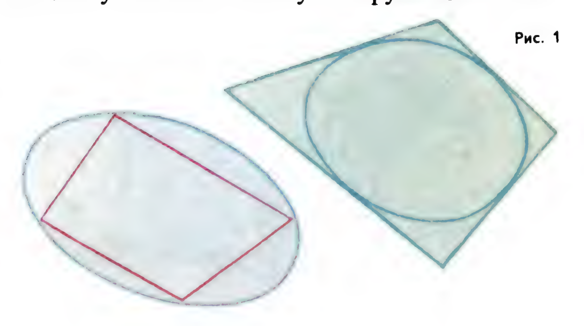
Геометрически этот факт почти очевиден. Производная, как известно, равна тангенсу угла наклона касательной к оси Ox. Если функция возрастает, то при движении слева направо ее график поднимается, а график убывающей функции опускается (рис. 2 и 3). Ясно, что в первом случае касательная к графику образует с осью Ox острый угол, а во втором случае – тупой. Лишь в отдельных точках касательная может оказаться горизонтальной, т.е. производная в соответствующих точках обратится в нуль.

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ФИГУРЫ

Многоугольник называется вписанным в выпуклую кривую, а кривая – описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на кривой (рис. 1). Многоугольник называется описанным вокруг выпуклой кривой, а кривая – вписанной в многоугольник, если каждая его сторона касается кривой. Если же кривая касается всех прямых, на которых лежат стороны многоугольника, причем некоторых из них она касается в точках, не принадлежащих сторонам, то она называется вневписанной. В качестве кривой чаще всего рассматривается окружность. Так, например, всякий треугольник имеет одну описанную окружность, одну вписанную и три вневписанных (рис. 2).

Но уже не всякий четырехугольник имеет вписанную или описанную окружность. Опи-

Рис. 1



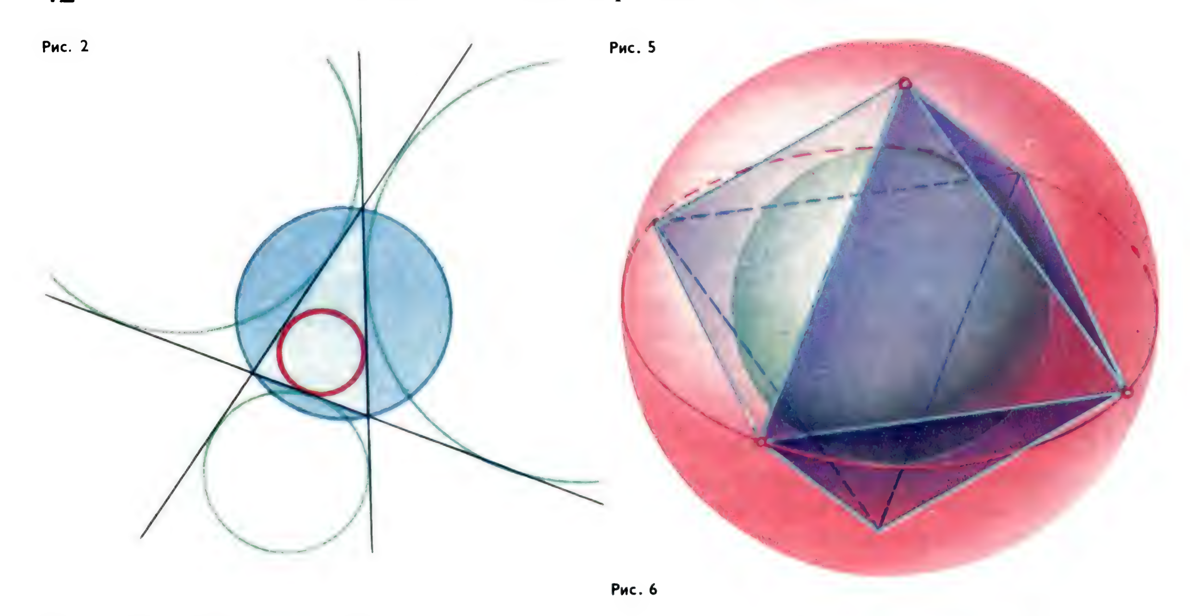

Рис. 2

Рис. 5

Рис. 6

санная вокруг четырехугольника окружность существует лишь в том случае, если сумма его противоположных углов равна 180°. А для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы каждая сумма длин одной пары противоположных сторон была равна сумме длин второй пары сторон.

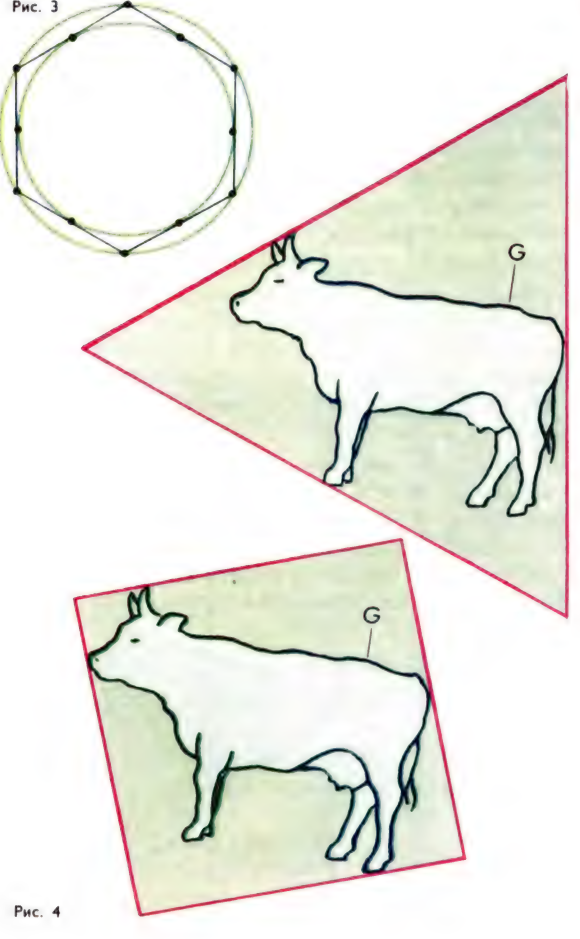
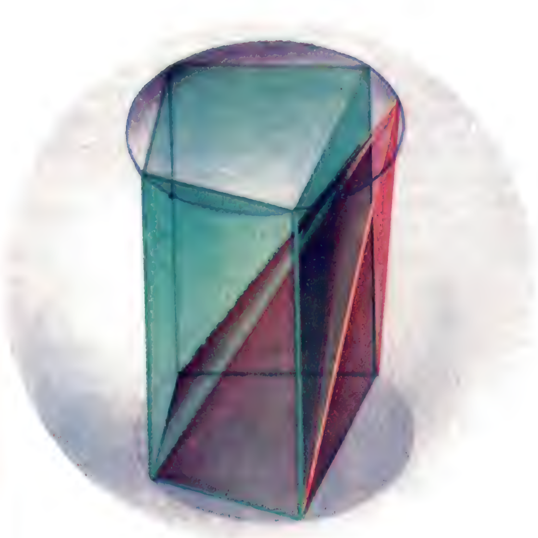


Рис. 3

Рис. 4



Вписанная и описанная окружности существуют у любого правильного многоугольника (рис. 3). Этот факт использовался еще в древности для нахождения отношения длины окружности к ее радиусу.

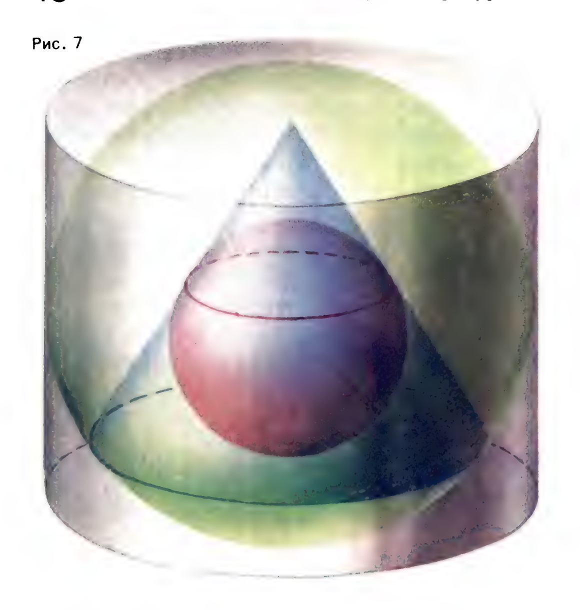
Нетрудно обнаружить тот факт, что если на плоскости задана замкнутая кривая G и равносторонний треугольник, то вокруг G всегда можно описать равносторонний треугольник со сторонами, параллельными сторонам данного (рис. 4). Менее очевидным является утверждение о том, что вокруг любой замкнутой кривой можно описать квадрат.

Вписанные и описанные фигуры рассматриваются и в пространстве.

В этом случае вместо многоугольника рассматривается многогранник, а вместо выпуклой линии – выпуклая поверхность, чаще всего сфера.

Сфера называется описанной около многогранника, а многогранник – вписанным в сферу, если все вершины многогранника лежат на

Рис. 7



сфере. Сфера называется вписанной в многогранник, а многогранник – описанным около сферы, если плоскости всех его граней касаются сферы.

У правильных многогранников существуют описанные и вписанные сферы, поскольку вершины правильного многогранника равноудалены от его центра (рис. 5). Для того чтобы у других многогранников существовали описанная и вписанная сферы, требуются определенные условия. Например, около прямой призмы или пирамиды можно описать сферу, если можно описать окружность около ее основания (рис. 6).

Иногда рассматривают конус, вписанный в сферу; сферу, вписанную в конус, цилиндр и т. п. (рис. 7).

На могильной плите *Архимеда*, как завещал ученый, был изображен цилиндр с вписанным шаром, а эпитафия говорила о величайшем открытии Архимеда – о том, что объемы этих тел относятся как 3 : 2. Когда римский оратор и общественный деятель Цицерон, живший в I в. до н. э., был в Сицилии, он еще видел этот заросший кустами и терновником памятник с шаром и цилиндром.

ВЫПУКЛЫЕ ФИГУРЫ

Выпуклой называется такая фигура, которой принадлежат все точки отрезка, соединяющего любые ее две точки. Выпуклыми фигурами являются, например, круг, шар, треугольник; четырехугольники могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (рис. 1).

Рис. 1

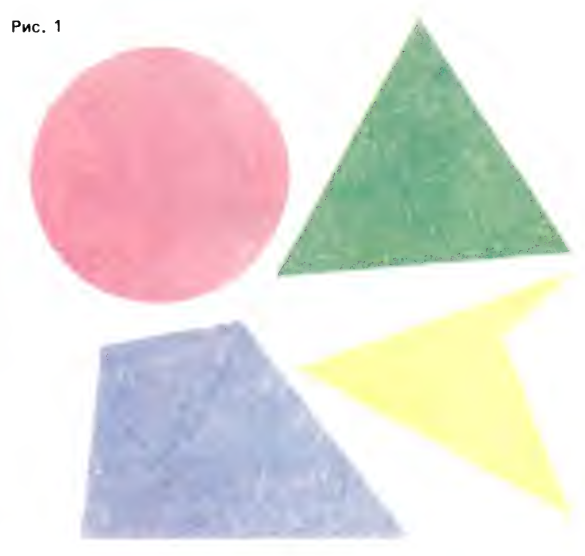


Рис. 2

A

Рис. 3

Справедливо такое утверждение: «Общая часть двух выпуклых фигур вновь является выпуклой фигурой». Его вы сможете доказать сами, считая пустое *множество* выпуклой фигурой. Еще одно важное свойство плоской выпуклой фигуры: через каждую точку на ее границе можно провести прямую (она называется опорной прямой) так, что вся фигура будет лежать по одну сторону от этой прямой (рис. 2).

Верно и обратное утверждение: если через каждую точку границы некоторой плоской фигуры можно провести опорную прямую, то эта фигура является выпуклой. Таким образом, существование опорных прямых в каждой граничной точке можно принять за определение плоской выпуклой фигуры.

Для выпуклых тел опорные плоскости определяются аналогично (рис. 3).

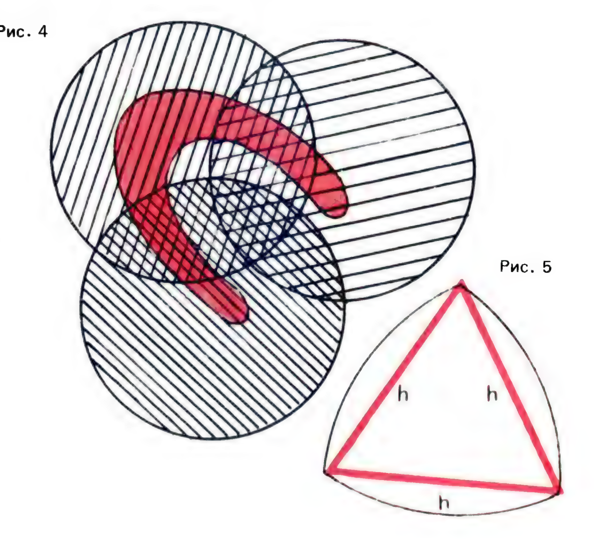
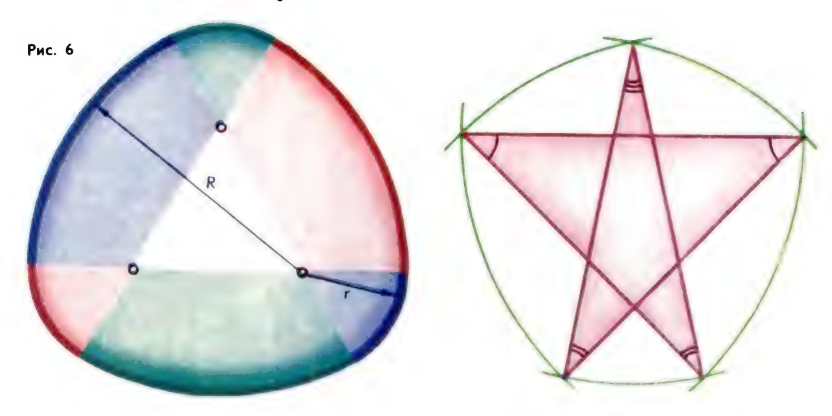


Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6



Наличие опорных прямых и плоскостей у выпуклых фигур является фактом довольно очевидным. Гораздо менее очевиден следующий факт, открытый в 1913 г. австрийским математиком Э. Хелли: «Если из нескольких заданных на плоскости выпуклых фигур каждые три имеют общую точку, то тогда существует точка, принадлежащая всем этим фигурам». Требование выпуклости в этом утверждении существенно. Действительно, на рис. 4 изображены четыре фигуры, из которых лишь одна невыпукла, однако хотя у любых трех из них есть общая точка, но нет точки, общей всем четырем фигурам.

Для выпуклых тел (в пространстве) теорема Хелли в приведенном виде неверна. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть четыре треугольника, образующих грани треугольной пирамиды. Однако если потребовать, чтобы у системы выпуклых тел в пространстве каждые четыре тела имели общую точку, то тогда и все эти тела будут иметь общую точку. Теорема Хелли в соответствующей формулировке была доказана для пространства произвольного числа измерений и в этом виде оказалась очень полезной во многих математических исследованиях.

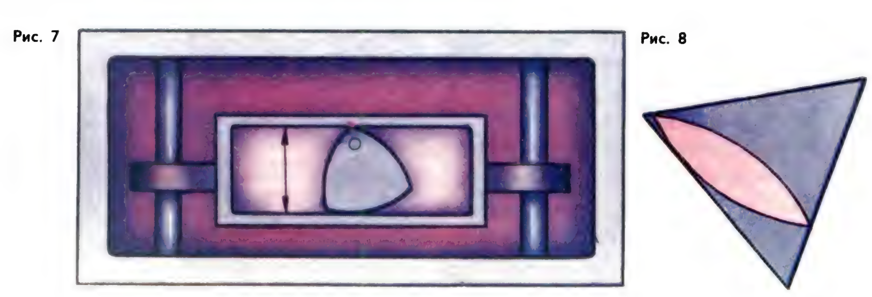
В последнее время понятие выпуклости получило широкое распространение в математике, особенно в ее прикладных областях. Появились «выпуклый анализ» и «выпуклое программирование», результаты которых облегчают поиск решений (особенно на ЭВМ) многих важных практических задач экономики, управления и других областей. Одним из самых интересных разделов геометрической теории выпуклых фигур является теория кривых постоянной ширины. Так называют кривую, ограничивающую такую выпуклую фигуру на плоскости, для которой расстояние между каждой парой параллельных опорных прямых равно одному и тому же постоянному числу h.

Простейшей кривой постоянной ширины является окружность, но трудно представить себе другую кривую с таким свойством. Первым такую кривую нашел не математик, а французский механик Ф. Рело. Это равносторонний криволинейный треугольник, стороны которого являются дугами окружностей с центрами в вершинах этого треугольника (рис. 5). Из рис. 6 нетрудно понять способы построения двух других кривых постоянной ширины. Интересно, что длина любой кривой постоянной ширины h равна πh.

Кривые постоянной ширины имеют многочисленные практические применения. На рис. 7 изображен механизм, состоящий из подвижной рамки, способной подниматься и опускаться, и треугольника Рело, который может вращаться вокруг своей вершины O. При таком вращении рамки 1/6 часть периода полного оборота находится в нижнем положении, потом 1/3 периода поднимается вверх, далее неподвижно стоит там еще 1/6 периода и за последние 1/3 периода опускается вниз. Такое движение часто бывает необходимым, например, в киносъемочных аппаратах и кинопроекторах.

Треугольник Рело, как и любая кривая постоянной ширины h, может вращаться внутри полосы ширины h, как в описанном механизме, постоянно касаясь обеих прямых, более того, он может вращаться внутри квадрата со стороной h, касаясь одновременно всех четырех его сторон.

Рис. 7 Рис. 8

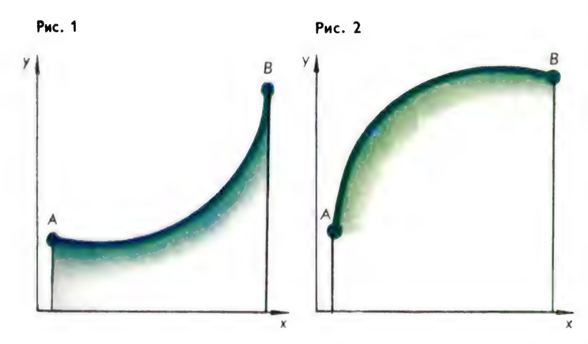


А существуют ли такие выпуклые фигуры, которые могут вращаться внутри, скажем, равностороннего треугольника, постоянно касаясь всех его сторон? Одну такую фигуру вы знаете – это вписанный круг. А еще? Оказывается, таким свойством обладает пересечение двух кругов одинакового радиуса, расположенных так, что центр каждого из них лежит на границе другого (рис. 8). В отличие от круга, который при вращении продолжает касаться каждой прямой в одной и той же точке, этот двуугольник при вращении входит в соприкосновение последовательно и со всеми точками границы треугольника. Это его свойство позволило сконструировать механизм, позволяющий высверливать отверстия треугольной формы.

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Важным характеризующим функцию свойством является монотонность (см. *Возрастание и убывание функций*). Однако этого свойства иногда оказывается недостаточно, чтобы описать ход изменения функции. На рис. 1 и 2 приведены графики монотонных функций, но они, как видим, различны. Форма графика первой функции, например, напоминает тяже-

Рис. 1 Рис. 2



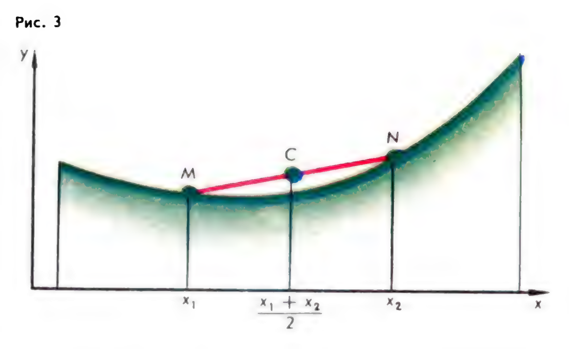
лую нить, подвешенную в точках A и B, а форма второй – ветвь яблони, отягощенной плодами. Говорят, что функция, изображенная на рис. 1, выпукла вниз, а на рис. 2 – выпукла вверх. Точнее, функцию $f(x)$, непрерывную на некотором промежутке X, называют выпуклой вниз, если для любых точек x_1 и x_2 из промежутка X выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Если для любых точек x_1 и x_2 из промежутка X справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

Рис. 3



то функцию $f(x)$ называют выпуклой вверх (вогнутой). Эти неравенства имеют простой геометрический смысл. Точка с абсциссой $(x_1+x_2)/2$ есть середина отрезка $[x_1; x_2]$, а $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ – ордината соответствующей точки кривой (рис. 3); значение

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

равно ординате точки C, лежащей на хорде MN. Таким образом, на отрезке $[x_1; x_2]$ функция выпукла вниз, если точка, принадлежащая графику функции, лежит ниже точки хорды MN (имеющей ту же абсциссу) или на хорде MN. Функция выпукла вверх, если точка, принадлежащая графику функции, лежит выше точки хорды MN (имеющей ту же абсциссу) или на хорде MN.

Исследования функции на выпуклость очень удобно проводить средствами математического анализа.

Как известно, имеют место следующие теоремы анализа:

1) если дифференцируемая функция выпукла вниз на промежутке X, то ее график расположен над касательной, проведенной в любой точке графика, а график дифференцируемой функции, выпуклой вверх, расположен под касательной, проведенной в любой точке графика (рис. 4 и 5);

2) если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке X, то она выпукла вниз, когда ее вторая производная $f''(x)$ неотрицательна на этом промежутке: $f''(x) \geqslant 0$,

Рис. 4 Рис. 5

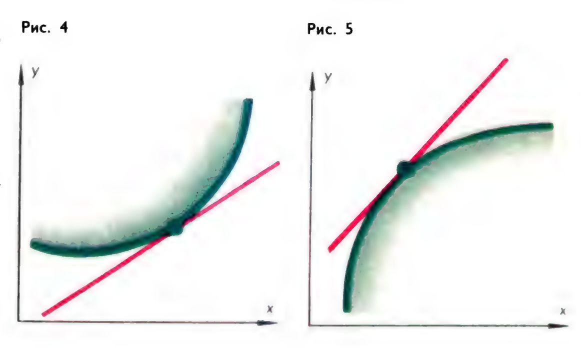
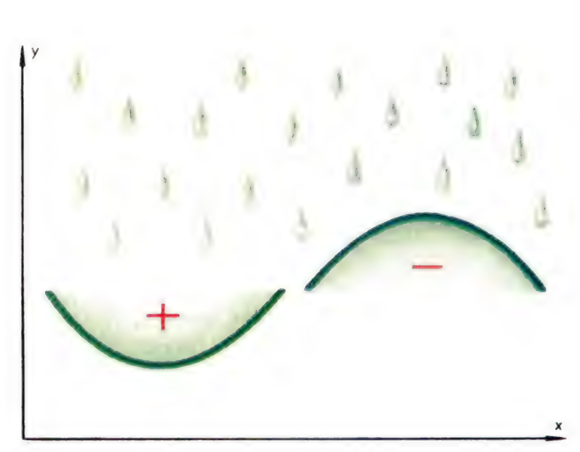




Рис. 6



и выпукла вверх, когда ее вторая производная $f''(x)$ неположительна: $f''(x) \leqslant 0$. Это легко запомнить, если представить себе, что капли, падающие на выпуклую вниз кривую, «скапливаются» на ней, а падающие на выпуклую вверх кривую – «скатываются» с нее (рис. 6).

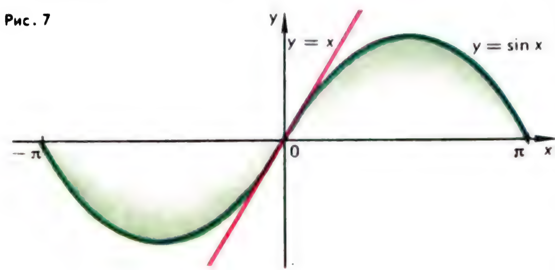
Так, функция $y = x^2$ всюду выпукла вниз, поскольку $y' = 2x$ и $y'' = 2 > 0$ для всех x. Функция $y = \ln x$ выпукла вверх на промежутке $]0; +\infty[$, так как

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = \frac{-1}{x^2} < 0.$$

Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ (рис. 7). Ее первая и вторая производные: $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$. На интервале $]-\pi; 0[$ вторая производная положительна (так как $\sin x < 0$), кривая выпукла вниз; напротив, на интервале $]0; \pi[$ вторая производная отрицательна (здесь $\sin x > 0$), кривая выпукла вверх.

Точку $M(x_0, y_0)$ кривой $y = f(x)$, где функция $f(x)$ имеет вторую непрерывную про-

Рис. 7



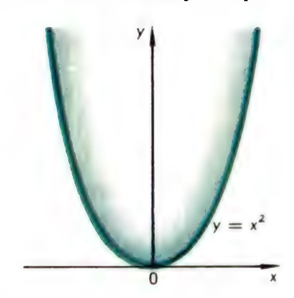
изводную, называют точкой перегиба, если кривая имеет различную выпуклость по разные стороны от этой точки.

Так точка $O(0; 0)$ есть точка перегиба функции $y = \sin x$, слева от нее функция выпукла вниз, справа – выпукла вверх.

Если функция в точке x_0 имеет перегиб, то в силу первой теоремы, названной выше, касательная к кривой, проведенная в точке перегиба, будет с одной стороны лежать над кривой, а с другой – под кривой. График кривой в точке перегиба переходит (перегибается) с одной стороны касательной на другую. На рис. 7 синусоида переходит с одной стороны прямой $y = x$, являющейся касательной в начале координат, на ее другую сторону.

При этом $f''(x_0) = 0$, так как по одну сторо-

Рис. 8



ну от точки перегиба $f''(x) \geqslant 0$, а по другую – $f''(x) \leqslant 0$.

Таким образом, точки перегиба у дважды непрерывно дифференцируемой функции могут быть только там, где вторая производная функции обращается в нуль. Так, у функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$ имеем $y'' = 0$.

Следует, однако, заметить, что могут быть точки, где $f''(x) = 0$, но точки перегиба в них нет. При переходе через такую точку вторая производная сохраняет знак и функция не меняет выпуклости. Например, кривая $y = x^2$ всюду выпукла вниз (рис. 8), хотя ее вторая производная при $x = 0$ равна нулю. Действительно, $y'' = 12x^2$ и $y'' \geqslant 0$ при $x = 0$.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Под термином «вычислительная техника» понимают совокупность технических систем, т. е. вычислительных машин, и математических средств, методов и приемов, используемых для облегчения и ускорения решения трудоемких задач, связанных с обработкой информации (вычислениями), а также отрасль техники, занимающаяся разработкой и эксплуатацией вычислительных машин.

Основные функциональные элементы современных вычислительных машин, или компьютеров (от английского слова *compute* – вычислять, подсчитывать), выполнены на электронных приборах, поэтому их называют электронными вычислительными машинами, или сокращенно ЭВМ.

По способу представления информации вычислительные машины делят на три группы:

– аналоговые вычислительные машины (АВМ), в которых информация представляется в виде непрерывно изменяющихся переменных, выраженных какими-либо физическими величинами;

– цифровые вычислительные машины (ЦВМ), в которых информация представляется в виде дискретных значений переменных (чисел), выраженных комбинацией дискретных значений какой-либо физической величины (цифр);

– гибридные вычислительные машины, в которых используются оба способа представления информации.

Каждый из этих способов представления информации имеет свои преимущества и недостатки. ЦВМ распространены более всего потому, что точность их результатов в принципе не зависит от точности, с которой они изготовлены. Этим объясняется и тот факт, что первое аналоговое вычислительное устройство – *логарифмическая линейка* – появилась только в XVII в., а самыми древними цифровыми средствами для облегчения вычислений были человеческая рука и камешки. Благодаря счету на пальцах возникли пятеричная и десятичная *системы счисления*.

Более поздними изобретениями для счета были бирки с зарубками и веревки с узелками. Первым устройством, специально предназначенным для вычислений, был простой абак, с которого и началось развитие вычислительной техники. Счет на абаке, известный уже в Древнем Египте и Древней Греции задолго до нашей эры, просуществовал вплоть до XVI - XVII вв., когда его заменили письменные вычисления. Заметим, что абак служил не столько для облегчения собственно вычислений, сколько для запоминания промежуточных результатов. Известно несколько разновидностей абака: греческий

НОРБЕРТ ВИНЕР (1894–1964)



Жизнь Винера известна в подробностях благодаря его автобиографическим книгам «Бывший вундеркинд» и «Я – математик» (последняя имеется в русском переводе).

В школу будущий ученый поступил в 9 лет, но уровень его знаний уже тогда соответствовал знаниям выпускных классов. Его отец, профессор славянских языков Гарвардского университета в США, составил для сына специальную, очень сложную программу обучения. Н. Винер окончил колледж в 14 лет, в 18 лет он получил степень доктора философии за диссертацию по математической логике.

Винер продолжает образование в Европе, в Кембридже, а затем в Геттингене, где знакомится с Д. *Гильбертом*.

Первые годы после возвращения на родину были для Н. Винера годами поиска собственного пути в математике. За время с 1915 по 1919 г. он сменил множество мест работы, пока не устроился преподавать в Массачусетском технологическом институте, в котором проработал всю свою жизнь.

Приложения математики всегда были в поле зрения Винера. По его идее был создан прибор для корректировки электрических цепей, он думает о вычислительных машинах, разрабатывает вопросы кодировки и декодировки сообщений.

Во время второй мировой войны Винер занимается задачей об управлении огнем зенитной артиллерии. В предыдущей войне он составлял таблицы для стрельбы по неподвижным целям, а как управлять огнем по маневрирующей мишени? Винер строит теорию прогнозирования, на основе которой создаются реальные приборы.

Работая над прикладными задачами, Винер постепенно придает все большее значение роли обратной связи в самых разнообразных системах. Ученый начинает искать явления обратной связи в физиологии. Винер приходит к мысли, что имеются универсальные законы управления, развития, преобразования информации и в технических и в живых системах. Он начинает говорить о новой науке – кибернетике.

В 1948 г. вышла в свет его книга «Кибернетика, или управление и связь в животном и машине», и ее тираж быстро разошелся. Имя создателя новой науки стало широко известным Винер пишет новые книги и брошюры, которые переводятся на многие языки мира, выступает с лекциями в разных странах, обсуждает и развивает различные аспекты кибернетики

Винер был одним из крупнейших математиков XX в., но его широкая известность связана прежде всего с его репутацией создателя и популяризатора кибернетики.

(египетский) абак в виде дощечки, на которой проводили линии и в получившиеся колонки клали камешки; римский абак, на котором камешки могли передвигаться по желобкам; китайский суан-пан и японский соробан с шариками, нанизанными на прутики; счетные таблицы, состоявшие из горизонтальных линий, соответствующих единицам, десяткам, сотням и т.д., и вертикальных, предназначенных для отдельных слагаемых и сомножителей; на эти линии выкладывались жетоны (до четырех). Русский абак – счеты появились в XVI – XVII вв., ими пользуются и в наши дни. Русские счеты стоят на особом месте среди разновидностей абака, так как они используют десятичную, а не пятеричную систему счисления, как все остальные абаки. Основная заслуга изобретателей абака состоит в создании позиционной системы представления чисел (см. *Система счисления*).

Следующим важным шагом в развитии вычислительной техники было создание суммирующих машин и арифмометров. Такие машины были сконструированы независимо друг от друга разными изобретателями.

В рукописях итальянского ученого Леонардо да Винчи (1452–1519) имеется эскиз 13-разрядного суммирующего устройства. Проект другой, 6-разрядной, машины был разработан немецким ученым В. Шиккардом (1592–1636), а сама машина была построена предположительно в 1623 г. Однако эти изобретения оставались неизвестными вплоть до середины XX в. и поэтому никакого влияния на развитие вычислительной техники не оказали.

Более 300 лет считалось, что первую суммирующую (8-разрядную) машину сконструировал в 1641 г. и построил в 1645 г. Б. Паскаль, который к тому же наладил «серийное производство» своих машин. Несколько экземпляров машин сохранилось до наших дней. Эти механические машины позволяли выполнять сложение и вычитание, а также умножение (деление) путем многократного сложения (вычитания).

Конструкторы суммирующих машин впервые осуществили идею представления чисел углом поворота счетных колес: каждому числу от 0 до 9 соответствовал свой угол. При реализации другой идеи – идеи автоматического переноса десятков – Паскаль столкнулся с определенной трудностью: изобретенный им механизм переноса десятков работал при вращении счетных колес только в одном направлении, а это не позволяло производить вычитание вращением колес в противоположную сторону. Простой и остроумный выход из этого положения, найденный Паскалем, был настолько удачен, что используется в современных ЭВМ. Паскаль заменил вычитание сложением с дополнением вычитаемого. Для 8-разрядной машины Паскаля, работавшей в десятичной системе, дополнением числа A будет число $(100\,000\,000-A)$, поэтому операция вычитания $B-A$ может быть заменена сложением:

$$B+(100\,000\,000-A)=100\,000\,000+(B-A).$$

Получившееся число будет больше искомой разности на 100 000 000, но так как машина – 8-разрядная, то единица в девятом разряде просто пропадает при переносе десятков из восьмого.

Первый экземпляр первого в мире арифмометра, выполнявшего все четыре действия арифметики, был создан в 1673 г. Г. В. *Лейбницем* после почти сорокалетней работы над «арифметическим инструментом».

В XVIII–XIX вв. продолжалось совершенствование механических арифмометров, а затем и арифмометров с электрическим приводом. Эти усовершенствования носили чисто механический характер и с переходом на электронику утратили свое значение.

Исключение составляют лишь машины английского ученого Ч. Беббиджа (1791–1871): разностная (1822) и аналитическая (1830, проект).

Разностная машина предназначалась для табулирования многочленов и с современной точки зрения являлась специализированной вычислительной машиной с фиксированной (жесткой) программой. Машина имела «память»: несколько регистров для хранения чисел; счетчик числа операций со звонком – при выполнении заданного числа шагов вычислений раздавался звонок; печатающее устройство – результаты выводились на печать, причем по времени эта операция совмещалась с вычислениями на следующем шаге.

При работе над разностной машиной Беббидж пришел к идее создания цифровой вычислительной машины для выполнения разнообразных научных и технических расчетов, которая, работая автоматически, выполняла бы заданную программу. Проект этой машины, названной автором аналитической, поражает прежде всего тем, что в нем предугаданы все основные устройства современных ЭВМ, а также задачи, которые могут быть решены с ее помощью.

Аналитическая машина Беббиджа должна была включать в себя следующие устройства:

«склад» – устройство для хранения цифровой информации (теперь его называют запоминающим или памятью);

«фабрика» – устройство, выполняющее операции над числами, взятыми на «складе» (ныне это – арифметическое устройство);

устройство, для которого Беббидж не придумал названия и которое управляло последовательностью действий машины (сейчас это – устройство управления);

устройство ввода и вывода информации.

В ожидании результатов вычислений.



В качестве носителей информации при вводе и выводе Беббидж предполагал использовать перфорированные карточки (перфокарты) типа тех, что применял французский ткач и механик Ж. М. Жаккар (1752–1834) для управления работой ткацкого станка. Беббидж предусмотрел ввод в машину таблиц значений функций с контролем при вводе значений аргумента.

Выходная информация могла печататься, а также пробиваться на перфокартах, что давало возможность при необходимости снова вводить ее в машину.

Беббидж предложил также идею управления вычислительным процессом программным путем и соответствующую команду – аналог современной команды условного перехода: вопрос о выборе одного из двух возможных продолжений программы решался машиной в зависимости от знака некоторой вычисляемой величины.

Беббидж предусмотрел также специальный счетчик количества операций, который имеется у всех современных ЭВМ.

Таким образом, аналитическая машина Беббиджа была первой в мире программно-управляемой вычислительной машиной. Для этой машины были составлены и первые в мире программы, а первым программистом была Августа Ада Лавлейс (1815–1852) – дочь английского поэта Дж. Байрона. В ее честь один из современных языков программирования называется «Ада».

Современные ЭВМ по своей структуре очень близки к аналитической машине Беббиджа, но, в отличие от нее (и всех механических арифмометров), используют совершенно другой принцип реализации вычислений, основанный на двоичной системе счисления.

Двоичный принцип реализуется при помощи электромагнитного реле – элемента, который может находиться в одном из двух возможных состояний и переходить из одного состояния в другое при воздействии внешнего электрического сигнала.

Если в электромеханических арифмометрах использовались только энергетические свойства электричества, то в машинах, построенных на реле, электричество становится важнейшим и непосредственным участником вычислительного процесса.

Первая счетная машина, использующая электрические реле, была сконструирована в 1888 г. американцем немецкого происхождения Г. Холлеритом (1860–1929) и уже в 1890 г. применялась при переписи населения США. Эта машина, названная табулятором, имела в своем составе реле, счетчики, сортиро-

В наши дни ЭВМ все шире применяются для управления сложным производством.



вочный ящик. Данные наносились на перфокарты, почти не отличающиеся от современных, в виде пробивок. При прохождении перфокарты через машину в позициях, где имелись отверстия, происходило замыкание электрической цепи, на соответствующих счетчиках прибавлялось по единице, после чего перфокарта попадала в определенное отделение сортировочного ящика.

Развитие табуляторов и другой счетно-перфорационной техники позволило к концу 30-х – началу 40-х гг. нашего столетия построить такие универсальные вычислительные машины с программным управлением, у которых основными «считающими» элементами (по современной терминологии – элементная база) были электромеханические реле.

Релейные машины довольно долго находились в эксплуатации, несмотря на появление электронных. В частности, машина РВМ-1 конструкции советского инженера Н. И. Бессонова работала вплоть до 1965 г., однако релейные машины не могли долго конкурировать с электронными вычислительными машинами, так как росли требования к надежности и быстродействию.

Первые проекты электронных вычислительных машин появились лишь незначительно позднее проектов релейных машин, потому что необходимые для их создания изобретения были сделаны к концу 20-х гг. нашего столетия: в 1904 г. появилась двухэлектродная электронная лампа – диод; в 1906 г. – трехэлектродная электронная лампа – триод; в 1918 г. – электронное реле (ламповый триггер).

Первой электронной вычислительной машиной принято считать машину ЭНИАК (электронный числовой интегратор и вычислитель), разработанную в Пенсильванском университете в США. ЭНИАК была построена в 1945 г., она имела автоматическое программное управление, но внутреннее запоминающее устройство для хранения команд у нее отсутствовало.

Первой ЭВМ, обладающей всеми компонентами современных машин, была английская машина ЭДСАК, построенная в Кембриджском университете в 1949 г. На ней впервые был реализован принцип «хранимой программы», сформулированный в 1945–1946 гг. американским математиком Дж. Нейманом (1903–1957).

Этот принцип заключается в следующем:
команды и числа однотипны по форме представления в машине (записаны в двоичном коде);

числа размещаются в том же запоминающем устройстве, что и программа;

благодаря числовой форме записи команд программы машина может производить операции над командами.

Первой отечественной ЭВМ была малая электронная счетная машина (МЭСМ), разработанная в 1947–1951 гг. под руководством советского ученого, академика С. А. Лебедева (1902–1974), с именем которого связано дальнейшее развитие советской вычислительной техники.

МЭСМ выполняла всего 12 команд, номинальное быстродействие – 50 операций в секунду. Оперативная память МЭСМ, выполненная на триггерах, могла хранить 31 семнадцатиразрядное двоичное число и 64 двадцатиразрядные команды. Кроме этого, имелись внешние запоминающие устройства.

Интересно, что раздельное хранение в оперативной памяти МЭСМ чисел и команд противоречит неймановскому принципу хранимой программы, на котором в течение многих лет были основаны конструкции ЭВМ. У современных ЭВМ также наблюдается отход от этого принципа, в частности отпадает необходимость проведения операций над величинами, которыми закодированы команды программы.

В истории развития электронных вычислительных машин, начинающейся с ЭНИАК, ЭДСАК, МЭСМ и продолжающейся по настоящее время, обычно выделяют четыре периода, соответствующих четырем так называемым поколениям ЭВМ. Эти периоды могут быть выделены по разным признакам, из-за чего часто бывает трудно отнести конкретную машину к определенному поколению. Некоторые средние характеристики поколений приведены в таблице.

Пример отечественной машины БЭСМ-6 (главный конструктор – С. А. Лебедев) показывает, как иногда бывает трудно однозначно определить поколение машины. Разработка БЭСМ-6 была закончена в 1966 г.; элементная база – полупроводниковые транзисторы;

Характеристика поколений электронных вычислительных машин

Поколение ЭВМ	I	II	III	IV
Хронологические границы периодов	Начало 50-х – середина 50-х гг.	Конец 50-х – середина 60-х гг.	Конец 60-х – начало 70-х гг.	Середина 70-х гг.
Элементная база: процессоров	Вакуумные лампы	Полупроводниковые транзисторы	Интегральные схемы	Большие интегральные схемы (БИС)
оперативных запоминающих устройств (ОЗУ)	Ртутные линии задержки, электронно-лучевые трубки	Ферритовые сердечники	Ферритовые сердечники	
Производительность (количество операций в секунду)	10^4	10^6	10^7	10^8
Емкость ОЗУ (двоичных разрядов – бит)	10^4	10^6	10^7	$0{,}5 \cdot 10^8$
Емкость сверхоперативного ЗУ (бит)	10^2	$0{,}5 \cdot 10^3$	10^3	$0{,}5 \cdot 10^5$
Программное обеспечение, языки программирования	Машинный язык, библиотеки стандартных программ	Добавляются: языки высокого уровня, трансляторы с этих языков	Добавляются: языки управления заданиями, операционные системы, пакеты прикладных программ	Добавляются: непроцедурные языки, генераторы программ, операционные системы реального времени
Параллелизм при выполнении программ	Чисто последовательное выполнение команд	Выполнение команд с перекрытием: последующая команда начинает выполняться до окончания предыдущей	Выполнение команд с перекрытием, совмещенное с вводом – выводом	Параллельное: одновременно выполняются несколько команд над несколькими наборами операндов

Поколение ЭВМ	I	II	III	IV
Режим пользования	Монопольный (на единственном процессоре решается одна задача), прохождением задачи управляет пользователь	Монопольный, прохождением задачи управляет человек-оператор	Пакетный, коллективный (одновременно в решении находятся несколько задач), прохождением задач управляет операционная система	На многих процессорах может решаться одна задача (параллельно), прохождением задач управляет специальная машина – «толкач»
Производство	Индивидуальное	Серийное	Системы совместимых машин	Вычислительные комплексы
Область применения	Научные расчеты	Добавляются: технические расчеты	Добавляются: экономические расчеты	Добавляются: управление большими системами в реальном времени
Типичный представитель: отечественная ЭВМ зарубежная ЭВМ	 БЭСМ ИБМ-701	 БЭСМ-4 ИБМ-7090	 ЕС-1060 ИБМ-370/75	 «Эльбрус» КРЕЙ-1

производительность – 10^6 операций в секунду, емкость оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) – 10^6 бит. По этим признакам она относится ко второму поколению, по остальным – к третьему. Иногда ЭВМ разделяют по классам: мини-ЭВМ, малые, средние, большие и супер-ЭВМ.

Примером мини-ЭВМ может служить «Электроника Д3-28» с ОЗУ емкостью около $2 \cdot 10^5$ бит и быстродействием около 10^3 операций в секунду.

Пример супер-ЭВМ – многопроцессорный вычислительный комплекс (МВК) «Эльбрус» с ОЗУ емкостью 10^8 бит и быстродействием до $1{,}2 \cdot 10^8$ операций в секунду.

Большинство современных существующих и разрабатываемых ЭВМ образуют так называемые системы (семейства) машин с широким диапазоном вычислительной мощности. Например, для ЭВМ Единой Системы (ЕС ЭВМ) производительность меняется от 10^4 операций в секунду для младших машин до $2 \cdot 10^6$ операций в секунду для старших, а емкость ОЗУ – от $2{,}5 \cdot 10^5$ бит до $6 \cdot 10^6$ бит.

Машины, принадлежащие к одной системе, имеют программную и в значительной мере аппаратную совместимость снизу вверх. Программная совместимость снизу вверх означает, что любая программа, выполнявшаяся на младшей машине, должна без всяких переделок выполняться на старшей, при этом, разумеется, результаты расчета должны быть одними и теми же.

Широкое распространение получили также семейства малых ЭВМ (СМ ЭВМ) с быстродействием до $3 \cdot 10^6$ операций в 1 с и емкостью ОЗУ до $1{,}5 \cdot 10^7$ бит. ЕС ЭВМ – универсального назначения; основные области применения СМ ЭВМ – автоматизация технологических объектов и процессов, научных экспериментов и испытательных установок, проектно-конструкторских работ.

ЕС ЭВМ и СМ ЭВМ производятся в СССР и в других странах социалистического содружества.

В последнее время все более распространенным стал термин персональная ЭВМ (ПЭВМ), или персональный компьютер. ПЭВМ – это небольшая по размерам машина, которой пользуются и в быту, и в научной, инженерной, управленческой, редакционно-издательской и других областях деятельности. ПЭВМ относятся, как правило, к микро-ЭВМ, так как создаются на базе микропроцессора, т.е. на основе одной или нескольких больших интегральных схем.

При необходимости ПЭВМ могут быть соединены между собой или подсоединены к более мощным машинам, образуя так называемую вычислительную сеть. Например, типовое оборудование школьного кабинета информатики состоит из рабочего места преподавателя и 8–15 рабочих мест учащихся. На каждом из них установлены видеомонитор и ПЭВМ. Обычно она размещается в одном блоке с клавиатурой. Кроме этого на рабочем месте преподавателя установлены: печатающее устройство, память на магнитных дисках, графопостроитель, другие устройства. Линии связи обеспечивают передачу данных между рабочими местами преподавателя и ученика.

Современные ПЭВМ имеют быстродействие порядка 10^6 операций в секунду и ОЗУ емкостью 10^7–10^8 бит. Типичными примерами отечественных ПЭВМ могут служить машины: «Агат», «Корвет», ДВК-3 и ДВК-4, ЕС-1840 и ЕС-1841.

Г

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

Гармонический ряд – числовой ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots .$$

Называется он так потому, что каждый член гармонического ряда, начиная со второго, равен среднему гармоническому двух соседних (см. *Средние значения*). Члены гармонического ряда с возрастанием номера убывают и стремятся к нулю, однако частичные суммы $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$ неограниченно возрастают. Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1+\frac{1}{2},\ S_4 = S_2 + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) >$$

$$> S_2 + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 1+\frac{2}{2},$$

$$S_8 = S_4 + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) >$$

$$> S_4 + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right) > 1+\frac{3}{2}.$$

Продолжая эти рассуждения, приходим к выводу, что сумма 2^k членов гармонического ряда больше, чем $1 + k/2$. Отсюда следует, что частичные суммы гармонического ряда неограниченно возрастают, т. е. гармонический ряд является расходящимся (см. *Ряд*). Однако этот рост идет очень медленно. Л. *Эйлер*, изучавший свойства гармонического ряда, нашел, что

$S_{1000} \approx 7{,}48$, а $S_{1000000} \approx 14{,}39$.

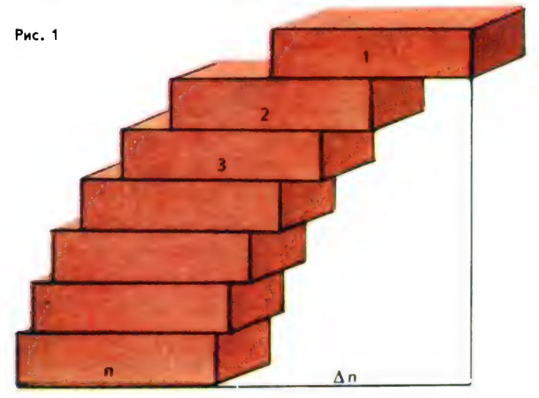


Рис. 1

Более того, Эйлер установил замечательную зависимость для частичных сумм гармонического ряда, показав, что существует предел разности $S_n - \ln n$, т. е. $\lim_{n\to\infty}(S_n - \ln n) = C$.

Число С в его честь называется постоянной Эйлера, она приближенно равна 0,5772 (сам Эйлер, исходя из других соображений, вычислил C с точностью до 15 знаков).

Представим себе «лесенку», сложенную из n одинаковых кирпичей, следующим образом: второй кирпич подложен под первый так, что центр тяжести первого приходится на правый край второго, затем под эти два кирпича подложен третий так, что общий центр тяжести первых двух приходится на правый край третьего и т. д. (рис. 1). У такой «лесенки» центр тяжести проецируется в точку A, следовательно, «лесенка» не упадет. Если длина кирпича l, то 1-й окажется сдвинутым относительно 2-го на $l/2$, 2-й окажется сдвинутым относительно 3-го на $l/4$, $(k+1)$-й относительно k-го на $l/2k$, и вся «лесенка» будет сдвинута вправо на

$$\Delta_n = \frac{l}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right).$$

Выражение в скобках есть частичная сумма S_{n-1} гармонического ряда. Следовательно, указанным способом можно сложить «лесенку», сдвинутую сколь угодно далеко вправо. Однако, как было замечено, Δ_n растет очень медленно. Например, если сложить 1000 кирпичей, то Δ_{1000} составит всего лишь 3,8 длины кирпича.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Геометрической прогрессией называют последовательность (b_n), у которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное (для данной прогрессии) число $q \neq 0$. Число q называют знаменателем прогрессии. Другими словами, геометрическая прогрессия – это последовательность, заданная по правилу: b_1 и q даны, $b_{n+1} = q \cdot b_n$ при $n \geqslant 1$. Случай, когда $b_1 = 0$, малоинтересен: получается последовательность из одних нулей. Поэтому в определение геометрической прогрессии часто включают условие $b_1 \neq 0$.

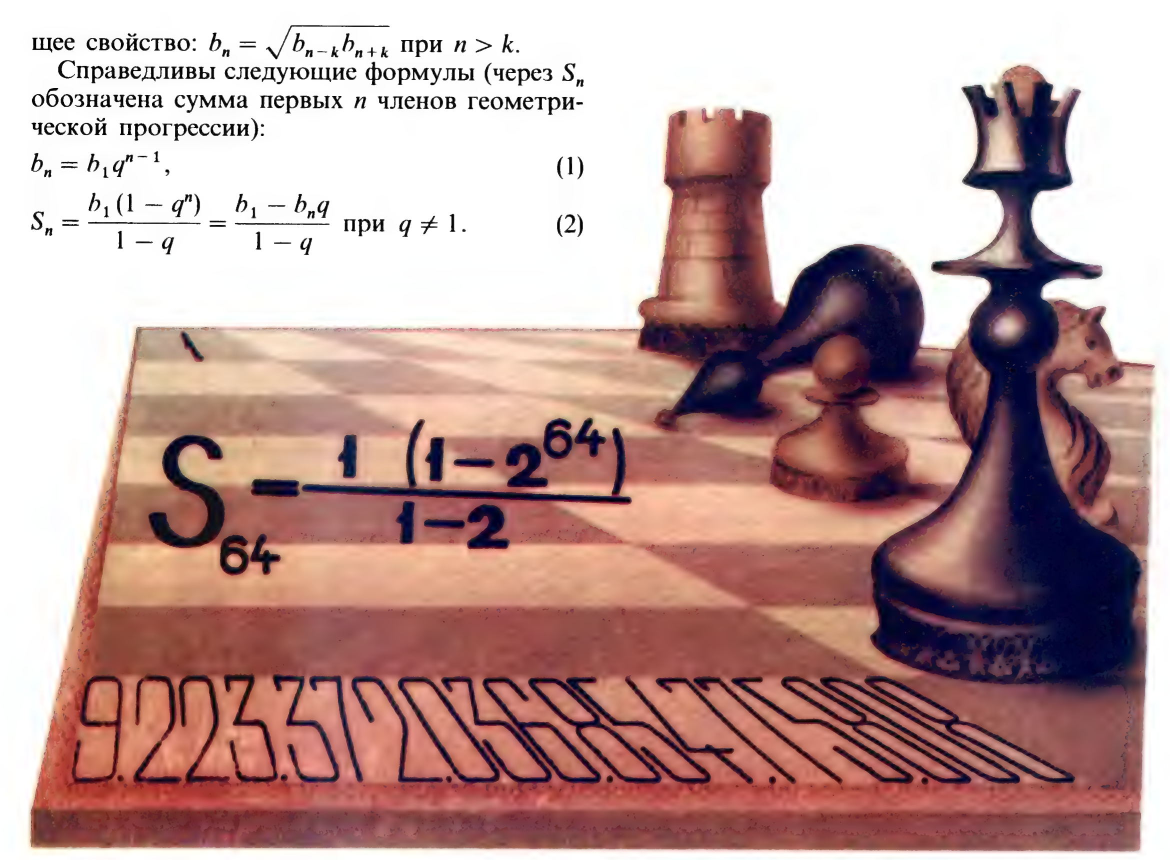
Каждый член геометрической прогрессии с положительными членами, начиная со второго, равен среднему геометрическому последующего и предыдущего членов: $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$. Этот факт отражается в названии рассматриваемой последовательности: геометрическая прогрессия. Верно и более об-

щее свойство: $b_n = \sqrt{b_{n-k} b_{n+k}}$ при $n > k$.

Справедливы следующие формулы (через S_n обозначена сумма первых n членов геометрической прогрессии):

$$b_n = b_1 q^{n-1}, \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} \text{ при } q \neq 1. \qquad (2)$$



При $q = 1$ геометрическая прогрессия одновременно является и *арифметической прогрессией*, при этом $S_n = nb_1$.

При $|q| < 1$ существует предел суммы первых n членов геометрической прогрессии при $n \to \infty$, называемый суммой бесконечно убывающей прогрессии. Из формулы (2) нетрудно усмотреть, что этот предел равен

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (3)$$

В своих сочинениях древнегреческий ученый Архимед неоднократно возвращался к вопросу о вычислении сумм прогрессий. Например, в трактате «О квадратуре параболы» он рассматривает задачу, эквивалентную задаче о нахождении суммы бесконечно убывающей прогрессии $a, b, c, d, e, \ldots$, знаменатель которой равен 1/4. Архимед решает эту задачу так: из определения прогрессии имеем $a = 4b$, $b = 4c$, $c = 4d$, ..., поэтому $b + c + d + e... +$ $+ 1/3(b + c + d + e + ...) =$ $= 4/3(b + c + d + e + ...) =$ $= 1/3(4b + 4c + 4d + 4e + ...) =$ $= 1/3(a + b + c + d + ...)$, откуда $b + c + d +$ $+ e + ... = \frac{1}{3}a$ и $a + b + c + d + e + ... = \frac{4}{3}a$.

Если $q > 1$, то члены геометрической прогрессии быстро растут. В результате при сравнительно небольших номерах n получаются числа-гиганты. С древнейших времен известны задачи и легенды, связанные с неправдоподобной на первый взгляд скоростью роста членов геометрической прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, ... Одна из наиболее известных легенд – легенда об изобретателе шахмат.

Индийский царь Шерам призвал к себе изобретателя шахмат (которого звали Сета) и предложил, чтобы он сам выбрал себе награду за создание интересной и мудрой игры. Царя изумила скромность просьбы, услышанной им от изобретателя: тот попросил выдать ему за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, за вторую – два, за третью еще в два раза больше, т. е. четыре, за четвертую – еще в два раза больше и т. д. Эта задача привлекла внимание Л. Н. Толстого. Приведем часть его расчета (шахматная доска здесь названа шашечницей): «Клеток в шашечнице 8 с одной стороны и 8 с другой; 8 рядов по 8 = 64

на 1-ю	1,	на 33-ю	4 294 967 296
на 2-ю	2,	на 34-ю	8 589 934 592
на 3-ю	4,	на 35-ю	17 179 869 184
на 4-ю	8,	на 36-ю	34 359 738 368

. . . .

на 62-ю	2 305 843 009 213 693 952
на 63-ю	4 611 686 018 427 387 904
на 64-ю	9 223 372 036 854 775 808

Если 40 000 зерен в одном пуде, то на одной последней клетке вышло 230 584 300 921 369 пудов». Общее число зерен составит число 18 446 744 073 709 551 615.

Формулы (1), (2), (3) остаются справедливыми и для геометрических прогрессий с комплексными числами. Например, с помощью формулы (3) для прогрессии, у которой

$$q = b_1 = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

и формулы Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

легко получить формулы

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

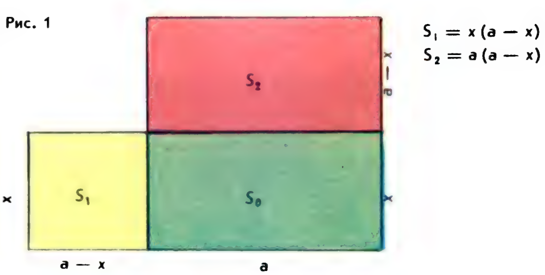
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

Задачи, где требуется определить условия, при которых некоторая величина принимает наибольшее и наименьшее значение, принято называть задачами «на экстремум» (от латинского слова *extremum* – «крайний») или задачами «на максимум и минимум» (от латинских *maximum* и *minimum* – соответственно «наибольшее» и «наименьшее»). Такие задачи часто встречаются в технике и естествознании, в повседневной деятельности людей.

Как из круглого бревна выпилить прямоугольную балку с наименьшим количеством отходов? Каких размеров должен быть ящик, чтобы при заданном расходе материала его объем был наибольший? В каком месте следует построить мост через реку, чтобы дорога, проходящая через него и соединяющая два города, была кратчайшей?

Эти задачи (им легко можно придать геометрический вид) имеют большое практическое значение. С их помощью можно решить важный во всяком деле вопрос, как, по словам русского математика П. Л. Чебышева, «располагать средствами своими для достижения по возможности большей выгоды». Уметь решать подобные задачи очень важно, и поэтому они привлекают большое внимание математиков.

Рис. 1



Самая простая и, вероятно, самая древняя геометрическая задача на экстремум такая: какой из всех прямоугольников заданного периметра имеет наибольшую площадь? Решение ее было известно древнегреческой математике. Оно изложено в VI книге «Начал» Евклида (см. *Евклид и его «Начала»*), где доказывается, что если рассмотреть прямоугольник и квадрат одного и того же периметра, то площадь квадрата будет больше. Доказательство очень простое, оно основано на сравнении площадей (рис. 1). Площадь прямоугольника равна $S_0 + S_1$, а площадь квадрата $S_0 + S_2$ и $S_1 < S_2$, если $x < a$. Таким образом, мы получаем, что из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат. В решении Евклида, во-первых, указан ответ (квадрат) и, во-вторых, доказано, что по площади он превосходит все другие возможные фигуры (прямоугольники данного периметра). Именно так понимается в математике решение задачи на экстремум: дать ответ и доказать его экстремальное свойство.

Рассмотренная задача относится к широкому классу геометрических задач на экстремум – так называемым изопериметрическим задачам, в которых фигура с экстремальным свойством отыскивается среди других с равным периметром. Изопериметрические задачи рассматривались древнегреческим математиком Зенодором, жившим во II–I вв. до н. э. Ему приписывают, например, доказательство следующих утверждений:

из всех многоугольников с равным периметром и равным числом сторон наибольшую площадь имеет правильный многоугольник;

из двух правильных многоугольников с равным периметром большую площадь имеет тот, у которого число углов больше.

Зенодор также формулирует изопериметри-

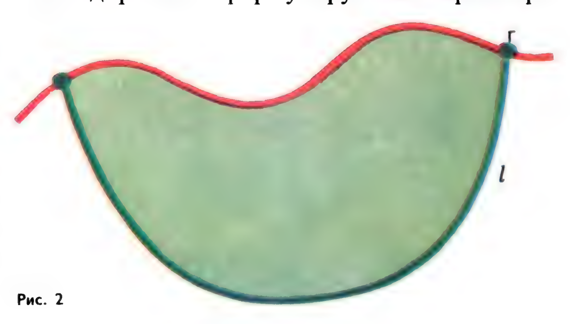
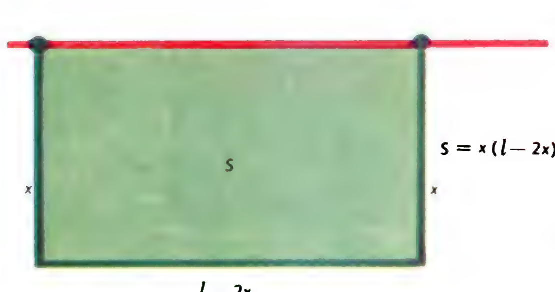


Рис. 2

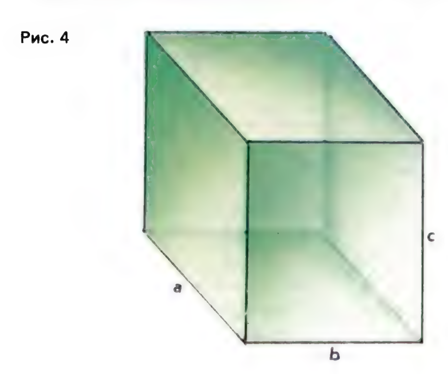
Рис. 3



ческое свойство круга: из всех плоских фигур с равным периметром наибольшую площадь имеет круг, но полным доказательством этого свойства греческая математика не располагала. Строгое доказательство было дано только в XIX в.

Изопериметрические задачи объединяют также еще одним названием – «задачи Дидоны».

Рис. 4



Они названы так по имени легендарной основательницы города Карфагена и его первой царицы. Согласно легенде, вынужденная бежать из своего родного города, Дидона вместе со своими спутниками прибыла на северный берег Африки и хотела приобрести у местных жителей землю для нового поселения. Ей согласились уступить участок земли, однако не больше, чем объемлет воловья шкура. Хитроумная Дидона разрезала воловью шкуру на узкие ремешки и, разложив их, сумела ограничить гораздо бо́льшую площадь по сравнению с той, которую можно было покрыть одной воловьей шкурой.

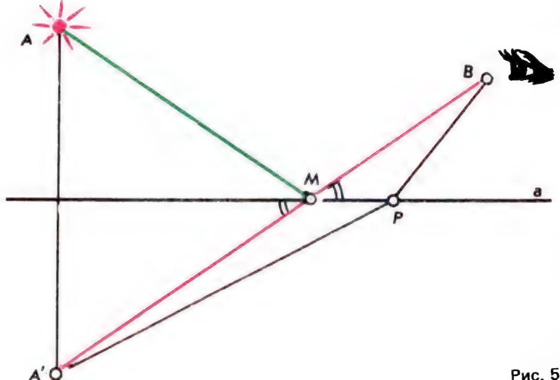


Рис. 5

Если учесть, что Дидона выбирала участок, примыкающий к берегу моря, то математическую задачу, с которой она столкнулась, можно сформулировать так: какой формы должна быть кривая длины l, чтобы площадь фигуры, ограниченная этой кривой и заданной линией Г, была наибольшей? (Рис. 2.)

В некоторых частных случаях задача Дидоны имеет простое решение. Например, если береговая линия есть прямая и ограничиваемый участок прямоугольной формы (рис. 3), то наибольшую площадь будет иметь прямоугольник с длинами сторон $l/4$ и $l/2$, примыкающий большей стороной к береговой линии. Решать задачу можно, используя, например, свойства *квадратного трехчлена.*

В общем случае, когда береговая линия – кривая Г – произвольной формы, задача Дидоны очень сложна и решается с привлечением понятий и методов математического анализа (см. *Дифференциальное исчисление*). Решение ее относится к специальному разделу высшей математики, так называемому вариационному исчислению.

Заметим, что в математическом анализе разработаны очень сильные общие способы решения задач на экстремум (нахождение экстремумов функций). Геометрические задачи на экстремум могут быть сведены к алгебраическим и также решены методами математического анализа. Однако иногда эти задачи удается решить элементарными методами, при этом решения бывают весьма изящны и поучительны.

Одним из сильных методов решения геометрических задач на экстремум является применение неравенств, в частности неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см. *Средние значения*). Для примера рассмотрим такую задачу: каких размеров должен быть ящик (прямоугольный параллелепипед), чтобы при заданной площади поверхности его объем был наибольшим? Пусть a, b, c – длины трех ребер (рис. 4), S – площадь полной поверхности, V – объем. Очевидно, что $S = 2(ab + bc + ac)$, а $V = abc$. Если заметить, что сумма трех величин ab, bc, ac равна $S/2$, а их произведение равно V^2, и применить неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, то будем иметь:

$$\sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac} \leqslant \frac{ab + bc + ac}{3}, \text{ т.е.}$$

$$V^{2/3} \leqslant \frac{S}{6} \text{ или } V \leqslant \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}.$$

Как следует из теоремы о среднем, знак равенства достигается лишь в случае $ab = bc = ac$, т.е. при $a = b = c$, и при этом значение объема V принимает наибольшее возможное значение. Отсюда заключаем, что среди всех ящиков с заданной площадью полной поверх-

ности наибольший объем имеет ящик кубической формы.

Назовем еще метод симметрии, эффективный при решении некоторых геометрических задач на экстремум. Суть его применения станет ясна, если мы рассмотрим такую простую задачу: на прямой a требуется найти такую точку M, чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B, лежащих по одну сторону от прямой, имела наименьшее возможное значение (рис. 5).

Пусть точка A' симметрична точке A относительно прямой a, а точка M – точка пересечения прямых $A'B$ и a. Точка M и будет искомой. Действительно,

$$|AM|+|MB|=|A'M|+|MB|=|A'B|.$$

Для любой другой точки P прямой a справедливо неравенство:

$$|AP|+|PB|=|A'P|+|PB|>|A'B|$$

(последнее следует из того, что ломаная длиннее отрезка, соединяющего ее концы).

Решение этой задачи приписывают Герону Александрийскому, жившему в I в. Решал он, правда, физическую задачу: если в точке A находится источник света, а в точке B – глаз, то в какой точке M отразится от плоского зеркала выходящий из точки A световой луч, если известно, что угол падения равен углу отражения? (Последний факт был известен задолго до Герона Александрийского).

Как легко заметить, построенная выше точка M как раз такова, что угол между прямыми AM и a равен углу между прямыми MB и a, т.е. точка M и будет точкой отражения светового луча.

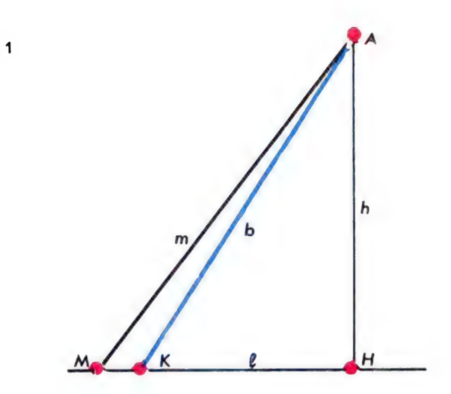
Из решения этой задачи Герон сделал такой вывод: отражаемый луч света выбирает кратчайший возможный путь между источником света и глазом. Заметим, что это один из первых примеров в истории науки, когда при описании физического явления использовался «принцип минимума», согласно которому природа всегда стремится избрать наиболее экономный способ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

Построения с помощью циркуля и линейки. Назначение циркуля и линейки известно всем школьникам: линейкой проводят прямые (точнее, отрезки), а циркулем – окружности, им откладывают и отрезки заданных длин (правда, для этого в наши дни чаще используют его разновидность – измеритель).

В школе изучают ряд простейших построений циркулем и линейкой (односторонней, без делений): построение прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной или параллельной данной прямой, деление отрезка на несколько равных частей, деление пополам заданного угла.

Рис. 1



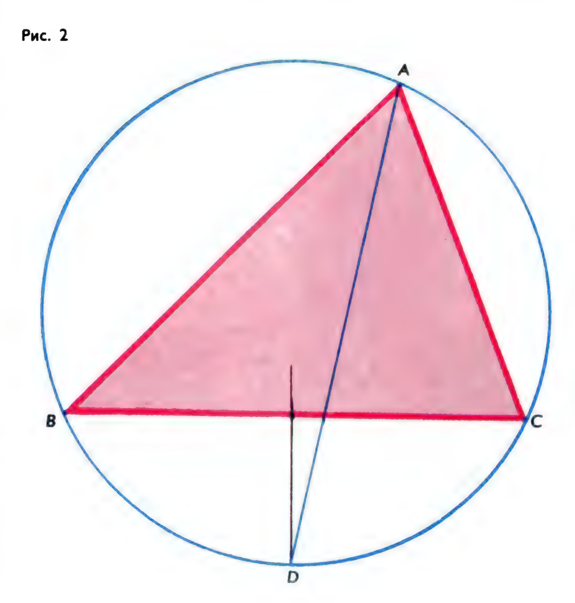
А вот пример уже более сложной задачи: «Построить треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, выходящим из одной его вершины».

Как нетрудно убедиться, построение возможно лишь в том случае, если длины высоты h, биссектрисы b и медианы m либо одинаковы, либо удовлетворяют соотношению $h < b < m$; в противном случае искомого треугольника не существует.

Если провести на плоскости произвольную прямую l и восставить из некоторой ее точки H перпендикуляр к этой прямой, а затем отложить на нем отрезок AH длины h, то можно считать, что точка A – одна из вершин искомого треугольника, а прямая l будет содержать его основание. Отметив точки K и M пересечения прямой l с окружностями радиусов b и m, центры которых находятся в точке A (рис. 1), и проведя их радиусы AK и AM, находят биссектрису и медиану нашего треугольника. (Заметим, что биссектриса всегда лежит между медианой и высотой.)

Дальнейшее построение основано на до-

Рис. 2



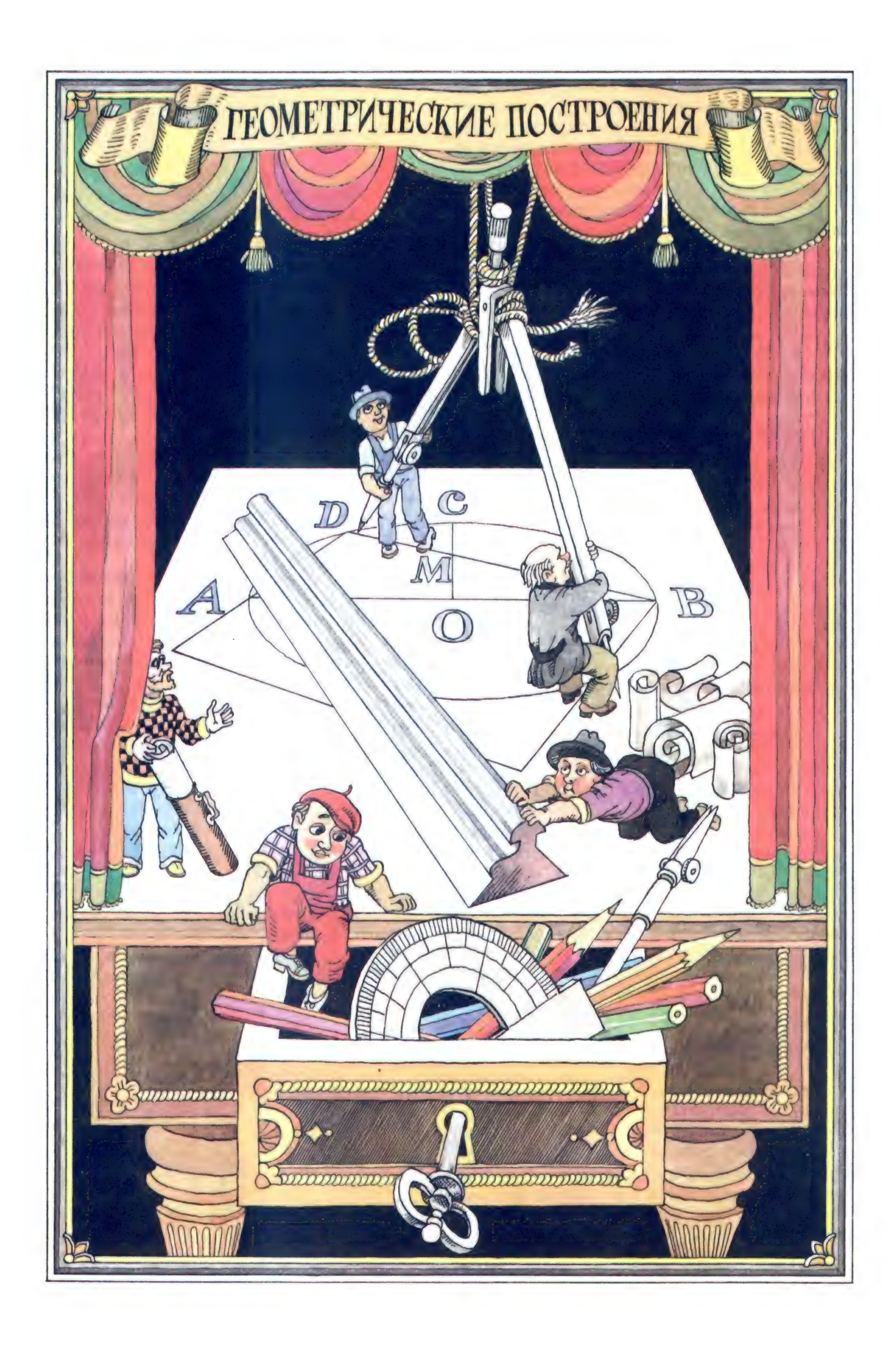
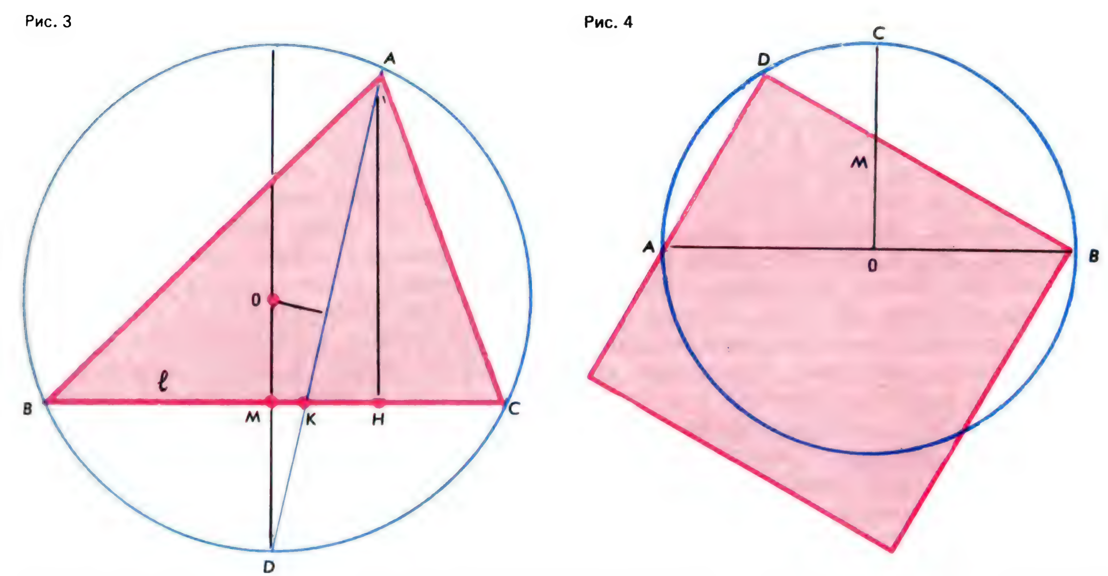

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ
D
C
M
A
O
B

Рис. 3

Рис. 4



вольно простом, но редко отмечаемом факте: биссектриса угла треугольника и серединный перпендикуляр к стороне, противолежащей этому углу, пересекаются в точке D, лежащей на окружности, описанной вокруг рассматриваемого треугольника, поскольку оба они делят пополам дугу этой окружности, стягиваемую указанной стороной (хордой) и не содержащую вершины A (рис. 2).

Окончательное построение теперь уже просто. Через точку M проводят перпендикуляр к прямой l и продолжают биссектрису AK до пересечения с ним в точке D (рис. 3). Итак, точки A и D лежат на окружности, описанной вокруг искомого треугольника, а ее центр O, очевидно, находится на серединном перпендикуляре к хорде BC и на серединном перпендикуляре к отрезку AD, являющемуся также одной из ее хорд. Построив точку O как точку пересечения указанных серединных перпендикуляров, можно провести окружность, описанную вокруг искомого треугольника, поскольку известны центр O и радиус OA. Точки пересечения этой окружности с прямой l

ТЕОРЕМА МОРЛИ

Одна из трех знаменитых задач древности – задача о делении произвольного угла на три равные части. Лишь сравнительно недавно было доказано, что деление угла с помощью циркуля и линейки не всегда возможно. Видимо, этим объясняется то, что лишь в 1899 г. был открыт следующий удивительный факт: если в произвольном треугольнике разделить каждый угол на три равные части, то точки пересечения делящих их лучей (рис. 1) окажутся вершинами равностороннего треугольника. Эта теорема получила название теоремы Франка Морли, по имени американского математика, открывшего этот факт. Позже было замечено, что этим свойством обладают также и точки пересечения лучей, делящих на равные части внешние углы произвольного треугольника (рис. 2).

Рис. 1

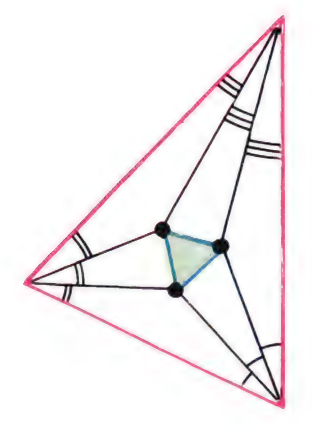
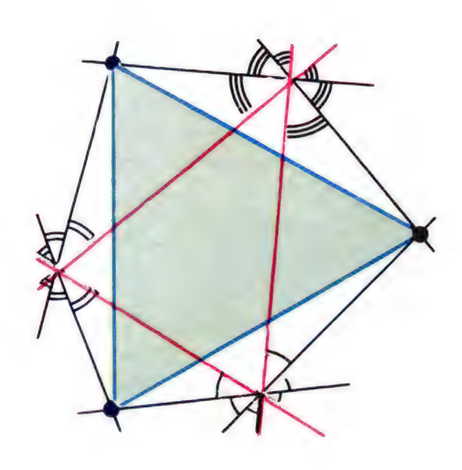


Рис. 2



являются недостающими вершинами B и C искомого треугольника. Остается лишь соединить концы отрезка BC с точкой A.

Искусство построения геометрических фигур при помощи циркуля и линейки было в высокой степени развито в Древней Греции. Одна из труднейших задач на построение, которую уже тогда умели выполнять,– построение окружности, касающейся трех данных окружностей. Эта задача называется задачей Аполлония – по имени греческого геометра Аполлония из Перги (ок. 200 г. до н. э.).

Однако древним геометрам никак не удавалось выполнить некоторые построения, используя лишь циркуль и линейку, а построения, выполненные с помощью других инструментов, не считались геометрическими. К числу таких задач относятся так называемые три знаменитые *классические задачи древности*: квадратура круга, трисекция угла и удвоение куба, а именно построение квадрата, равновеликого данному кругу, деление произвольного угла на три равные части и построение стороны куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба.

Эти три задачи привлекали внимание выдающихся математиков на протяжении столетий, и лишь в середине прошлого века была доказана их неразрешимость, т. е. невозможность указанных построений лишь с помощью циркуля и линейки. Эти результаты были получены средствами не геометрии, а алгебры, что еще раз подчеркнуло единство математики. Однако до сих пор еще встречаются люди, которые пытаются найти решения указанных задач при помощи циркуля и линейки.

Еще одной интереснейшей задачей на построение с помощью циркуля и линейки является задача построения правильного многоугольника с заданным числом сторон. Древние греки умели строить правильный треугольник, квадрат, правильный пятиугольник и пятнадцатиугольник, а также все многоугольники, которые получаются из них удвоением числа сторон, и только их.

Новый шаг в решении поставленной задачи был сделан лишь в 1801 г. немецким математиком *К. Гауссом*, который открыл способ построения правильного семнадцатиугольника при помощи циркуля и линейки и указал все значения n, при которых возможно построение правильного n-угольника указанными средствами. Этими многоугольниками оказались лишь многоугольники, у которых количество сторон является простым числом Ферма (т. е. простым числом вида $2^{2^n}+1$) (см. *Ферма малая теорема*) или произведением нескольких различных простых чисел Ферма, а также те, которые получаются из них путем удвоения числа сторон. Таким образом, с помощью циркуля и линейки оказалось невозможным построить правильный семиугольник, девяти-, одиннадцати-, тринадцатиугольник и т. д.

Другие геометрические построения. Однако в практических построениях нас никто не ограничивает в выборе математических инструментов, которых со времен древнегреческих математиков было создано великое множество. Чтобы выполнить большинство построений с нужной точностью, достаточно линейки с делениями и траспортира. Заметим, что точка, нанесенная карандашом на бумаге, отнюдь не является идеально математической точкой, а имеет определенные размеры, как и точка, полученная пересечением двух прямых, проведенных карандашом, особенно если угол между ними мал.

Довольно любопытны некоторые приближенные способы построения. Например, приближенная квадратура круга получается, если за сторону квадрата взять хорду, проходящую через конец одного из радиусов круга (OB) и середину перпендикулярного ему радиуса (OC) (рис. 4). Этому построению соответствует значение $\pi \approx 3{,}2$.

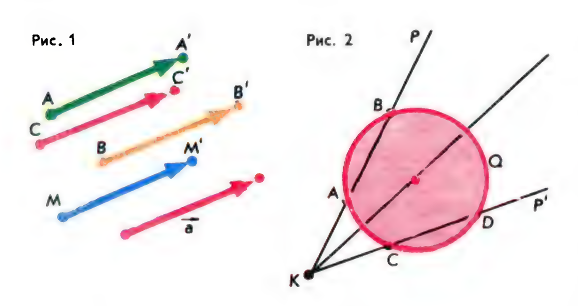
Теория построений при помощи циркуля и линейки получила широкое развитие в конце XIX в. Например, было показано, что любое построение, выполняемое с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью лишь одной линейки, если в плоскости построения задана некоторая окружность и указан ее центр.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Геометрическое преобразование плоскости – взаимно-однозначное отображение этой плоскости на себя. Наиболее важными геометрическими преобразованиями являются движения, т. е. преобразования, сохраняющие расстояние. Иначе говоря, если f – движение плоскости, то для любых двух точек A, B этой плоскости расстояние между точками $f(A)$ и $f(B)$ равно $|AB|$.

Движения связаны с понятием равенства (конгруэнтности) фигур: две фигуры F и G плоскости α называются равными, если существует движение этой плоскости, переводящее первую фигуру во вторую. Фактически это определение использовал еще Евклид (см. *Геометрия*), называвший две фигуры равными, если одну из них можно наложить на другую так, чтобы они совпали всеми своими точками; под наложением здесь следует понимать перекладывание фигуры как твердого целого (без изменения расстояний), т. е. движение.

Примерами движений плоскости являются

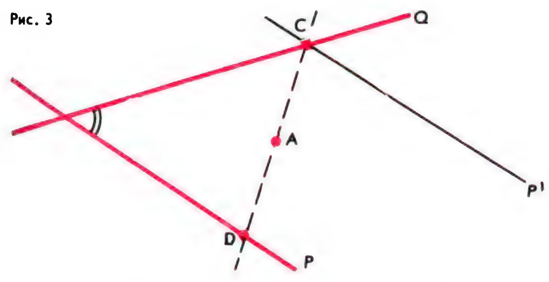


осевая и центральная симметрия, параллельный перенос, поворот. Как пример, напомним определение параллельного переноса. Пусть $\vec{a}$ – некоторый вектор плоскости α. Геометрическое преобразование, переводящее каждую точку $A \in \alpha$ в такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$ (рис. 1), называется параллельным переносом на вектор $\vec{a}$. Параллельный перенос является движением: если точки A и B переходят в A' и B', т.е. $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{a}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = -\vec{a} + \overrightarrow{AB} + \vec{a} = \overrightarrow{AB}$, и потому $|A'B'| = |AB|$.

При решении геометрических задач с помощью движений часто применяется свойство сохранения пересечения: при любом движении f пересечение фигур переходит в пересечение их образов, т.е. если P, Q – произвольные фигуры, то фигура $P \cap Q$ переходит в результате движения f в фигуру $f(P) \cap f(Q)$. (Аналогичное свойство справедливо для объединения.)

Задача 1. Окружность, центр которой принадлежит биссектрисе угла, пересекает его стороны в точках A, B, C и D (рис. 2). Доказать, что $|AB| = |CD|$.

Решение. Обозначим через P одну из сторон угла, а через Q – круг, границей которого является рассматриваемая окружность. При симметрии s относительно биссектрисы угла луч P переходит в луч P', который образует вторую сторону угла, а круг Q переходит в себя: $s(P) = P'$, $s(Q) = Q$. Согласно свойству сохранения пересечения фигура $P \cap Q$ переходит



в $s(P) \cap s(Q)$, т.е. в $P' \cap Q$. Иначе говоря, отрезок AB переходит в отрезок CD, и потому $|AB| = |CD|$.

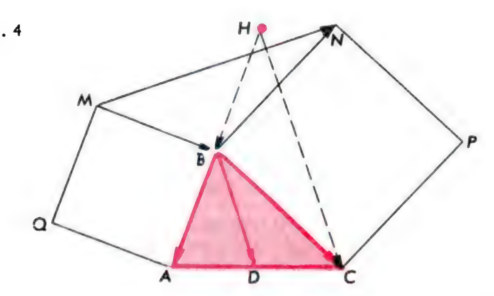
Задача 2. Через точку A, данную внутри угла (меньшего, чем развернутый), провести прямую, отрезок которой, заключенный между сторонами угла, делится в этой точке пополам.

Решение. Обозначим через z симметрию относительно точки A, а через P и Q – прямые, на которых лежат стороны угла (рис. 3). В результате симметрии z прямая P переходит в параллельную ей прямую P', которая пересекает вторую сторону угла в точке C. Так как $C \in P'$, то точка D, симметричная C, принадлежит прямой, которая симметрична P', т.е. $D \in P$. Таким образом, точки $D \in P$ и $C \in Q$ симметричны относительно A, и потому отрезок CD делится в точке A пополам, т.е. прямая CD – искомая.

Нетрудно понять, почему в задаче 1 была применена осевая, а в задаче 2 – центральная симметрия. Так как биссектриса угла – его ось симметрии, то попытка применить осевую симметрию в задаче 1 совершенно естественна (так же, как и применение центральной симметрии в задаче 2, поскольку отрезок CD должен делиться в точке A пополам, т.е. искомые точки C и D должны быть симметричными относительно точки A). И в других случаях анализ условия задачи позволяет найти движение, применение которого дает решение.

Задача 3. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABMQ$ и $BCPN$. Доказать, что отрезок MN перпендикулярен медиане BD треугольника ABC и вдвое длиннее этой медианы.

Решение. Попытаемся применить поворот на $90°$, т.е. убедиться, что при повороте на $90°$ вокруг точки B (по часовой стрелке) отрезок MN перейдет в отрезок, параллельный BD и имеющий вдвое большую длину. При этом повороте вектор $\overrightarrow{MB}$ переходит в $\overrightarrow{HB}$ (рис. 4), а вектор $\overrightarrow{BN}$ в $\overrightarrow{BC}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}$ переходит в $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}$, т.е. в $\overrightarrow{HC}$. Но так как $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{BA}$, то $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD}$. Итак, при повороте на $90°$ вектор $\overrightarrow{MN}$ переходит в $\overrightarrow{HC}$, т.е. в вектор, равный $2\overrightarrow{BD}$. Отсюда вытекает, что $MN \perp BD$ и $|MN| = 2|BD|$.



Весьма существенна связь движений с ориентацией. На рис. 5 изображен многоугольник F, на контуре которого задано положительное направление обхода (против часовой стрелки). При параллельном переносе получается многоугольник с тем же направлением обхода, т.е. параллельный перенос сохраняет направление обхода, или, как говорят, сохраняет ориентацию. Поворот (в частно-

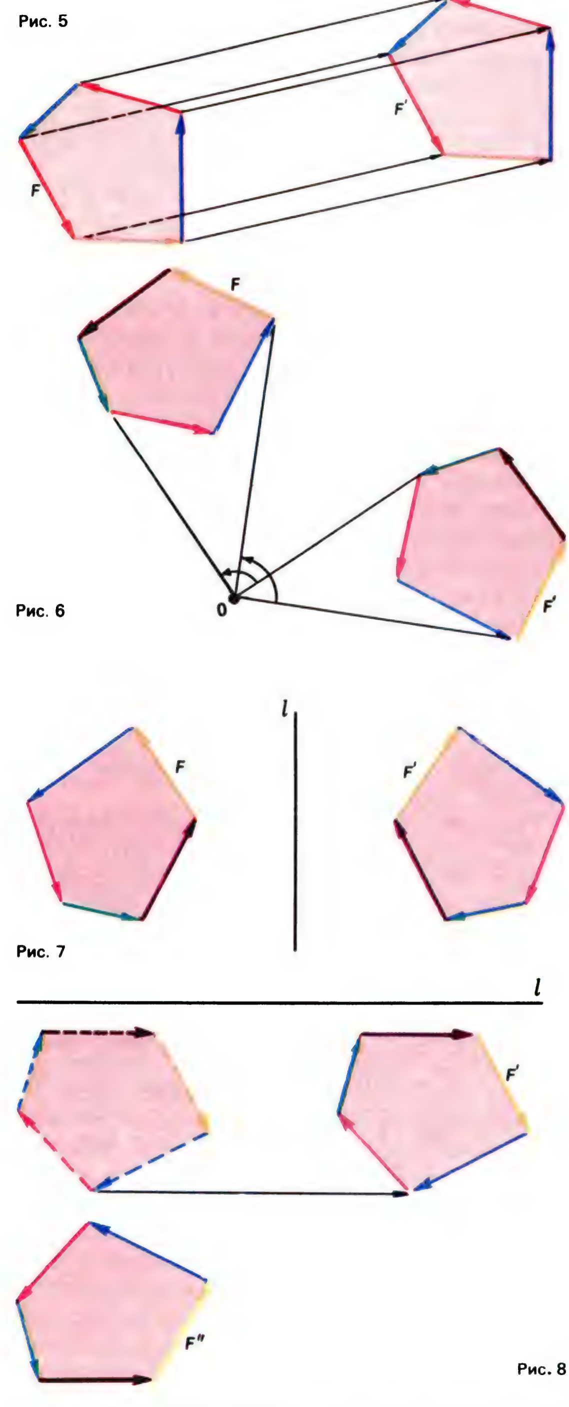


Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

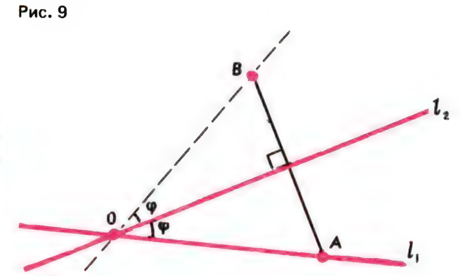
сти, центральная симметрия, представляющая собой поворот на 180°) также сохраняет ориентацию (рис. 6). Напротив, осевая симметрия меняет направление обхода на противоположное (рис. 7), т. е. меняет ориентацию. Другой пример движения, меняющего ориентацию – скользящая симметрия, т. е. композиция симметрии относительно некоторой прямой l и параллельного переноса, вектор которого параллелен l (рис. 8).

Французский механик и геометр XIX в. М. Шаль сформулировал следующую теорему: всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом; всякое меняющее ориентацию движение плоскости является либо осевой, либо скользящей симметрией.

Задача 4. Доказать, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями представляет собой поворот.

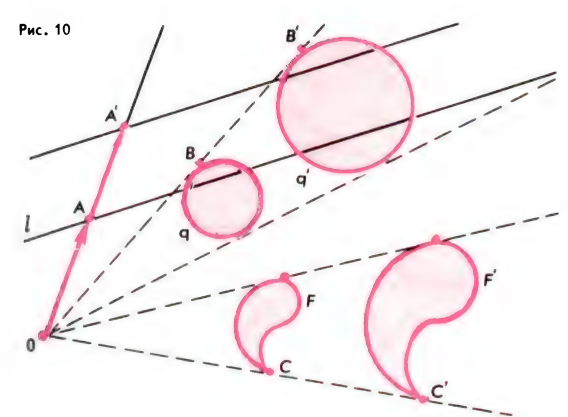
Решение. Пусть s_1 и s_2 – осевые симметрии, оси которых (прямые l_1 и l_2) пересекаются в точке O. Так как оба движения s_1, s_2 меняют ориентацию, то их композиция $s_2 \circ s_1$ (сначала выполняется s_1, затем s_2) является движением, сохраняющим ориентацию. По теореме Шаля, $s_2 \circ s_1$ есть либо параллельный перенос, либо поворот. Но так как при каждом движении s_1, s_2 точка O неподвижна, то и при их композиции точка O остается на месте. Следовательно, $s_2 \circ s_1$ есть поворот вокруг точки O. Как найти угол поворота, понятно из рис. 9: если φ – угол между прямыми l_1 и l_2, то (поскольку точка $A \in l_1$ переводится движением s_1 в себя, а движением s_2 – в симметричную относительно l_2 точку B) движение $s_2 \circ s_1$, переводящее A в B, представляет собой поворот (вокруг точки O) на угол 2φ.

Рис. 9

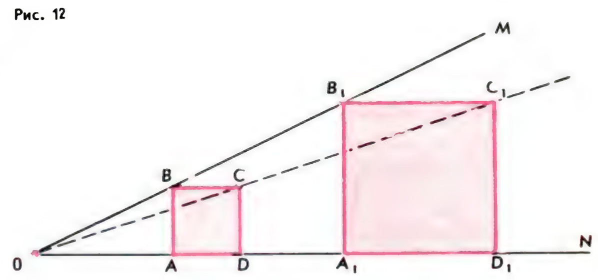


Следующую по важности группу геометрических преобразований плоскости составляют преобразования подобия. Наиболее простое из них – гомотетия. Напомним, что гомотетией с центром O и коэффициентом $k \neq 0$ называется геометрическое преобразование, которое произвольно взятую точку A переводит в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ (рис. 10). Гомотетия переводит каждую прямую в параллельную ей прямую, каждую окружность снова переводит в окружность. Гомотетия сохраняет углы, а все длины увеличивает в $|k|$ раз: если при гомотетии точки A, B переходят в $A'B'$, то $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$. Из этого вытекает, что гомотетия сохраняет форму (но не размеры) фигур; если, например, $k > 1$, то фигура F', в которую переходит фигура F при гомотетии с центром O и коэффициентом k, представляет собой увеличенную копию фигуры F (рис. 10), а если $0 < k < 1$ – уменьшенную копию.

Поскольку при гомотетии все длины изменяются в одинаковое число раз, отношение длин не меняется. На этом основаны различные способы оценки расстояний; напри-



и проведя луч OC, мы сможем найти вершину C' искомого квадрата (т. е. точку пересечения луча OC с дугой MN сектора), а затем достроить искомый квадрат (рис. 13).



мер, зная длину руки и длину большого пальца и прикинув, сколько раз большой палец вытянутой руки укладывается в видимом образе предмета, можно найти отношение высоты вертикального предмета к расстоянию до него (на рис. 11 имеем $|AB|:|BO| = |A'B'|:|B'O|$, откуда, измерив $|BO|$, можно найти $|AB|$, а потому и высоту трубы, которая примерно втрое больше $|AB|$).

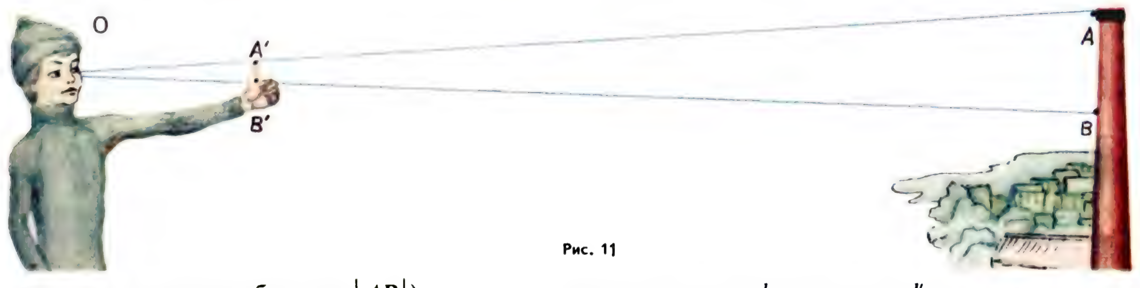
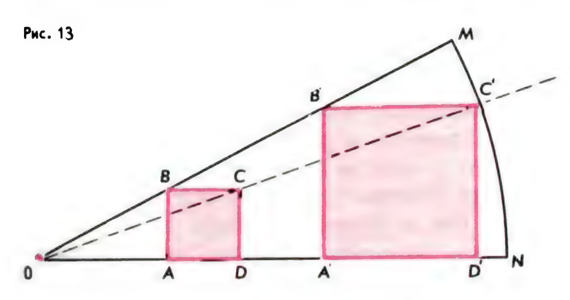


Рис. 11

Задача 5. Построить квадрат, вписанный в данный сектор (две вершины квадрата лежат на одном радиусе, третья – на другом, четвертая – на дуге сектора).

Решение. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 12) – два квадрата, вписанные в угол



MON. При гомотетии с центром O, переводящей точку B в B_1 (коэффициент этой гомотетии равен $k = |OB_1|/|OB|$), отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, а потому квадрат $ABCD$ переходит в квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (поскольку углы, а также отношение отрезков сохраняются). Из этого вытекает, что вершины C и C_1 лежат на одном луче, исходящем из точки O. Теперь ясно, что, построив какой-нибудь квадрат $ABCD$, вписанный в угол MON,

Преобразование f плоскости α называется подобием с коэффициентом $k > 0$, если для любых точек A, B плоскости α расстояние между точками $f(A)$ и $f(B)$ равно $k \cdot |AB|$. Любое подобие (как и гомотетия – частный случай подобия) сохраняет углы, а также отношение длин, т. е. сохраняет форму фигур. Однако, в отличие от гомотетии, подобие может переводить прямую l в прямую l', не параллельную ей.

На рис. 14 изображены два плана P и P_1 одного и того же участка местности, выполненные в разных масштабах и по-разному лежащие на плоскости. Эти планы представляют собой подобные, но не гомотетичные фигуры; например, прямая AB и соответствующая ей прямая A_1B_1 не параллельны. Чтобы получить план P_1, исходя из плана P, можно поступить так: сначала повернуть план P, чтобы его стороны стали параллельными сторонам плана P_1, а затем применить гомотетию. Иначе говоря, план P_1, подобный P, получается из P при помощи композиции движения (поворота) и гомотетии.

Указанное обстоятельство является общим, т. е. всякое подобие g представляется в виде композиции $h \circ f$, где f – движение, а h – гомотетия. Из этого ясно, что при решении задач методом подобия можно ограничиваться лишь рассмотрением гомотетии (сопровождаемой некоторым движением). Это имеет определенные удобства: вспомните, с каким напряженным вниманием отыскиваются соответственные стороны по-разному расположенных подобных треугольников при выписы-

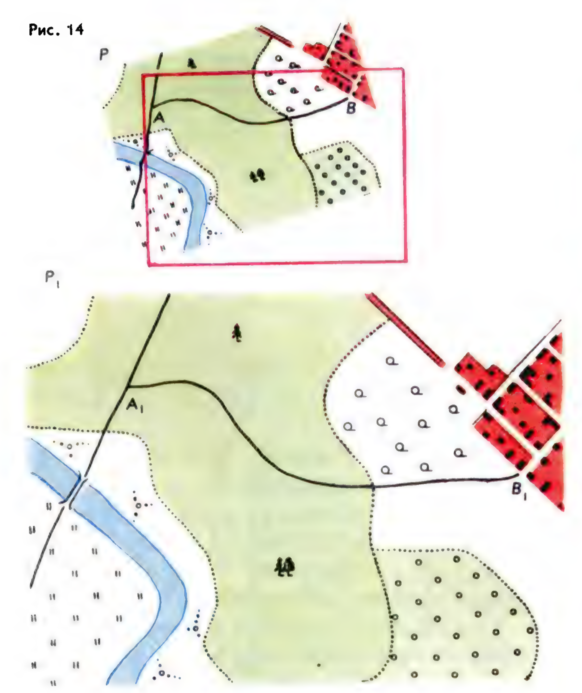


Рис. 14

вании равенства отношений сторон (и с какой легкостью выписываются эти отношения для гомотетичных треугольников).

Задача 6. Стороны треугольника ABC связаны соотношением $a^2 = c(b+c)$. Доказать, что угол A вдвое больше угла C.

Решение. Пусть D – такая точка прямой AB, что $|AD| = b$, причем A лежит между B и D (рис. 15). Тогда треугольник ACD – равнобедренный, и потому $\angle 1 = \angle 2$; кроме того, $|BD| = b + c$. При симметрии относительно биссектрисы угла B точки A и C перейдут в такие точки A' и C', что $|BA'| = |BA| = c$,

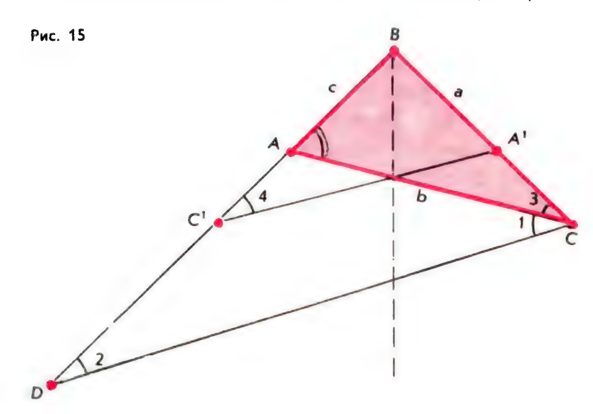


Рис. 15

$|BC'| = |BC| = a$; кроме того $\angle 3 = \angle 4$. Равенство $a^2 = c(b+c)$ можно переписать в виде

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a}{c}, \text{ т.е. } \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{|BC'|}{|BA'|},$$

откуда следует, что при гомотетии с центром B и коэффициентом $k = |BD|/|BC'|$ точки D, C переходят в C', A'. Следовательно, $DC \parallel C'A'$ и потому $\angle 2 = \angle 4$, т.е. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$. Так как BAC – внешний угол треугольника ACD, то он равен сумме углов $\angle 1$ и $\angle 2$, т.е. равен удвоенному углу C.

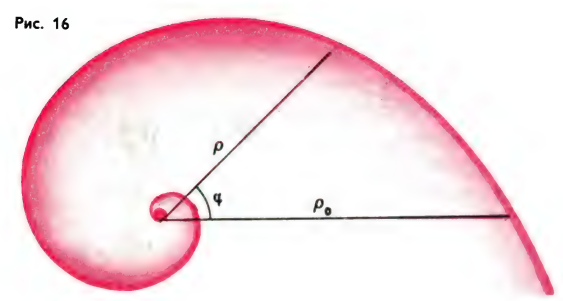


Рис. 16

В заключение рассказа о преобразованиях подобия заметим, что они составляют группу преобразований и потому (см. *Геометрия*) согласно Эрлангенской программе определяют «свою» геометрию. Инвариантами этой группы (т.е. теми свойствами, которые сохраняются при всех преобразованиях подобия и изучаются в геометрии подобий) являются угол, отношение длин двух отрезков, параллельность двух прямых и т.д. Хотя длина отрезка уже не сохраняется, но в силу сохранения отношения длин в геометрии подобий можно говорить о равнобедренном треугольнике (т.е. о треугольнике, в котором отношение длин боковых сторон равно 1). Теорема о том, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, сохраняется и в геометрии подобий. Сохраняется также тео-

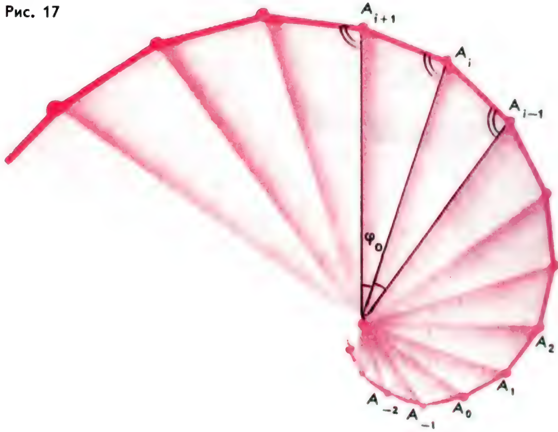


Рис. 17

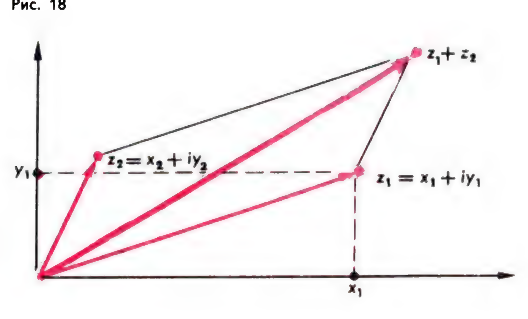
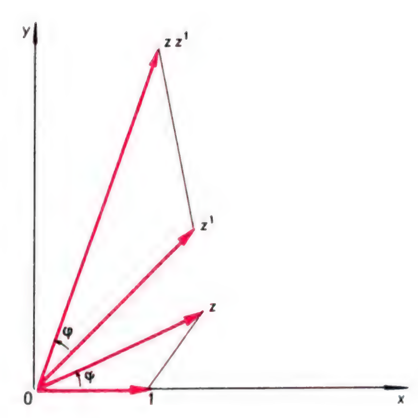


Рис. 18

Рис. 19



рема Пифагора (в форме $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$, где a/c и b/c – отношения длин катетов к длине гипотенузы) и т. п.

Однако не следует думать, что геометрия подобий ничем, кроме формы изложения, не отличается от евклидовой геометрии. Существуют факты, которые отличают эти две геометрии. Например, условимся говорить, что линия L может скользить по себе, если для любых двух точек A, B этой линии найдется преобразование f (принадлежащее группе, задающей рассматриваемую геометрию), которое переводит линию L в себя, а точку A – в B. В геометрии Евклида (т. е. в геометрии, определяемой группой движений плоскости) существуют только два типа связных линий (т. е. состоящих из одного куска), которые могут скользить по себе: прямые и окружности. А в геометрии подобий существуют линии, отличные от прямых и окружностей, которые могут скользить по себе; это – логарифмические *спирали*, определяемые в полярных координатах уравнением $\rho = \rho_0 e^{k\varphi}$ (рис. 16).

Еще один необычный факт геометрии по-

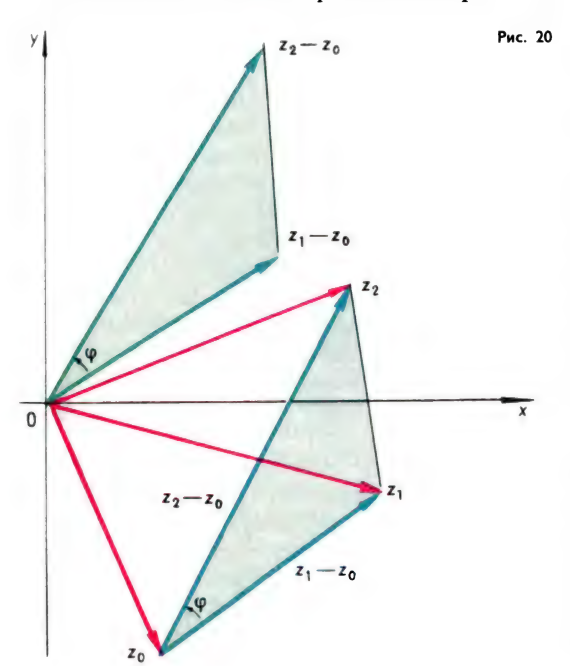
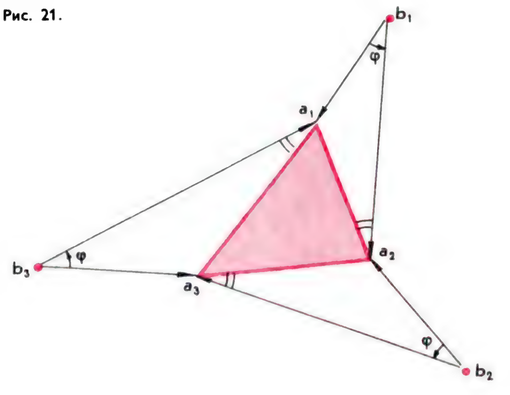


Рис. 20

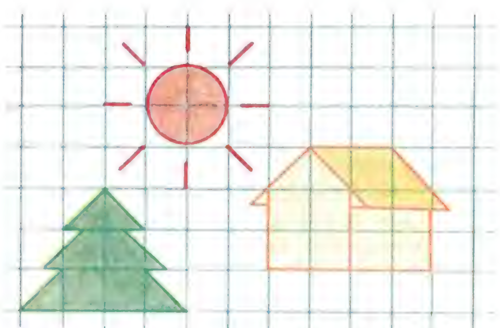
добий мы получим, рассматривая преобразование $g = h \circ r$, где r – поворот вокруг точки O на угол φ_0, а h – гомотетия с центром O и коэффициентом $k_0 > 0$. Пусть ..., A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, ... – последовательность точек, переходящих друг в друга при преобразовании g, т. е. $g(A_i) = A_{i+1}$ при любом целом i (рис. 17). Эти точки лежат на одной логарифмической спирали, причем для любого целого i угол A_iOA_{i+1} имеет одну и ту же величину φ_0. Последовательно соединяя эти точки, мы получим бесконечную ломаную линию $\ldots A_{-2}A_{-1}A_0A_1A_2\ldots$, которая переводится преобразованием g в себя, причем каждая вершина A_i переводится в соседнюю вершину A_{i+1}.

Заметим, что рассмотренное преобразование подобия $g = h \circ r$ (его называют поворотным растяжением) имеет тесную связь с комплексными числами. Комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде направленного отрезка, идущего из начала координат в точку $(x; y)$. При таком геометрическом изображении комплексные числа складываются как векторы (рис. 18). А для получения гео-

Рис. 21.



метрической интерпретации умножения комплексных чисел удобно поворотное растяжение $g = h \circ r$, рассмотренное выше. Именно, пусть $z = x + iy$ – некоторое комплексное число, ρ – его модуль (т. е. длина изображающего отрезка), а φ – аргумент (т. е. угол наклона изображающего направленного отрезка к положительной части оси абсцисс). Число z получается из числа 1, если, во-первых, вектор, изображающий число 1, растянуть в ρ раз, и, во-вторых, повернуть его на угол φ (рис. 19), т. е. вектор z получается из вектора 1 преобразованием $g = h \circ r = r \circ h$, где h – гомотетия с центром в начале и коэффициентом ρ, а r – поворот вокруг начала на угол φ. Итак, $z = g(1)$. Если теперь $z' = x' + iy'$ – другое комплексное число, то при применении преобразования g (т. е. при растяжении изображающего вектора в ρ раз и повороте его на угол φ) число z' переходит в zz' (рис. 19). Можно сказать и иначе: треугольники на рис. 19 подобны. Это и дает геометрическую интерпре-



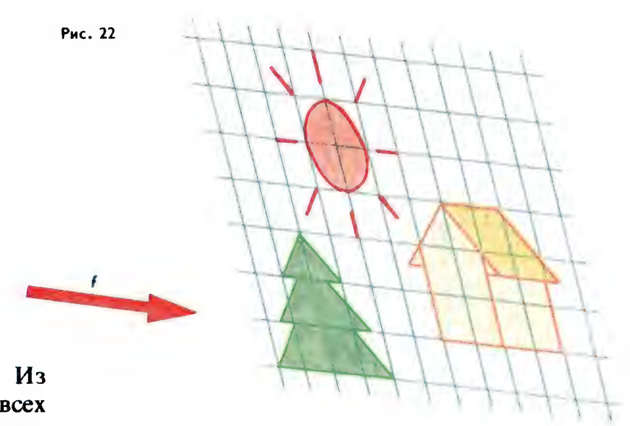
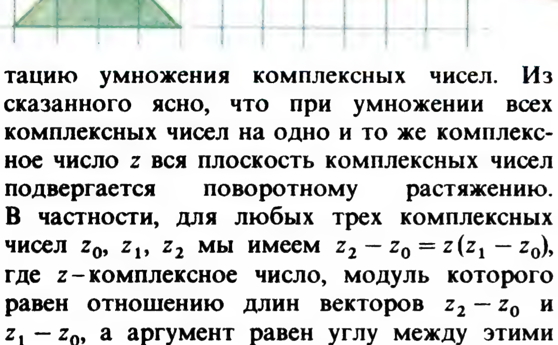


Рис. 22



тацию умножения комплексных чисел. Из сказанного ясно, что при умножении всех комплексных чисел на одно и то же комплексное число z вся плоскость комплексных чисел подвергается поворотному растяжению. В частности, для любых трех комплексных чисел z_0, z_1, z_2 мы имеем $z_2 - z_0 = z(z_1 - z_0)$, где z – комплексное число, модуль которого равен отношению длин векторов $z_2 - z_0$ и $z_1 - z_0$, а аргумент равен углу между этими векторами (рис. 20).

Задача 7. На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ построены вне его подобные между собой треугольники $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, $A_3B_3A_1$. Доказать, что точка пересечения медиан $\Delta B_1B_2B_3$ совпадает с точкой пересечения медиан $\Delta A_1A_2A_3$.

Решение. Обозначим через a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 комплексные числа, изображаемые векторами $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OB_2}$, $\overrightarrow{OB_3}$. Тогда $a_2 - b_1 = z(a_1 - b_1)$, $a_3 - b_2 = z(a_2 - b_2)$, $a_1 - b_3 = z(a_3 - b_3)$, где z - комплексное число, модуль которого равен отношению боковых сторон рассматриваемых подобных треугольников, а аргумент равен φ (рис. 21). Складывая эти равенства, получаем (после очевидных упрощений):

$$(z-1)(b_1 + b_2 + b_3) = (z-1)(a_1 + a_2 + a_3).$$

Так как $z \neq 1$ (поскольку аргумент φ числа z отличен от нуля), то отсюда следует, что $b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3$. Переходя к векторным обозначениям и деля на 3, получаем

$$1/3(\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3}) = 1/3(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}),$$

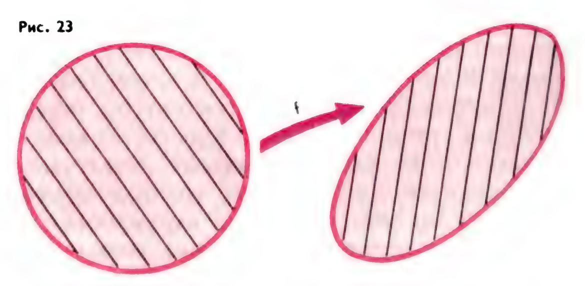
а это и означает, что точки пересечения медиан $\Delta B_1B_2B_3$ и $\Delta A_1A_2A_3$ совпадают (см. *Вектор*).

Расскажем коротко и о других преобразованиях, играющих важную роль в современной геометрии. Преобразование f евклидовой плоскости называется аффинным, если оно каждую прямую переводит снова в прямую, а параллельные между собой прямые – снова в параллельные (рис. 22). Если на плоскости введена система координат, то аффинное преобразование задается линейными соотношениями, т. е. точка $A'(x'; y')$, в которую переходит точка $A(x; y)$, определяется формулами

$$\begin{cases} x' = ax + by + p, \\ y' = cx + dy + q, \end{cases}$$

где $ad - bc \neq 0$ (и обратно: такими формулами задается некоторое аффинное преобразование). Далее, если A, B, C – три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, и A', B', C' – три другие точки, также не лежащие на

Рис. 23



одной прямой, то существует, и притом только одно, аффинное преобразование, переводящее точки A, B, C соответственно в A', B', C'. Отметим, что длины и углы могут изменяться при аффинных преобразованиях. Не сохраняется (в отличие от преобразований подобия) и отношение длин отрезков. Однако отношение длин двух параллельных отрезков сохраняется при любом аффинном преобразовании. В частности, середина отрезка переходит при аффинном преобразовании снова в середину отрезка, параллелограмм переходит в параллелограмм, медиана треугольника – в медиану и т. п. Круг при аффинном преобразовании переходит в эллипс, причем из отмеченных выше свойств аффинных преобразований легко следует, что середины параллельных между собой хорд эллипса лежат на одном отрезке, проходящем через центр эллипса (рис. 23).

Все аффинные преобразования плоскости, вместе взятые, образуют группу преобразований, и потому (см. *Геометрия*) они определяют некоторую геометрию. Она называется аффинной геометрией. Инвариантами этой группы (т. е. теми свойствами фигур, которые изучаются в аффинной геометрии) являются прямолинейное расположение точек, парал-

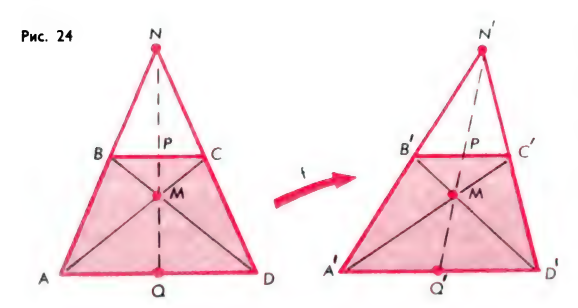


Рис. 24

лельность, отношение длин параллельных отрезков и другие свойства, получаемые из этих (например, наличие у фигуры центра симметрии). Не говоря более подробно об этой геометрии, покажем на примерах, как отмеченные выше свойства аффинных преобразований могут быть применены при решении задач.

Задача 8. Доказать, что в произвольной трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение. Для равнобочной трапеции это очевидно (так как равнобочная трапеция симметрична относительной прямой, проходящей через середины оснований). Пусть теперь $A'B'C'D'$ – произвольная трапеция и пусть $ABCD$ – равнобочная трапеция с теми же длинами оснований (рис. 24). Рассмотрим аффинное преобразование, переводящее точки A, B, C соответственно в A', B', C'. При этом преобразовании прямые AD, BC перейдут в $A'D'$, $B'C'$ (поскольку $AD \parallel BC$, а параллельность прямых сохраняется). Далее, так как $|AD|/|BC| = |A'D'|/|B'C'|$, то точка D перейдет в D' (поскольку отношение параллельных отрезков сохраняется). Иначе говоря, трапеция $ABCD$ перейдет в трапецию $A'B'C'D'$. Следовательно, прямолинейное расположение точек M, N, P, Q сохранится, т. е. в трапеции $A'B'C'D'$ точки M', N', P', Q', также лежат на одной прямой.

Задача 9. В треугольнике $A'B'C'$ вписан эллипс и проведены три отрезка, каждый из которых соединяет вершину и точку касания эллипса с противоположной стороной. Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть f – аффинное преобразование, которое переводит некоторую окружность в рассматриваемый эллипс, и пусть ABC – треугольник, который при этом преобразовании переходит в $\Delta A'B'C'$. Так как для вписанной окружности рассматриваемое свойство, как нетрудно доказать, справедливо (левая часть рис. 25), то оно справедливо и для вписанного эллипса (правая часть рисунка).

В статье *«Проективная геометрия»* рассказано о том, как пополнение плоскости несобственными («бесконечно удаленными») точками превращает ее в проективную плоскость. Геометрические преобразования проективной плоскости, которые сохраняют прямолинейное расположение точек, называются проективными преобразованиями. Проективные преобразования задаются в координатах дробно-линейными формулами:

$$x' = \frac{ax + by + p}{mx + ny + r},$$

$$y' = \frac{cx + dy + q}{mx + ny + r}. \qquad (1)$$

Более подробно: если π – евклидова плоскость, в которой задана система координат, а π^* – проективная плоскость, получающаяся из π присоединением несобственных элементов, то любое проективное преобразование плоскости π^* записывается в рассматриваемых координатах формулами (1) при условии, что точка $A(x; y)$ и точка $A'(x'; y')$, в которую она переходит, не являются несобственными.

Проективные преобразования образуют группу преобразований проективной плоскости. Согласно Эрлангенской программе, эта группа определяет некоторую геометрию – это и есть проективная геометрия. Инвариантами проективных преобразований (т. е. теми свойствами фигур, которые изучаются в проективной геометрии) являются прямолинейное расположение точек, ангармоническое отношение

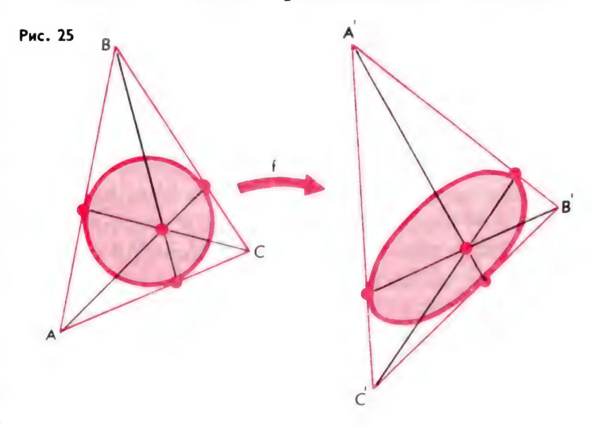
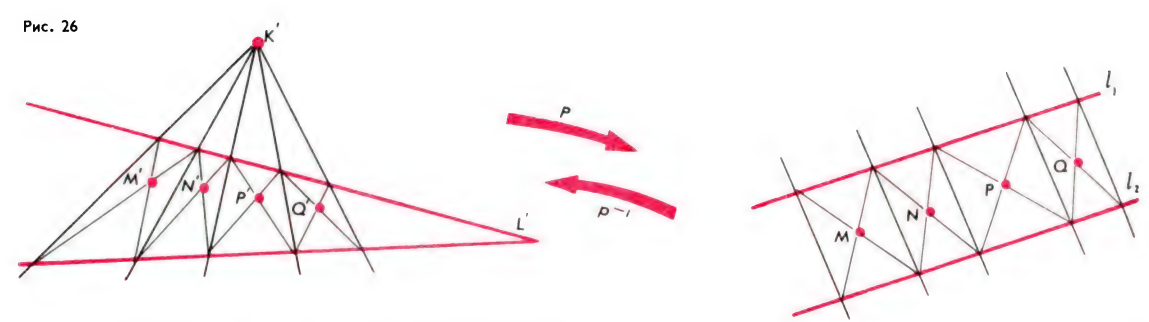


Рис. 25

четырех точек, лежащих на одной прямой, и др.

Если A, B, C, D – четыре точки проективной плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и A', B', C', D' – другие четыре точки этой плоскости, из которых также никакие три не лежат на одной прямой, то существует, и притом только одно, проективное преобразование, которое переводит A, B, C, D соответственно в A', B', C', D'. Пользуясь перечисленными свойствами проективных преобразований, можно решать различные геометрические задачи.

Рис. 26



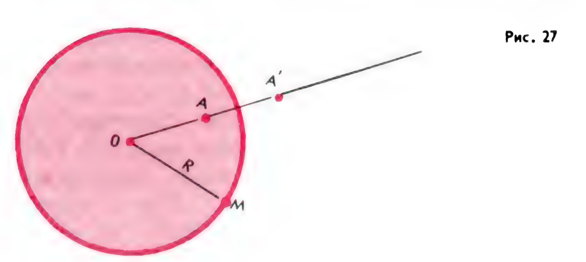
Задача 10. Доказать, что точки M', N', P', Q' на рис. 26 лежат на одной прямой.

Решение. Пусть p – проективное преобразование, переводящее K' и L' в несобственные точки; мы получим (в евклидовой плоскости) расположение точек, показанное на рис. 26 справа. В этом случае точки M, N, P, Q, очевидно, лежат на одной прямой (на средней линии полосы между прямыми l_1 и l_2). Применяя обратное преобразование p^{-1}, мы заключаем, что и на рис. 26 слева точки M', N', P', Q' лежат на одной прямой (поскольку при проективном преобразовании p^{-1} сохраняется прямолинейное расположение точек).

Все рассмотренные выше преобразования сохраняли прямолинейное расположение точек (на евклидовой или на проективной плоскости). Иначе говоря, система всех прямых линий на плоскости переводится снова в эту же систему линий. Существует интересный класс преобразований, который обладает аналогичным свойством по отношению к другой системе линий. Именно: рассмотрим на плоскости (евклидовой) систему, состоящую из всех прямых линий и всех окружностей. Преобразования, которые эту систему линий переводят снова в эту же систему, называются круговыми преобразованиями. Иначе говоря, прямая переходит при круговом преобразовании либо снова в прямую, либо в некоторую окружность (и то же справедливо для окружности). Чуть ниже мы уточним одно соглашение относительно евклидовой плоскости, которое требуется при рассмотрении круговых преобразований, но вначале рассмотрим один важный пример кругового преобразования — так называемую инверсию.

Пусть задана некоторая точка O плоскости и некоторое положительное число R. Геометрическое преобразование, которое каждую отличную от O точку A плоскости переводит в такую точку A' луча OA, что $|OA|\cdot|OA'| = R^2$, называется инверсией с центром O и радиусом R (рис. 27). Название «радиус» инверсии объясняется тем, что каждая точка окружности с центром O и радиусом R, очевидно, остается неподвижной при этом преобразовании (т. е. переходит в себя). Точки, лежащие внутри этой окружности (называемой окружностью инверсии), переходят в точки, лежащие вне ее, и наоборот. На этом основании инверсию часто называют симметрией относительно окружности. Инверсия является круговым преобразованием: каждая прямая или окружность переходит снова в прямую или окружность (рис. 28). Заметим теперь, что точка O (центр инверсии) не имеет образа при этом преобразовании, но если точка A приближается к O (не совпадая с ней), то соответствующая точка A' неограниченно удаляется

Рис. 27



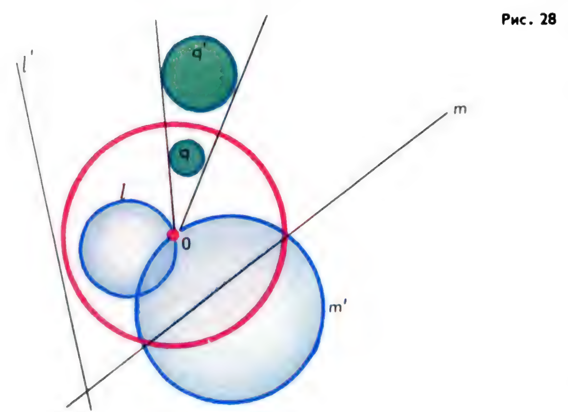
от O. На этом основании условились считать, что на плоскости существует одна несобственная точка ∞, и при инверсии с центром O точка O переходит в ∞, а ∞ переходит в O. Плоскость, пополненная точкой ∞, называется круговой плоскостью (в отличие от проективной плоскости, которая получается присоединением не одной, а бесконечно многих несобственных точек). Теперь инверсия становится взаимно-однозначным преобразованием плоскости (круговой).

Помимо того что инверсия переводит систему всех прямых и окружностей снова в эту же систему, инверсия обладает еще рядом замечательных свойств, делающих ее важным инструментом при решении ряда геометрических задач. Основным из них является то, что инверсия сохраняет углы: если две линии l и m пересекаются под углом φ (т. е. угол между касательными к этим линиям в их общей точке равен φ), то образы l' и m' этих линий пересекаются под тем же углом φ. Если, в частности, окружность l ортогональна окружности инверсии, т. е. пересекает ее под прямым углом (о таких окружностях шла речь в конце статьи *Лобачевского геометрия*), то при инверсии эта окружность l переходит в себя (только части ее, лежащие внутри и вне окружности инверсии, меняются местами). Инверсия является важнейшим из круговых преобразований: можно доказать, что любое круговое преобразование плоскости является

либо инверсией, либо подобием, либо композицией инверсии и подобия. Вместе взятые, круговые преобразования составляют группу преобразований, которая определяет на круговой плоскости своеобразную геометрию («круговую»).

Мы рассказали о наиболее важных геометрических преобразованиях плоскости. Можно рассматривать также геометрические преобразования трехмерного пространства, плоскости (или пространства) Лобачевского и других геометрических объектов. Заметим, в частности, что если f – движение трехмерного пространства R^3, переводящее плоскость $\alpha \subset R^3$ в некоторую плоскость β, а p – центральное проектирование плоскости β на α из некоторой точки O (не принадлежащей плоскостям α и β), то композиция $p \circ f$ представляет собой проективное преобразование плоскости α (поскольку и f, и p переводят прямую

Рис. 28



снова в прямую). Оказывается, что в таком виде можно представить любое проективное преобразование плоскости α.

Знакомство с геометрическими преобразованиями и умение применять их является важным элементом математической культуры.

ГЕОМЕТРИЯ

Геометрия – одна из наиболее древних математических наук. Первые геометрические факты мы находим в вавилонских клинописных таблицах и египетских папирусах (III тысячелетие до н. э.), а также в других источниках. Название науки «геометрия» – древнегреческого происхождения. Оно составлено из двух древнегреческих слов *ge* – «Земля» и *metreo* – «измеряю».

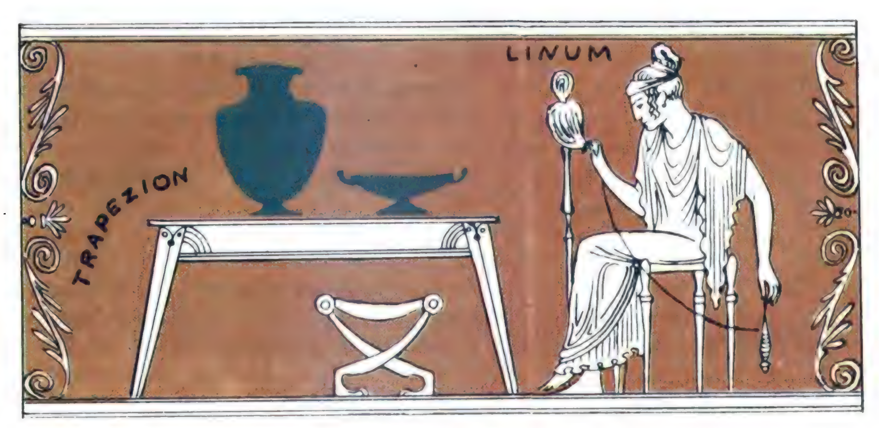
Возникновение геометрических знаний связано с практической деятельностью людей. Это отразилось и в названиях многих геометрических фигур. Например, название фигуры трапеция происходит от греческого слова *trapezion* – «столик», от которого произошло также слово «трапеза» и другие родственные слова. Термин «линия» возник от латинского *linum* – «лен, льняная нить».

Еще в древности геометрия превратилась в дедуктивную, строго логическую науку, построенную на основе системы аксиом (см. *Аксиоматика и аксиоматический метод*). Она непрерывно развивалась, обогащалась новыми теоремами, идеями, методами. Интересы геометров и направления их научных исследований порою менялись в процессе исторического развития этой науки, поэтому нелегко дать точное и исчерпывающее определение, что такое геометрия сегодня, каков ее предмет, содержание и методы.

В замечательной книге «Диалектика природы» Ф. Энгельс определил геометрию как науку о пространственных формах окружающего нас реального мира, т. е. как часть математики, изучающую свойства пространства. Это философское определение полностью отражало состояние геометрии в то время, когда жил и работал Ф. Энгельс. Но в наше время возникли и оформились новые важные разделы геометрии. Каждый из этих разделов имеет свою специфику, которая уже не всегда укладывается в определение геометрии, данное в прошлом веке Ф. Энгельсом. Крупный советский геометр академик А. Д. Александров, которому принадлежат работы не только по геометрии, но и в области философии математики, расширил рамки энгельсовского определения, сказав, что геометрия изучает пространственные и пространственноподобные формы и отношения реального мира. Что это значит и какое это имеет значение для школьной геометрии, попытаемся раскрыть в этой статье.

В III в. до н. э. древнегреческий ученый Евклид написал книгу под названием «Начала» (см. *Евклид и его «Начала»*). В этой книге Евклид подытожил накопленные к тому времени геометрические знания и попытался дать законченное аксиоматическое изложение этой науки. Написана она была настолько хорошо, что в течение 2000 лет всюду преподавание геометрии велось либо по переводам, либо по незначительным переработкам книги Евклида. Например, таким пособием был учебник А. П. Киселева, по которому советская школа работала до середины этого столетия.

Продуманное и глубоко логическое изложение геометрии, данное в книге Евклида, привело к тому, что математики не мыслили возможности существования геометрии, отличной от евклидовой. Немецкий философ-идеалист XVIII в. И. Кант и многие его последователи считали, что понятия и идеи евклидовой геометрии (единственно возможной, чуть ли не божественной) были заложены в челове-



«Геометрия – правительница всех мысленных изысканий».
М. В. Ломоносов

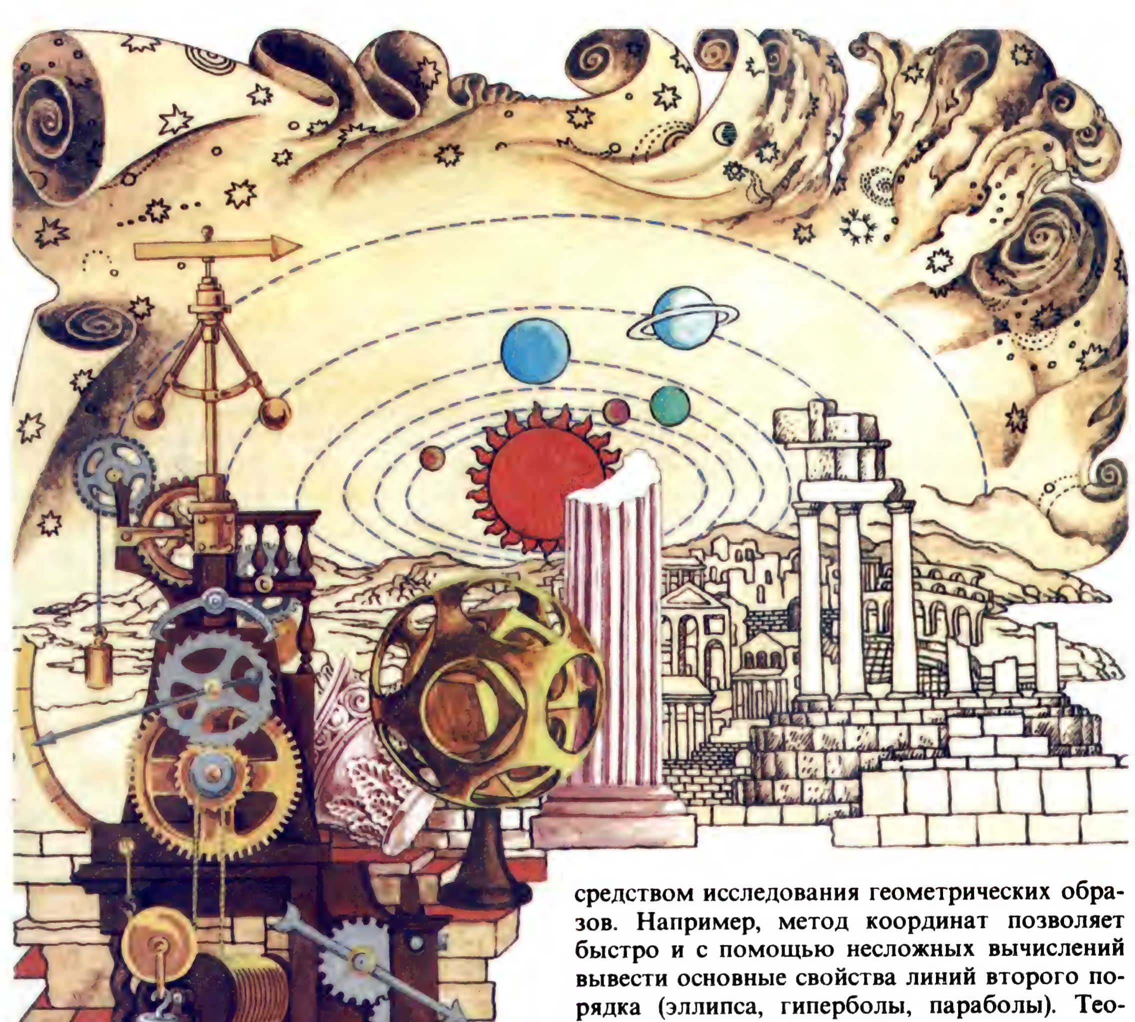
ческое сознание еще до того, как человек научился что-либо осознавать. Происхождение этой мысли Канта становится понятным, если мы проследим процесс возникновения геометрических знаний в сознании ребенка. Дети много тысяч раз видят, например, прототипы прямых линий в жизни: угол дома или обрез книжной страницы, натянутую нитку или луч света, край стола или двери – все это, запечатленное в сознании ребенка, делает его психологически подготовленным к восприятию понятия «прямая». То же относится к прямым углам и перпендикулярам (которые мы видим с детства на каждом шагу), окружностям (колесо, пуговица, солнечный диск, край тарелки или блюдца), параллелограммам и другим фигурам. Отраженные в сознании, эти представления подготавливают восприятие геометрических понятий. Учитель же систематизирует, упорядочивает эти представления и дает школьникам соответствующий термин, завершающий и закрепляющий образование понятия.

Лишь в XIX в. благодаря в первую очередь трудам выдающегося русского математика Н. И. *Лобачевского* было установлено, что евклидова геометрия не является единственно возможной. Вслед за тем математики создали и исследовали многие различные «геометрии». Особенно большая заслуга в расширении наших представлений о возможных геометрических пространствах принадлежит немецкому математику XIX в. Г. Ф. Б. Риману. Он открыл способ построения бесконечно многих «геометрий», которые локально, «в малом» устроены почти так же, как и евклидова геометрия, но обладают «кривизной», сказывающейся при рассмотрении больших кусков пространства. По преданию, К. Ф. *Гаусс*, обогативший математику многими замечательными открытиями (в том числе и в области геометрии), ушел после доклада Римана, глубоко задумавшись над ошеломившими его новыми геометрическими идеями.

Интересно проследить связь геометрических идей с современной физикой. Часто идеи, обогащающие математику новыми понятиями и методами, приходят из физики, химии и других разделов естествознания. Типичным примером может служить понятие *вектора*, пришедшее в математику из механики. Но в отношении неевклидовых геометрий дело обстоит как раз наоборот: созданные внутри математики под воздействием ее внутренних потребностей и ее собственной логики развития, эти новые геометрические понятия проложили пути создания современной физики. В частности, геометрия Лобачевского нашла применение в специальной теории относительности, стала одной из математических основ этой теории, а риманова геометрия служит фундаментом общей эйнштейновской теории относительности. Можно даже сказать, что общая теория относительности – это больше геометрия, чем физика, и здесь обнаруживается влияние идей немецкого математика *Д. Гильберта*, который сотрудничал с А. Эйнштейном при создании этой теории. Важные приложения имеет риманова геометрия в теории упругости и в других разделах физики и техники.

Нечто похожее произошло и с другим разделом современной геометрии – с так называемым выпуклым анализом. Начала теории *выпуклых фигур* были заложены в XIX в. немецким математиком Г. Минковским. Несколько красивых теорем, полученных им, привлекли внимание математиков к новой теории. Однако поскольку они не находили применения в других разделах математики, а тем более в естествознании, то в то время создалось впечатление, что Минковский создал очень изящную, но совершенно бесполезную математическую игрушку. Но прошли десятилетия, и совершенно неожиданно теоремы о выпуклых множествах нашли различные применения: сначала в самой математике (при решении геометрических экстремальных задач), а затем в *математической экономике*, теории управления и других прикладных областях.

В современной геометрии есть и много других направлений. Одни сближают ее с теорией чисел, другие с квантовой физикой,



средством исследования геометрических образов. Например, метод координат позволяет быстро и с помощью несложных вычислений вывести основные свойства линий второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы). Теоремы об этих линиях, найденные древнегреческим ученым Аполлонием и некогда считавшиеся вершиной геометрии, сейчас с помощью методов аналитической геометрии изучаются в вузах и техникумах.

третьи – с математическим анализом. А некоторые разделы современной математики таковы, что трудно сказать, чего в них больше: геометрии, алгебры или анализа.

Геометрия не только обогатилась новыми направлениями, находящимися далеко за пределами той колыбели, из которой она выросла,– евклидовой геометрии. Много нового появилось со времен Евклида и в самой евклидовой геометрии. Еще в XVII в. благодаря работам французского математика и философа Р. *Декарта* возник метод координат, ознаменовавший собой революционную перестройку всей математики, и в частности геометрии. Появилась возможность истолковывать алгебраические уравнения (или неравенства) в виде геометрических образов (графиков) и, наоборот, искать решение геометрических задач с помощью аналитических формул, систем уравнений. Так в рамках евклидовой геометрии появилась ее новая ветвь - аналитическая геометрия, явившаяся мощным

В работах математиков XIX в. У. Гамильтона, Г. Грассмана и других были введены *векторы*, которые ранее в трудах Архимеда, Г. Галилея и других корифеев науки имели лишь механический смысл, а теперь приобрели права гражданства в математике. С 60-х гг. нашего столетия векторы заняли прочное место и в школьном курсе геометрии. Применяемые в рамках евклидовой геометрии векторные методы значительно упрощают доказательства многих теорем и решение задач. Например, теорема косинусов, теорема о трех перпендикулярах и другие (которые раньше было доказать довольно трудно) стали легкими упражнениями на применение скалярного произведения векторов. Но роль векторов – не только в упрощении трудных мест школьного курса. Гораздо важнее то, что векторные методы находят сейчас широкие применения в физике, химии, экономике, биологии, не говоря уже о многих разделах современной математики. Так, скалярное произведение векто-

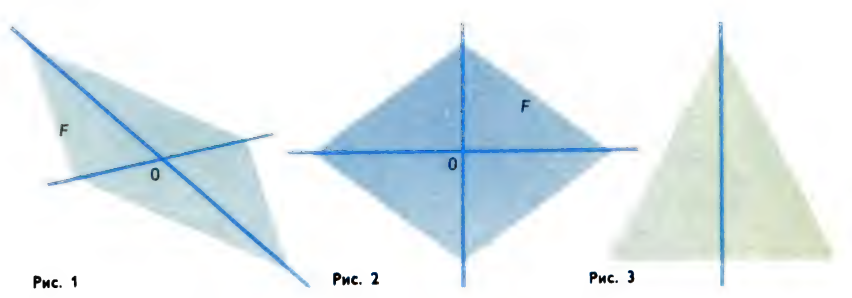


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

ра силы и вектора перемещения есть работа, векторное произведение вектора тока и вектора напряженности магнитного поля есть сила воздействия этого поля на проводник и т.д. Как видите, и здесь геометрия диктовала физике введение новых понятий, а не наоборот. А впоследствии, при рассмотрении многомерных пространств (о которых речь еще впереди), скалярное произведение приобрело еще больший вес и значение и стало важным рабочим аппаратом, применяемым буквально во всех областях математики и ее приложений.

Другим важным обогащением, которым геометрия также обязана XIX в., стало создание теории *геометрических преобразований*, и в частности движений (перемещений). У Евклида движения неявно присутствовали; например, когда он говорил: «Наложим один треугольник на другой таким-то образом», то речь шла в действительности о применении движения, перемещения треугольника. Но для Евклида движение не было математическим понятием. Создание математической теории движений и осознание их важной роли в геометрии связано с именем немецкого математика XIX–XX вв. Ф. Клейна, который при вступлении на должность профессора по кафедре геометрии в университете г. Эрлангена прочитал лекцию о роли движений в геометрии. Выдвинутая им идея переосмысления всей геометрии на основе теории движений получила название Эрлангенской программы. Идею Клейна можно пояснить следующим образом.

Геометрия изучает те свойства фигур, которые сохраняются при движениях. Иначе говоря, если одна фигура получается из другой движением (такие фигуры называются равными, или конгруэнтными), то у этих фигур одинаковые геометрические свойства. В этом смысле движения составляют основу геометрии. Они обладают тем свойством, что композиция $g \circ f$ любых двух движений f и g (т.е. результат их последовательного выполнения) также является движением; кроме того, если f – произвольное движение, то обратное отображение f^{-1} также является движением. Эти свойства коротко выражают следующим образом: движения образуют *группу*. Таким образом, группа движений задает, определяет евклидову геометрию. Но группа движений не единственная известная нам группа преобразований. Например, все параллельные переносы образуют группу, все подобные преобразования также образуют группу и т.д. По мысли Клейна, каждая группа преобразований определяет «свою геометрию». Например, можно рассматривать аффинные преобразования, которые каждую прямую взаимно-однозначно отображают на некоторую другую прямую, но при этом могут не сохранять (в отличие от движений) ни расстояний, ни углов, ни площадей. Множество всех аффинных преобразований плоскости (или пространства) представляет собой группу. Эта группа задает некоторую геометрию, которая носит название аффинной геометрии. Групповая точка зрения на геометрию позволяет с единых позиций рассмотреть многие различные геометрии: евклидову, геометрию Лобачевского, аффинную, *проективную геометрию* и др.

Значение идей Эрлангенской программы Клейна не исчерпывается рамками геометрии. Групповая точка зрения на геометрические свойства фигур широко используется в физике. Так, русский математик и кристаллограф Е.С. Федоров, используя клейновские идеи, открыл кристаллографические группы, носящие теперь его имя. Они стали в наши дни подлинной научной основой всей кристаллографии. Групповой подход находит важные применения в ядерной физике; принципы симметрии и четности – яркое проявление групповой точки зрения. Основой специальной теории относительности является группа Лоренца; по существу, эта теория представляет собой своеобразную геометрию «четырехмерного пространства-времени», определяемую группой Лоренца. Важные приложения находит групповая точка зрения и в других областях физики, химии.

Влияние группового подхода можно проследить и в школьной геометрии. Каждая фигура F определяет некоторую группу движений; в эту группу входят все те движения, которые переводят фигуру F в себя. Она называется группой самосовмещений фигуры F. Знание группы самосовмещений фигуры F во многом определяет геометрические свойства этой фигуры. Возьмем, например, параллелограмм общего вида, т.е. не являющийся ни прямоугольником, ни ромбом (рис. 1). Суще-

«Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать».

Г. Галилей



ствуют два движения, переводящие этот параллелограмм в себя: тождественное отображение *e* (оставляющее все точки плоскости на месте) и симметрия *r* относительно точки *O*, в которой пересекаются диагонали параллелограмма. Других движений плоскости, переводящих параллелограмм *F* в себя, нет. Таким образом, группа самосовмещений параллелограмма состоит из двух элементов *e*, *r*. Из того, что группа самосовмещений параллелограмма содержит центральную симметрию *r*, вытекают все основные свойства параллелограмма. Например, так как противоположные углы параллелограмма симметричны относительно точки *O*, то эти углы равны. Из симметричности противоположных сторон параллелограмма вытекает, что эти стороны равны и параллельны, и т. д.

Группа самосовмещений ромба содержит кроме *e* и *r* еще две осевые симметрии s_1 и s_2 относительно прямых, на которых расположены диагонали ромба (рис. 2). Из того, что в этой группе имеются дополнительные (по сравнению с параллелограммом общего вида) движения s_1 и s_2, вытекает наличие у ромба дополнительных, специфических свойств (помимо свойств, присущих всякому параллелограмму): перпендикулярность диагоналей, совпадение диагоналей с биссектрисами углов и т. д. В качестве еще одного примера отметим, что группа самосовмещений равнобедренного треугольника, не являющегося равносторонним (рис. 3), состоит из двух элементов *e*, *s*, где *s* – осевая симметрия. Из наличия в группе самосовмещений равнобедренного треугольника движения *s* вытекают основные свойства этого треугольника: равенство углов при основании, совпадение биссектрисы, медианы и высоты, проведенных к основанию, равенство медиан, проведенных к боковым сторонам, и т. д. Свойства правильных многогранников (или других многогранников, обладающих той или иной симметричностью) удобнее всего доказывать, используя группы их самосовмещений. Свойства сферы, цилиндра, конуса также лучше всего выводить с помощью рассмотрения групп самосовмещений этих фигур. И для каждой конкретной геометрической фигуры богатство ее свойств определяется прежде всего ее группой самосовмещений.

Применение движений сближает математику с идеями физики, химии, биологии, техники, соответствует прогрессивным чертам математического осмысления мира.

Итак, XIX в. привнес в евклидову геометрию много нового, и прежде всего векторные методы и групповой подход. Есть и еще одно направление развития геометрии, появившееся в рамках евклидовой геометрии в XIX в.,– многомерные пространства. Возникли они путем обобщения, аналогии с геометрией на плоскости и в трехмерном пространстве. На плоскости каждая точка задается в системе координат двумя числами – координатами этой точки, а в пространстве – тремя координатами. В *n*-мерном же пространстве точка задается *n* координатами, т. е. записывается в виде $A\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ – произвольные действительные числа (координаты точки *A*). На плоскости система координат имеет две оси, в пространстве – три, а в *n*-мерном пространстве система координат содержит *n* осей, причем каждые две из этих осей перпендикулярны друг другу! Конечно, такие пространства существуют лишь в воображении математиков и тех специалистов из других областей знания, которые применяют эти математические абстракции. Ведь реальное пространство, в котором мы живем, математически хорошо описывается трехмерным пространством (евклидовым или римановым, но именно трехмерным). Увидеть – в буквальном, физическом

смысле этого слова – фигуры в четырехмерном пространстве (а тем более в пространствах большего числа измерений) не в состоянии никто, даже самый гениальный математик; их можно видеть только мысленным взором.

Человек, который впервые слышит о четырехмерном пространстве, готов возразить: «Но ведь такого же не бывает, не может быть четырех прямых, которые друг другу перпендикулярны!». Есть и другие парадоксы четвертого измерения. Если, например, на плоскости имеется кольцо (оболочка), а внутри – кружок, то, как бы мы ни двигали этот кружок по плоскости, вынуть его из этой оболочки, не разрывая ее, невозможно. Но стоит только выйти в третье измерение, и кружок легко вынуть из кольца, подняв его вверх, над плоскостью. Аналогично дело обстоит и в пространстве. Если имеется сфера (оболочка), внутри которой заключен шарик, то, не прорывая оболочку, невозможно вынуть из нее этот шарик. Но если бы существовало четвертое измерение, то можно было бы «поднять» шарик над трехмерным пространством в направлении четвертого измерения, а затем положить его снова в трехмерное пространство, но уже вне оболочки. И то, что это сделать никому не удается, приводят как довод против существования четвертого измерения. Довод ошибочен, так как в нем спутаны два вопроса.

Первый вопрос: имеется ли в реальном пространстве четвертое измерение? Ответ на этот вопрос отрицателен.

Второй вопрос: можно ли рассматривать четырехмерное пространство абстрактно, математически? Ответ утвердителен.

Нет ничего нелогичного или противоречивого в том, чтобы рассматривать четверки чисел (x_1, x_2, x_3, x_4), исследовать свойства этих «четырехмерных точек», составлять из них фигуры, доказывать теоремы, постепенно строя таким образом геометрию четырехмерного (или, вообще, n-мерного) пространства. Но математическая непротиворечивость n-мерной геометрии еще недостаточна для суждения о ценности этой теории. В чем же состоит польза многомерных пространств? Где они применяются? Зачем понадобилось расширять представления о пространстве от реального трехмерного мира до столь далеких абстракций, которые нелегко и не сразу укладываются в сознании?

Для ответа на эти вопросы рассмотрим два примера, которые подведут нас к n-мерной геометрии.

Пример 1. Сумма n чисел равна единице. Каковы должны быть эти числа, чтобы сумма их квадратов была наименьшей?

Решение. Получим ответ на поставленный вопрос геометрическим путем, рассматривая

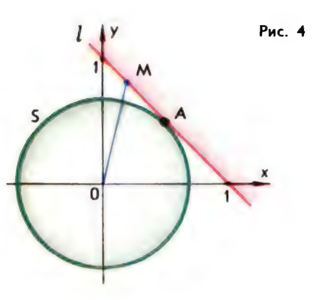


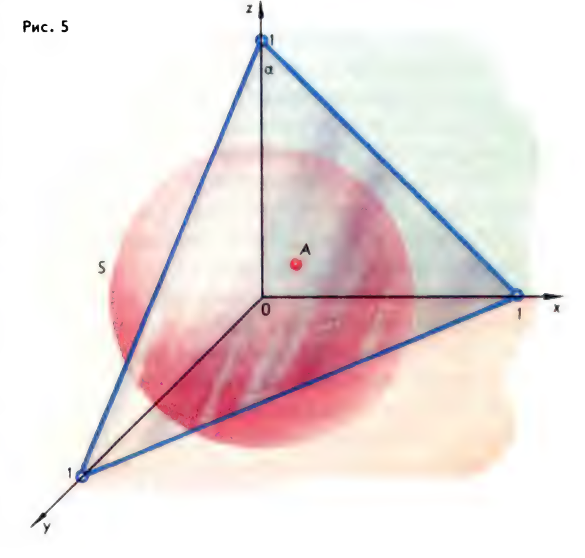
Рис. 4

сначала случай $n = 2$, затем $n = 3$, а потом обсудим ситуацию при $n > 3$.

Итак, пусть сначала $n = 2$. Иначе говоря, рассматриваются числа x, y, удовлетворяющие условию $x + y = 1$, и требуется найти, в каком случае сумма квадратов $x^2 + y^2$ будет наименьшей.

Уравнение $x + y = 1$ определяет на координатной плоскости прямую l (рис. 4). Рассмотрим окружность S с центром в начале координат, которая касается этой прямой (точка A). Если точка $M(x, y)$ прямой l отлична от A, то она лежит вне окружности S и потому $|OM|$ больше радиуса r этой окружности, т. е. $x^2 + y^2 > r^2$. Если же $M = A$, то сумма $x^2 + y^2$ равна r^2, т. е. именно для точки A эта сумма принимает наименьшее значение. Точка A имеет координаты $x = y = 1/2$; это и есть решение поставленной алгебраической задачи (при $n = 2$).

Пусть теперь $n = 3$. Уравнение $x + y + z = 1$ определяет в пространстве плоскость α. Рассмотрим сферу S с центром в начале O, касающуюся этой плоскости в некоторой точке A (рис. 5). Для любой точки $M \in \alpha$, отличной от A, ее расстояние от точки O больше радиуса r сферы S, $|OM|^2 > r^2$, и потому $x^2 + y^2 + z^2 > r^2$, а при $M = A$ имеем $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Таким образом, именно для точки A сумма $x^2 + y^2 + z^2$ принимает наименьшее значение. Точка A имеет равные координаты: $x = y = z$ (поскольку при повороте пространства, пере-

Рис. 5


ставляющем оси координат: $x \to y$; $y \to z$, $z \to \to x$, и плоскость α, и сфера S переходят в себя, а потому их общая точка остается неподвижной). А так как $x + y + z = 1$, то точка A имеет координаты $x = y = z = 1/3$; это и есть решение поставленной задачи (для $n = 3$).

Рассмотрим, наконец, произвольное n; рассуждения будем вести в n-мерном пространстве, точками которого являются последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящие из n действительных чисел. Уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ определяет в этом пространстве «плоскость» α, имеющую размерность $n - 1$ (например, при $n = 3$, т.е. в трехмерном пространстве, такое уравнение определяет плоскость размерности 2, т.е. на единицу меньшей размерности, чем все пространство). Математики называют плоскости, имеющие размерность $n - 1$, гиперплоскостями в n-мерном пространстве. Рассмотрим сферу S с центром в начале координат O, касающуюся гиперплоскости α в некоторой точке A. Все точки гиперплоскости α, кроме A, лежат вне сферы S, т.е. находятся от начала координат O на расстоянии, большем, чем радиус r сферы S, а точка A находится от O на расстоянии, равном r. Следовательно, сумма $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ принимает в точке A наименьшее значение по сравнению со всеми другими точками гиперплоскости α. Заметим теперь, что все координаты точки A равны между собой: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ (поскольку поворот пространства, переставляющий оси $x_1 \to x_2, \ldots, x_{n-1} \to x_n$, $x_n \to x_1$, переводит гиперплоскость α в себя и сферу S тоже в себя, а потому оставляет точку A неподвижной), откуда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1/n$. Итак, при $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ сумма квадратов $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ принимает наименьшее значение для $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1/n$.

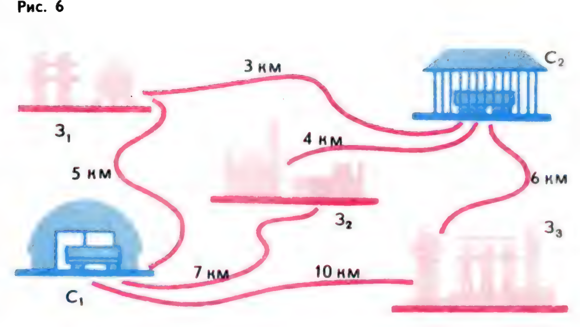
Разумеется, это геометрическое решение читатель может признать корректным лишь в случае, если он уже владеет понятиями n-мерной геометрии, но характер этого решения и польза n-мерной геометрической интерпретации для рассмотренной алгебраической задачи очевидны.

Пример 2. На три завода $З_1$, $З_2$, $З_3$ (рис. 6) нужно завезти сырье одинакового вида, которое хранится на двух складах $С_1$, $С_2$ в соответствии с данными, указанными в таблице.

Наличие сырья		Потребность в сырье		
$С_1$	$С_2$	$З_1$	$З_2$	$З_3$
20 т	25 т	10 т	15 т	20 т

Требуется найти наиболее выгодный вариант перевозок, т.е. вариант, для которого общее количество тонно-километров будет наименьшим.

Рис. 6



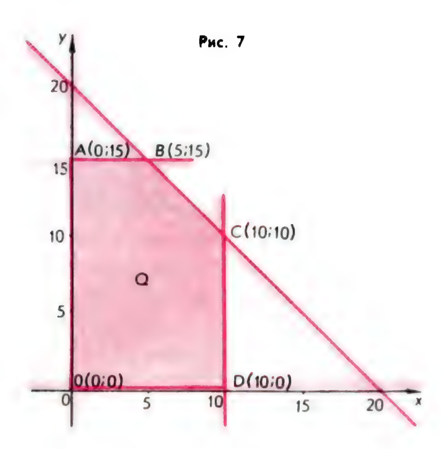
Решение. Обозначим через x и y количество сырья, которое нужно вывезти со склада $С_1$ соответственно на заводы $З_1$, $З_2$. Тогда со второго склада нужно довезти на эти заводы $10 - x$ и $15 - y$ тонн сырья. Так как общее количество имеющегося на складах сырья совпадает с потребностью заводов, т.е. все сырье должно быть вывезено со складов на заводы, то после обеспечения заводов $З_1$ и $З_2$ оставшееся на складах сырье полностью вывозится на завод $З_3$, т.е. со склада $С_1$ на завод $З_3$ вывозится $20 - x - y$, а со склада $С_2$ $25 - (10 - x) - (15 - y) = x + y$ тонн. Учитывая расстояния (рис. 6), находим общее число тонно-километров:

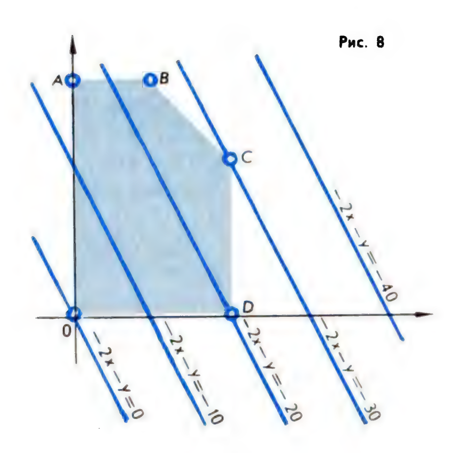
$$5x + 7y + 10(20 - x - y) + 3(10 - x) + \\ + 4(15 - y) + 6(x + y) = 290 - 2x - y.$$

Заметим теперь, что все величины, выражающие количество перевозимого по разным дорогам сырья, неотрицательны: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $20 - x - y \geqslant 0$, $10 - x \geqslant 0$, $15 - y \geqslant 0$, $x + y \geqslant 0$. Каждое из этих неравенств определяет в системе координат x, y полуплоскость, а система всех неравенств определяет пересечение этих полуплоскостей, т.е. выпуклый многоугольник Q (рис. 7). Заметим, что последнее неравенство можно отбросить: оно является следствием первых двух.

Таким образом, задача о нахождении наиболее выгодного варианта перевозок сводится математически к нахождению точки $M(x, y)$ многоугольника Q, в которой функция $290 - 2x - y$ достигает наименьшего значения. Вместо этой функции можно рассматривать функцию $-2x - y$. Действительно, если будет найдено наименьшее значение функции $-2x - y$ на многоугольнике Q, то, прибавив к этому значению 290, получим наименьшее значение функции $290 - 2x - y$.

На рис. 8 показано, что наименьшее значение линейной функции $-2x - y$, рассматриваемой на многоугольнике Q, достигается в вершине C. Иначе говоря, наиболее выгодный вариант перевозок соответствует точке $C(10; 10)$, т.е. $x = 10$, $y = 10$. Общее количество тонно-километров для этих значений x,





y равно $290 - 2 \cdot 10 - 10 = 260$. Как видим, геометрическая модель позволила полностью решить поставленную задачу.

В рассмотренной задаче все объемы перевозок со складов на заводы удалось выразить через две переменные x, y. Это позволило дать геометрическую интерпретацию получившейся системы неравенств на координатной плоскости. Допустим, однако, что при тех же двух складах число заводов равно четырем с потребностью в сырье соответственно 8, 10, 12 и 15 т. Тогда нужно будет ввести три переменные x, y, z, обозначающие количество сырья, вывозимого со склада C_1 на первые три завода. Если задать расстояния от складов до заводов, то можно будет составить выражение для общего числа тонно-километров. Можно написать и неравенства, выражающие неотрицательность количества сырья, вывозимого со складов на заводы. Теперь эти неравенства будут зависеть от трех переменных x, y, z. Каждое из этих неравенств задает полупространство, а система всех неравенств определяет пересечение полупространств, т.е. выпуклый многогранник в трехмерном пространстве. Таким образом, для четырех заводов задача о перевозке сырья будет математически формулироваться как задача о наименьшем значении линейной функции на трехмерном выпуклом многограннике.

Для двух складов и пяти заводов (при сохранении того условия, что все сырье должно быть вывезено полностью) потребуются уже четыре переменные, обозначающие количество сырья, вывозимого со склада C_1 на первые четыре завода. Теперь мы будем иметь неравенства с четырьмя переменными, и для получения геометрической интерпретации потребуется четырехмерное пространство, а при большем числе складов и заводов – пространства еще большей размерности.

К нахождению наибольших значений линейных функций на выпуклых многогранниках приводят и другие практические задачи, на первый взгляд никакого отношения к многогранникам не имеющие. Сюда относятся не только задачи о нахождении наиболее выгодных вариантов перевозок, но также задачи о наиболее выгодных способах раскроя материала, наиболее эффективных режимах работы предприятий, задачи о составлении производственных планов и т.п. Такие задачи объединяются новым научным направлением, получившим название линейное программирование. Тот факт, что эти задачи решаются геометрически с помощью нахождения наименьших или наибольших значений линейных функций на многогранниках (причем, как правило, в пространствах, имеющих размерность, большую трех), был впервые подмечен академиком Л.В. Канторовичем. Необходимость рассмотрения n-мерных пространств при $n > 3$ диктуется также математическими задачами физики, химии, биологии и других областей знания. Таким образом, хотя пространственные свойства окружающего мира хорошо описываются геометрическим трехмерным пространством, потребности практической деятельности человека приводят к необходимости рассмотрения пространств любой размерности n.

Теперь мы можем вернуться к вопросу о том, что такое геометрия. Многомерные пространства, несомненно, относятся к области геометрии, поскольку в них математики рассматривают плоскости, прямые, векторы, углы, расстояния, скалярное произведение, перпендикулярность и т.д., т.е. подлинно геометрические понятия. Многомерные пространства и имеющиеся в них гиперплоскости, многогранники и т.п. нельзя назвать отражением пространственных форм реального мира. При всей практической значимости задач о раскрое материала, транспортных задач и т.д. порождаемые ими понятия многомерной геометрии являются лишь «пространственноподобными»; они похожи на то, что мы видим в реальном пространстве, но представляют собой следующую, более высокую ступень абстракции от пространственных форм реального трехмерного мира.

Понятия и факты геометрии постоянно применяются при решении практических за-

дач. И дело не только в том, что, решая задачи по алгебре, математическому анализу или другим областям математики, мы часто делаем геометрические чертежи или используем формулы и теоремы геометрии. Гораздо важнее то, что, сопоставив алгебраические или иные формулы с геометрическими фактами, мы часто можем «увидеть» геометрически решение задачи и найти такие пути рассуждений, предугадать которые, глядя «чисто алгебраически» на нагромождение формул, просто не представляется возможным. Два приведенных выше примера иллюстрируют это. Вообще, характерной чертой современного развития математики является то, что геометрия все больше приобретает роль метода мышления, метода осмысления и организации математической информации буквально во всех областях математики и ее приложений.

ГЕРОНА ФОРМУЛА

Эта формула позволяет вычислить площадь S треугольника по его сторонам a, b и c:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p – полупериметр треугольника, т.е. $p=(a+b+c)/2$. Формула названа в честь древнегреческого математика Герона Александрийского (около I в.). Герон рассматривал треугольники с целочисленными сторонами, площади которых также являются целыми числами. Такие треугольники называют героновыми. Например, это треугольники со сторонами 13, 14, 15 или 51, 52, 53.

Существуют аналоги формулы Герона для четырехугольников. В связи с тем что задача на построение четырехугольника по его сторонам a, b, c и d имеет не единственное решение, для вычисления в общем случае площади четырехугольника недостаточно только знания длин сторон. Приходится вводить дополнительные параметры или накладывать ограничения. Например, площадь вписанного четырехугольника находится по формуле:

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Если же четырехугольник и вписанный, и описанный одновременно, его площадь находится по более простой формуле: $S=\sqrt{abcd}$.

ГИПЕРБОЛА

Гипербола – одно из *конических сечений*. Ее также можно определить как фигуру, состоящую из всех тех точек M плоскости, разность расстояний которых до двух заданных точек

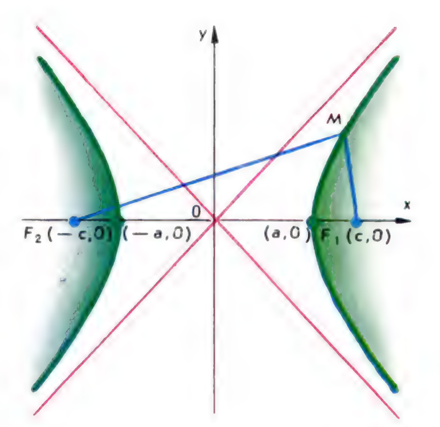


Рис. 1

F_1 и F_2, называемых фокусами гиперболы, постоянна. Обычно оно обозначается через $2a$.

Прямая, проходящая через фокусы (рис. 1), и перпендикулярная ей прямая, равноотстоящая от фокусов, служат осями симметрии гиперболы, а точка их пересечения – ее центром симметрии, называемым также центром гиперболы. Если принять эти прямые за оси координат, выбрав в качестве оси абсцисс прямую, проходящую через фокусы $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, то уравнение гиперболы запишется в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ где } b=\sqrt{c^2-a^2}.$$

Точки $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ называются вершинами гиперболы. Гипербола состоит из двух ветвей, лежащих в разных полуплоскостях относительно оси ординат. Характерной ее особенностью является наличие *асимптот* – прямых

$$y=+\frac{b}{a}x \text{ и } y=-\frac{b}{a}x,$$

к которым приближаются точки гиперболы при удалении от центра.

В том случае, когда угол между асимптотами – прямой, гипербола называется равнобочной, и если асимптоты равнобочной гиперболы выбрать за оси координат, то ее уравнение запишется в виде $y=k/x$, т.е. в виде хорошо известного уравнения обратной пропорциональной зависимости.

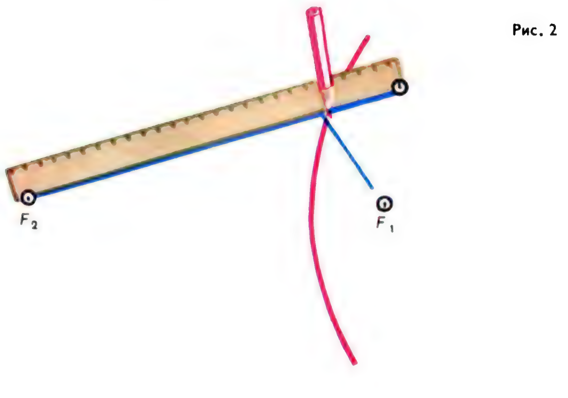
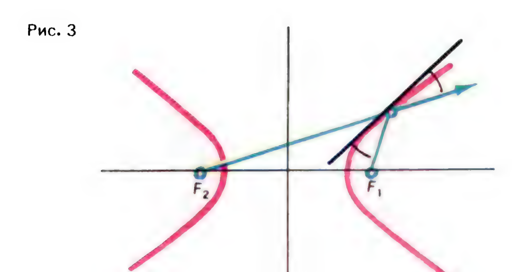


Рис. 2

Рис. 3



Используя определение гиперболы, нетрудно изготовить простейший прибор для ее вычерчивания. Нужно взять линейку, нить и три кнопки. Две кнопки воткнуть в лист бумаги (рис. 2) – в этих точках будут фокусы гиперболы – и к ним привязать концы нити. Третью кнопку втыкают в линейку около ее края, привязав к ней нить недалеко от середины нити, но не в середине. Если теперь, прижимая нить к краю линейки кончиком карандаша и держа нить все время в натянутом состоянии, двигать карандаш, то его графит будет вычерчивать на бумаге одну из ветвей гиперболы. Заметим, что если нить привязать к третьей кнопке ровно в середине нити, то гипербола вырождается в прямую – срединный перпендикуляр отрезка F_1F_2.

Гипербола, как и другие конические сечения, обладает оптическим свойством, которое описывается следующим образом: луч, исходящий из источника света, находящегося в одном из фокусов гиперболы, после отражения движется так, как будто он исходит из другого фокуса (рис. 3). Если сделать зеркало, изогнув зеркально отполированный лист металла по дуге гиперболы, а на прямой, соответствующей фокусу гиперболы, поместить свечу (рис. 4), то наблюдатель, находящийся по ту же сторону от зеркала, что и свеча, увидит ее отражение как бы в одном и том же месте, точно так же, как и при отражении от плоского зеркала (вспомним, что прямая является частным случаем гиперболы и соответствующее зеркало будет плоским).

Еще пример – зона слышимости звука пролетающего самолета. Если самолет движется со сверхзвуковой скоростью, то в воздухе зона слышимости образует конус (рис. 5). Поверхность Земли может приближенно считаться плоскостью, рассекающей этот конус.

Рис. 4

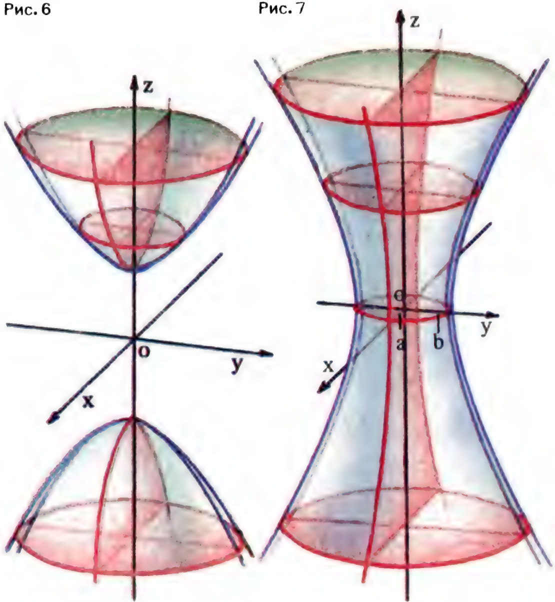


Если гиперболу вращать вокруг ее оси, проходящей через фокусы, то получающаяся поверхность будет называться двуполостным гиперболоидом, потому что состоит из двух полостей: одна – рассмотренная нами, а вторая получается от вращения второй ветви гиперболы (рис. 6). Если же вращать гиперболу вокруг второй ее оси, то получится поверхность, называемая однополостным гиперболоидом (рис. 7). Такую форму имеют секции Шаболовской радиобашни в Москве.

Рис. 5



Рис. 6 Рис. 7



Заметим, что зеркало прибора, описанного в книге А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина», является не гиперболоидом, а параболоидом (см. *Парабола*). Возможно, что название «гиперболоид» А. Н. Толстой выбрал из-за того, что *hyperbole* в переводе с греческого означает «преувеличение».

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функции, определяемые формулами

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

называются соответственно гиперболическим синусом и гиперболическим косинусом. На рис. 1 и 2 приведены графики гиперболических функций. Гиперболический синус – возрастающая функция, нечетная, равная нулю при $x = 0$, положительная при $x > 0$ и отрицательная при $x < 0$. Гиперболический косинус – четная функция, в точке $x = 0$ принимает наименьшее значение. При неограниченном возрастании аргумента ($x \to +\infty$) обе эти функции очень быстро возрастают. С достаточной степенью точности их можно заменить при больших x просто показательной функцией $\frac{1}{2}e^x$.

Нетрудно убедиться, что при любых x справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Гиперболические функции обладают многими свойствами, аналогичными свойствам тригонометрических функций, например справедливы следующие формулы:

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

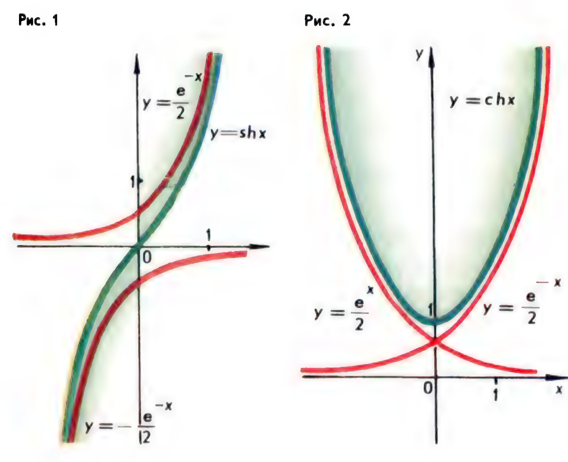
$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 y.$$

Кроме функций $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ рассматриваются также гиперболические тангенс и котангенс, которые обозначаются $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$; они определяются по формулам:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}; \ \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Рис. 1 Рис. 2



Графики этих функций изображены на рис. 3.

Рис. 3 Рис. 5

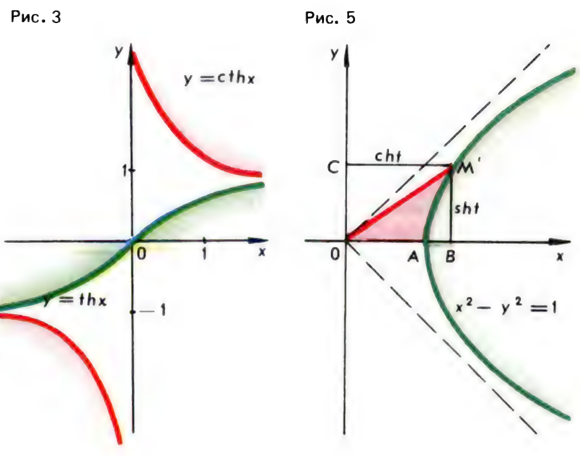
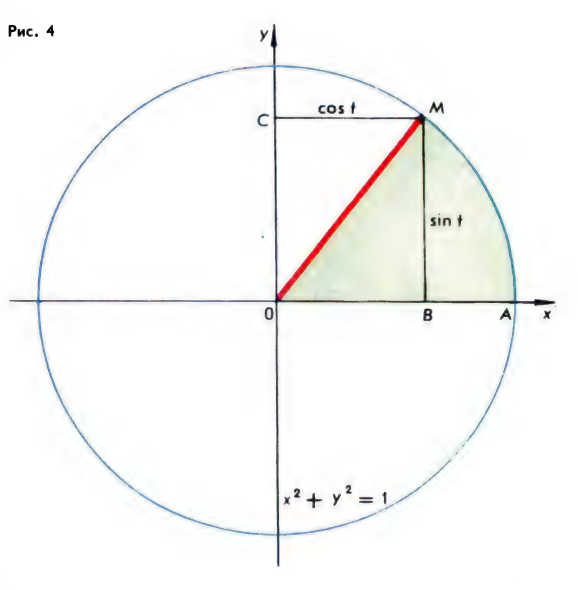


Рис. 4



Название свое гиперболические функции получили потому, что они связаны с равнобочной *гиперболой* $x^2 - y^2 = 1$ так же, как функции синус и косинус связаны с единичной окружностью $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 4 и 5). Если точка M лежит на единичной окружности, то ее абсцисса и ордината соответственно равны $x = \cos t$, $y = \sin t$. Для точки M', лежащей на гиперболе $x^2 - y^2 = 1$, абсциссу и ординату можно представить в виде $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$. Для окружности t равно углу AOM, но, кроме того, t также равно удвоенной площади сектора AOM. Последнее верно и для гиперболы, т.е. если t равно удвоенной площади гиперболического сектора AOM', то координаты точки M' равны $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$.

Гиперболические функции находят применение в электротехнике, строительной механике, сопротивлении материалов и др. С помощью гиперболических функций описывается, например, прогиб каната (цепи, проволоки, веревки); такая кривая называется ***цепной линией***.

ГРАФИК

График *функции* – один из способов ее представления. Представить ту или иную функцию можно по-разному, например словесным описанием. Из физики известно, что при равномерном движении пройденный путь прямо пропорционален времени, прошедшему с момента начала пути. Эта фраза описывает путь как *линейную функцию* времени.

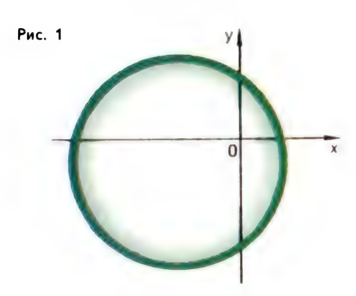
В руках у электрика можно увидеть таблицу, где для проводов различных диаметров указаны предельно допустимые значения силы тока, на парте школьника – таблицы логарифмов и тригонометрических функций... Все это примеры табличного представления функций. В выкладках и расчетах функции обычно задают с помощью формул.

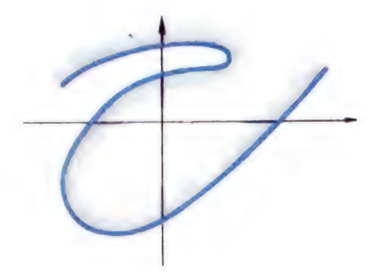
У каждого способа представления функции есть свои достоинства. Словесный наиболее прост и доходчив, если, конечно, функцию удается описать простыми фразами. Формулы часто используют потому, что с ними удобно проводить вычисления, их можно преобразовывать и анализировать, выясняя свойства функции. Табличный способ предпочитают тогда, когда трудно вычислить значения функции или когда она может принимать лишь несколько отдельных значений (здесь убедителен пример с проводами: по действующим в промышленности стандартам их диаметры могут равняться только нескольким определенным значениям).

Графический способ представления функции – самый наглядный. График функции – это линия, дающая цельное представление о характере изменения функции по мере изменения ее аргумента. А именно, график функции $y=f(x)$ – это множество точек (x, y) на координатной плоскости, где координате x придаются всевозможные значения из области определения функции, и для каждого такого x значение y определяется функциональной зависимостью $y=f(x)$. Функциональная зависимость предполагает, что каждому значению x из области определения функции соответствует одно, и только одно, значение y. Отсюда следует, что любой перпендикуляр, восстановленный к оси абсцисс в какой-либо точке из области определения функции, пересекает ее график лишь в одной точке. Поэтому линии, изображенные на рис. 1, не могут быть графиками никаких функций, а линия, изображенная на рис. 2, есть график некоторой функции.

Благодаря своей наглядности графический способ задания функций часто сопутствует другим способам. Выведя формулу какой-либо функциональной зависимости, исследователь вслед за этим строит еще и ее график. На многих электронных вычислительных машинах кроме печатающего устройства, выдающего результаты расчетов в виде колонки цифр, есть и графопостроитель, представляющий те же результаты в форме графиков. Многие приборы выдают показания именно в виде графиков. Например, барограф вычерчивает график атмосферного давления как функции времени, кардиограмму можно назвать графиком работы сердца.

Рис. 1





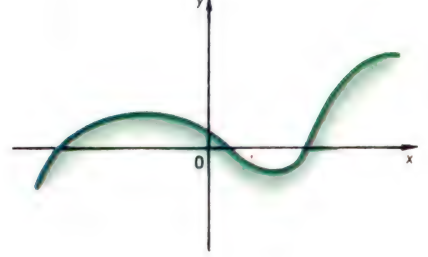
Графики большинства функций имеют названия, сходные с названием самой функции. График функции синус называют *синусоидой*, график функции тангенс – тангенсоидой, график *логарифмической функции* – логарифмикой и т. д.

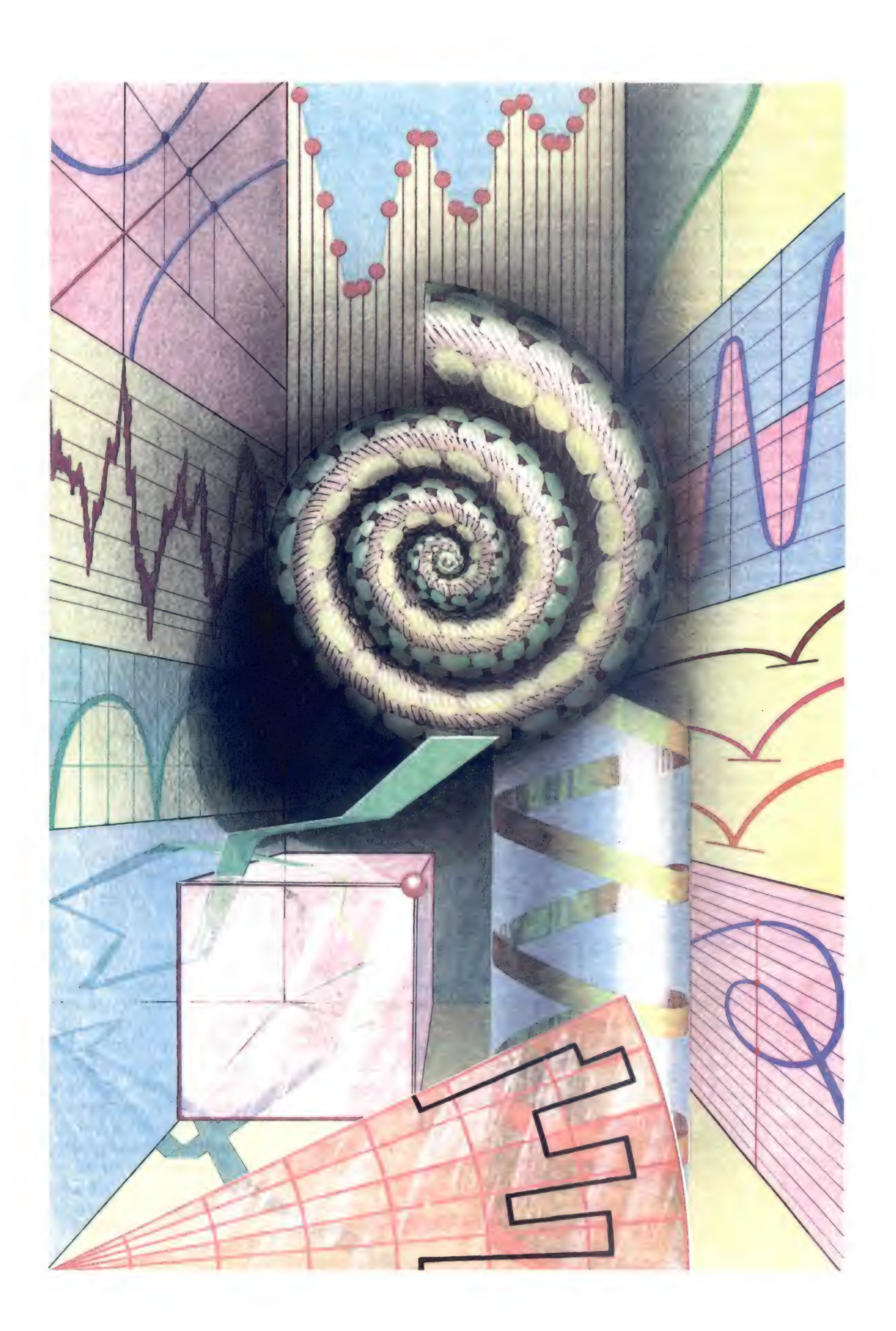
Чтобы построить эскиз графика функции, предварительно проводят ее исследование. Оно ведется поэтапно следующим путем.

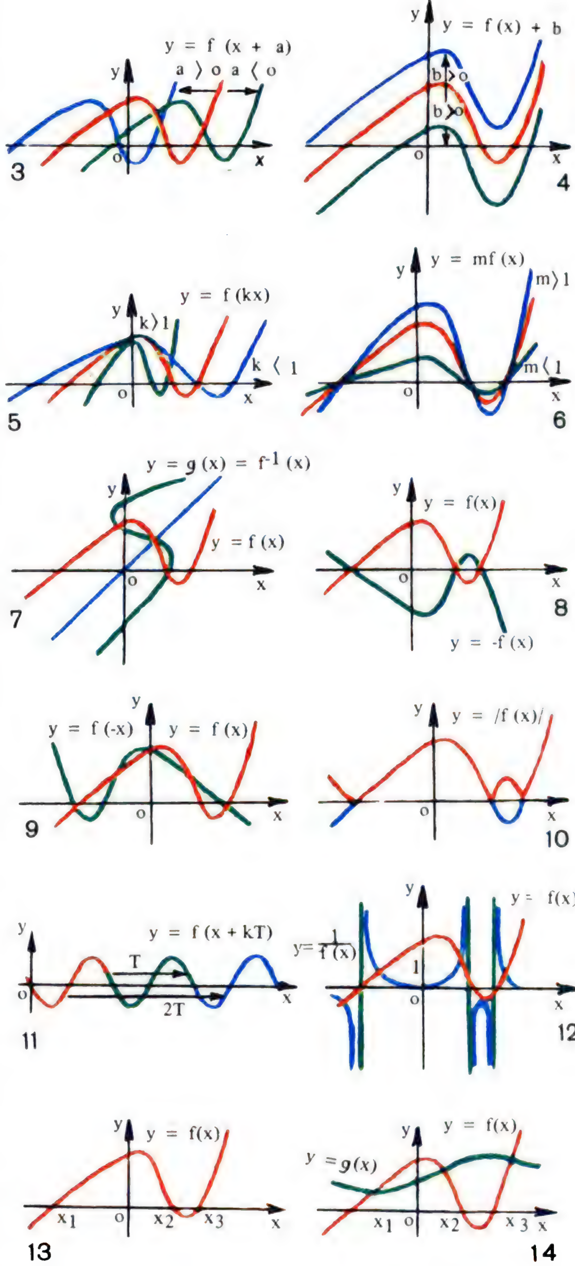
Находят область определения функции и область ее значений. Это определяет разметку координатных осей, в которых строится график.

Находят промежутки непрерывности функции и определяют точки ее разрыва. В точках бесконечного разрыва проводят вспомогательные (например, пунктирные) прямые – *асимптоты*, к которым будет приближаться график функции, уходя в бесконечность того или иного знака. На эскизе указывают такое поведение графика в точках разрыва.

Рис. 2







Далее вычисляют первую производную функции и отыскивают точки, в которых производная не существует или равна нулю (критические точки), а также находят участки возрастания и убывания функции. Если на некотором промежутке производная функции положительна, то функция здесь возрастает. Если отрицательна – функция убывает на этом участке.

Находят *экстремумы функции*. Точки экстремума входят в число критических. Для *непрерывных функций*, имеющих производную по обе стороны от критической точки, далее исследуют знак производной. Если она положительна слева от критической точки и отрицательна справа, то функция в этой точке достигает максимума. Если производная отрицательна слева от критической точки и положительна справа, то функция в этой точке имеет минимум.

Находят участки, где функция выпукла вверх и где она выпукла вниз (см. *Выпуклые функции*). Если на некотором промежутке вторая производная функция отрицательна, то функция здесь выпукла вверх. Если положительна – функция выпукла вниз на этом участке.

Исследуя функцию, находят также точки перегиба функции, т. е. такие точки, по обе стороны от которых направление выпуклости функции неодинаково.

Находят уравнения асимптот функции, если они существуют, и проводят асимптоты на координатной плоскости.

Теперь остается начертить сам график: соединить нанесенные на координатную плоскость точки линией, учитывая ее возрастание или убывание, выпуклость вверх или вниз, а если есть асимптоты – подвести к ним ветви графика, показывая их сближение с асимптотами.

Чтобы уточнить график, нередко вычисляют значения функции в каких-либо точках, отыскивают точки пересечения графика с координатными осями и т. д. В некоторых случаях график функции можно построить по заданной его части или по графику другой функции с помощью линейных преобразований: параллельного переноса, растяжения (или сжатия), преобразования симметрии (см. *Геометрические преобразования*).

С помощью параллельного переноса вдоль оси Ox или оси Oy по заданному графику функции $y=f(x)$ можно построить графики функций $y=f(x+a)$ (рис. 3) и $y=f(x)+b$ (рис. 4). С помощью растяжения или сжатия по оси Ox или оси Oy можно построить график функции $y=f(kx)$ (рис. 5) и $y=mf(x)$ (рис. 6). Для построения графика функции $y=mf(kx+a)+b$ последовательно применяют вышеуказанные преобразования. График функции $g=y(x)=f^{-1}(x)$, обратный функции $y=f(x)$, симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 7). График функции $y=-f(x)$ может быть получен из графика функции $y=f(x)$ отражением относительно оси Ox (рис. 8), а график функции $f(-x)$ – из графика функции $f(x)$ отражением относительно оси Oy (рис. 9). График функции $y=|f(x)|$ получается отражением относительно оси Ox частей графика $y=f(x)$ при $y<0$ (рис. 10).

Если $y=f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то достаточно построить часть ее графика для $0 \leqslant x \leqslant T$, и тогда весь график функции получается переносом построенной части вдоль оси абсцисс на отрезки kT (рис. 11). График функции $y=\dfrac{1}{f(x)}$ получается

из графика функции $y = f(x)$ заменой каждой ординаты y величиной ей обратной $\frac{1}{y}$ (рис. 12). Графики функций часто используются для приближенного решения уравнений (например, $f(x) = 0$ в точках x_1, x_2, x_3, рис. 13), систем уравнений и неравенств. Например, при решении уравнения вида $f(x) = g(x)$ строятся графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Абсциссы точек пересечения этих графиков являются корнями уравнения (рис. 14). Те участки оси Ox на которых график $y = f(x)$ лежит выше графика $y = g(x)$ являются решениями неравенства $f(x) > g(x)$ (рис. 14).

ГЕОМЕТРИЯ КОМБИНАТОРНАЯ

На рис. 1 каждый из шести кругов имеет общую точку с кругом, расположенным внутри; при этом никакие два круга не имеют общих внутренних точек. А на рис. 2 имеется восемь квадратов, каждый из которых также имеет общую точку с внутренним квадратом (и снова фигуры попарно не имеют общих внутренних точек). А можно ли вокруг некоторой выпуклой фигуры таким же образом расположить девять равных ей фигур, полученных из исходной с помощью параллельного переноса? Ответ отрицателен, хотя доказать это и непросто.

Рассмотренный вопрос относится к комбинаторной геометрии – новой ветви математики, сформировавшейся лишь в XX в. Она занимается различными задачами, связанными с взаимным расположением нескольких фигур (чаще всего выпуклых), с разрезанием фигур на части, с освещением границы фигуры несколькими источниками света и т. п. При этом всегда ставится экстремальная задача: найти наибольшее число выпуклых фигур, расположенных так, как говорилось выше (рис. 1, 2), найти наименьшее число параллельных световых пучков, освещающих всю границу выпуклого тела (рис. 3), и т. п. Различных постановок комбинаторно-геометрических задач очень много, причем, как правило, они легко формулируются, но решение каждой из них требует огромных усилий.

В настоящее время в комбинаторной геометрии выделились несколько ведущих направлений. Одним из них является круг задач, связанных с теоремой Хелли (см. *Выпуклые фигуры*). Например, из теоремы Хелли следует, что для любого набора точек на плоскости, такого, что каждые три его точки можно покрыть кругом радиуса r, найдется такой круг радиуса r, который покроет все эти точки.

Вот еще пример утверждения, которое легко получить из теоремы Хелли. В параллелограмме (или иной центрально симметричной фигуре) имеется такая точка O, что на любой прямой, проходящей через O, высекаются отрезки AO, BO, отношение которых равно 1 (рис. 4). В треугольнике такой точки нет, но можно выбрать такую точку O, что отношение отрезков AO и BO заключено между $^1/_2$ и 2 (рис. 5). Оказывается, что внутри любой выпуклой фигуры F на плоскости найдется такая точка O, для которой отношение отрезков AO и BO (на любой прямой, проходящей через O) заключено между $^1/_2$ и 2. Треугольник в этом смысле самая несимметричная фигура.

Рис. 1

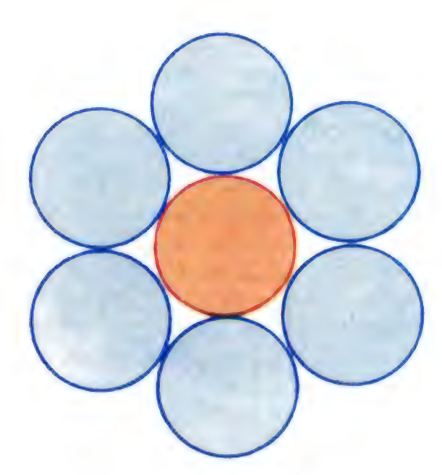


Рис. 2

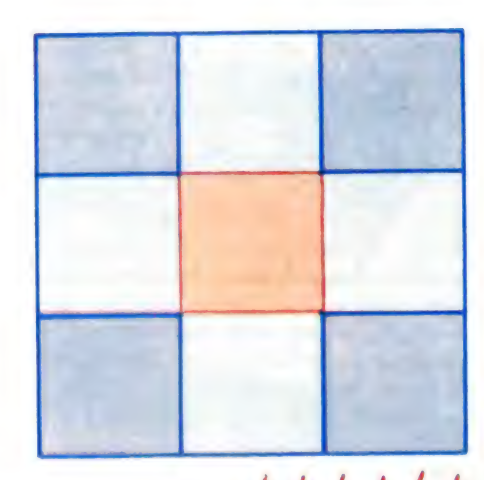
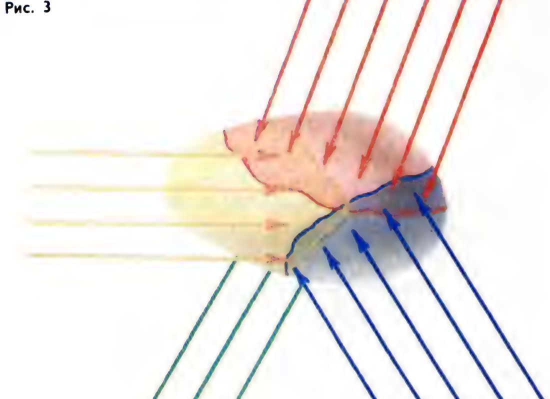
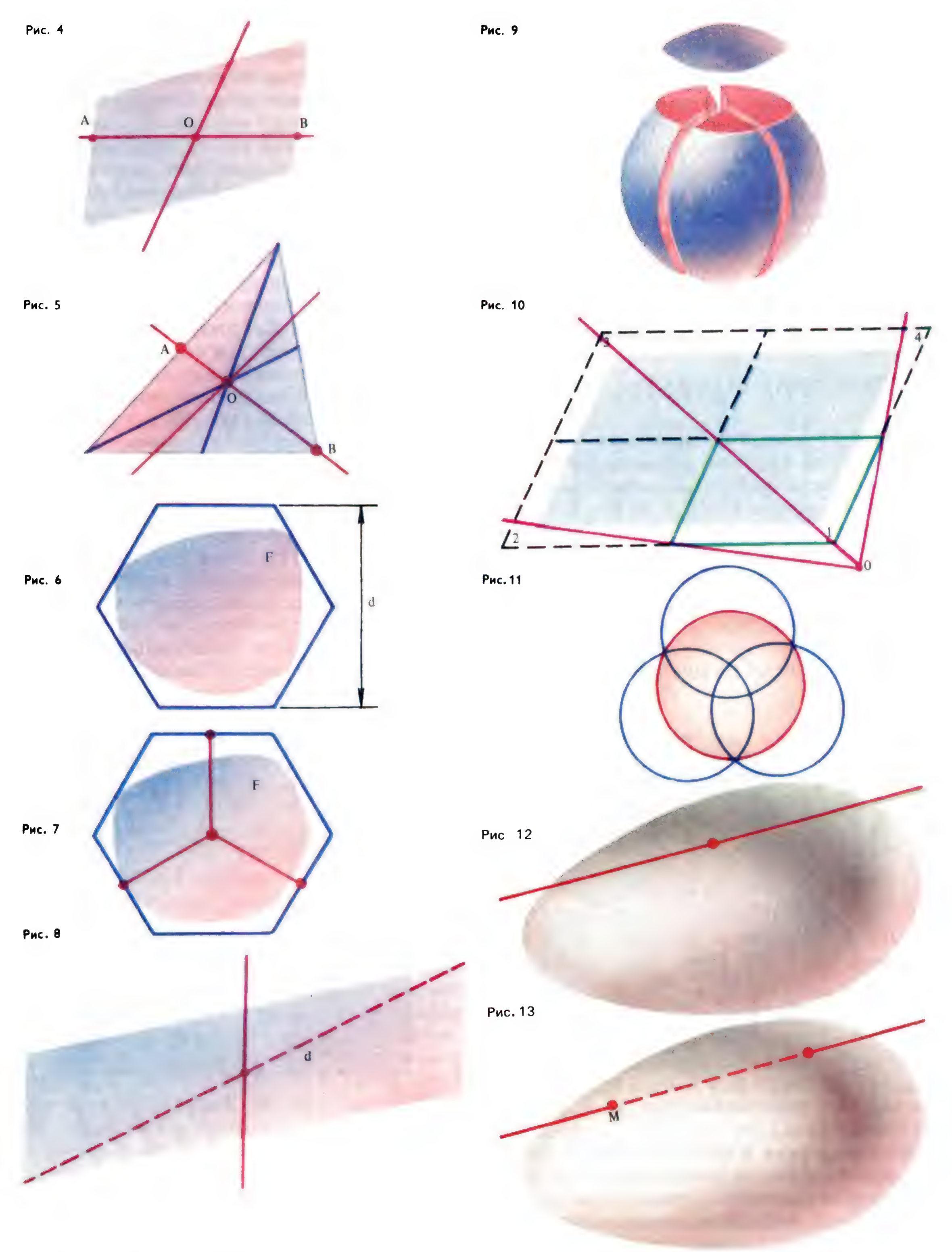


Рис. 3





Теорема Хелли и различные ее обобщения и применения составляют сегодня важный раздел комбинаторной геометрии. Причем применяется она не только в геометрии, но и во многих других областях математики. Например, в прошлом столетии русский математик П. Л. Чебышев установил ряд интересных свойств функций, «наименее уклоняющихся от нуля». А впоследствии оказалось, что свойства этих функций наиболее просто и геометрично выводятся именно с помощью теоремы Хелли.

Зарождение еще одного направления в комбинаторной геометрии связано с именем польского математика К. Борсука. Он исходил из интересного результата, полученного венгер-

Рис. 14

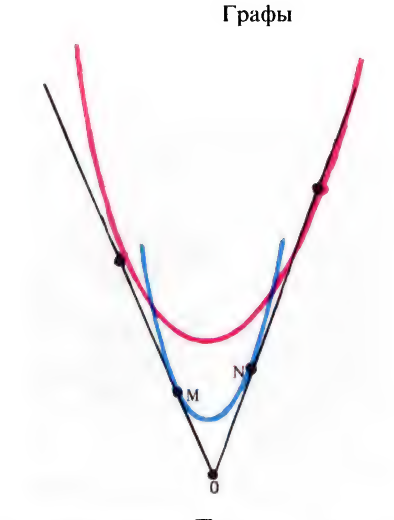
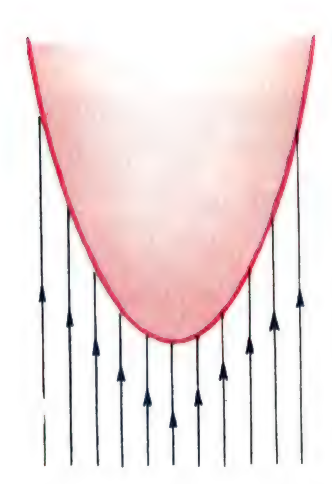


Рис. 15



ским математиком Палом: всякая фигура диаметра d (т.е. фигура, у которой наибольшее расстояние между двумя точками равно d) может быть вмещена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между противоположными сторонами равно d (рис. 6). Этот шестиугольник (а вместе с ним и расположенная в нем фигура) может быть разбит на три части, каждая из которых имеет диаметр $< d$ (рис. 7). Итак, любая плоская фигура диаметра d может быть разбита на три части меньшего диаметра. Для некоторых фигур существует разбиение и на две части меньшего диаметра (рис. 8), но трех частей достаточно для любой плоской фигуры. Опираясь на этот факт, в 1930 г. Борсук сформулировал гипотезу: любая фигура диаметра d в пространстве может быть разбита на 4 части, каждая из которых имеет диаметр $< d$. Для шара такое разбиение показано на рис. 9. Лишь в 1955 г. английский математик Эгглстон доказал, что эта гипотеза Борсука справедлива.

Вот интересная комбинаторная проблема, еще не решенная для пространства. На рис. 10 показано, что параллелограмм можно покрыть четырьмя меньшими параллелограммами, полученными из данного гомотетиями. А иные фигуры – даже тремя меньшими «копиями» (рис. 11). Ясно, что в пространстве надо разрешить иметь восемь меньших «копий»: ведь параллелепипед нельзя покрыть семью меньшими гомотетичными параллелепипедами (поскольку сразу две вершины одной меньшей «копией» не покрываются). Но можно ли любое выпуклое тело в пространстве покрыть восемью меньшими гомотетичными телами? Это неизвестно даже для выпуклых многогранников. Гипотеза швейцарского математика Хадвигера (любое выпуклое тело может быть покрыто 8 меньшими гомотетичными «копиями») еще ждет своего решения.

Удивительно, что проблема Хадвигера эквивалентна следующей проблеме, поставленной советским математиком В. Г. Болтянским: какое наименьшее число пучков параллельных лучей нужно взять, чтобы осветить всю границу выпуклого тела? В частности, границу любого ли выпуклого трехмерного многогранника можно осветить восемью параллельными пучками лучей? При этом лучи, проходящие по касательной, как на рис. 12, не считаются освещающими точку касания (т.е. луч, освещающий точку M, должен после прохождения через эту точку войти внутрь тела, рис. 13). Интересно отметить, что теорема об эквивалентности указанных проблем справедлива лишь для ограниченных выпуклых фигур. На рис. 14 показано, что для параболической области F любая меньшая гомотетичная фигура содержит лишь конечную дугу MN границы фигуры F. Поэтому нужно бесконечное число «копий», чтобы покрыть всю фигуру F, т.е. для этой фигуры число Хадвигера равно ∞. А число освещающих параллельных пучков равно 1 (рис. 15).

ГРАФЫ

Графом в математике называется конечная совокупность точек, называемых вершинами; некоторые из них соединены друг с другом линиями, называемыми ребрами графа.

При взгляде на географическую карту сразу бросается в глаза сеть железных дорог. Это типичный граф: кружочки обозначают станции – вершины графа, а соединяющие их пути – ребра.

Граф на рис. 1 изображает схему дорог между селами *М, А, Б, В* и *Г*. Здесь каждые две вершины соединены между собой ребром. Такой граф называется полным. Числа на рисунке указывают расстояния между селами по этим дорогам. Пусть в селе *М* находится почта и почтальон должен развезти письма в остальные четыре села. Существует много различных маршрутов поездки. Как из них выбрать наикратчайший? Проще всего проанализировать все варианты. Сделать это поможет новый граф (рис. 1, внизу), на котором легко увидеть возможные маршруты. Вершина *М* вверху – начало маршрутов. Из нее можно начать путь четырьмя различными спосо-

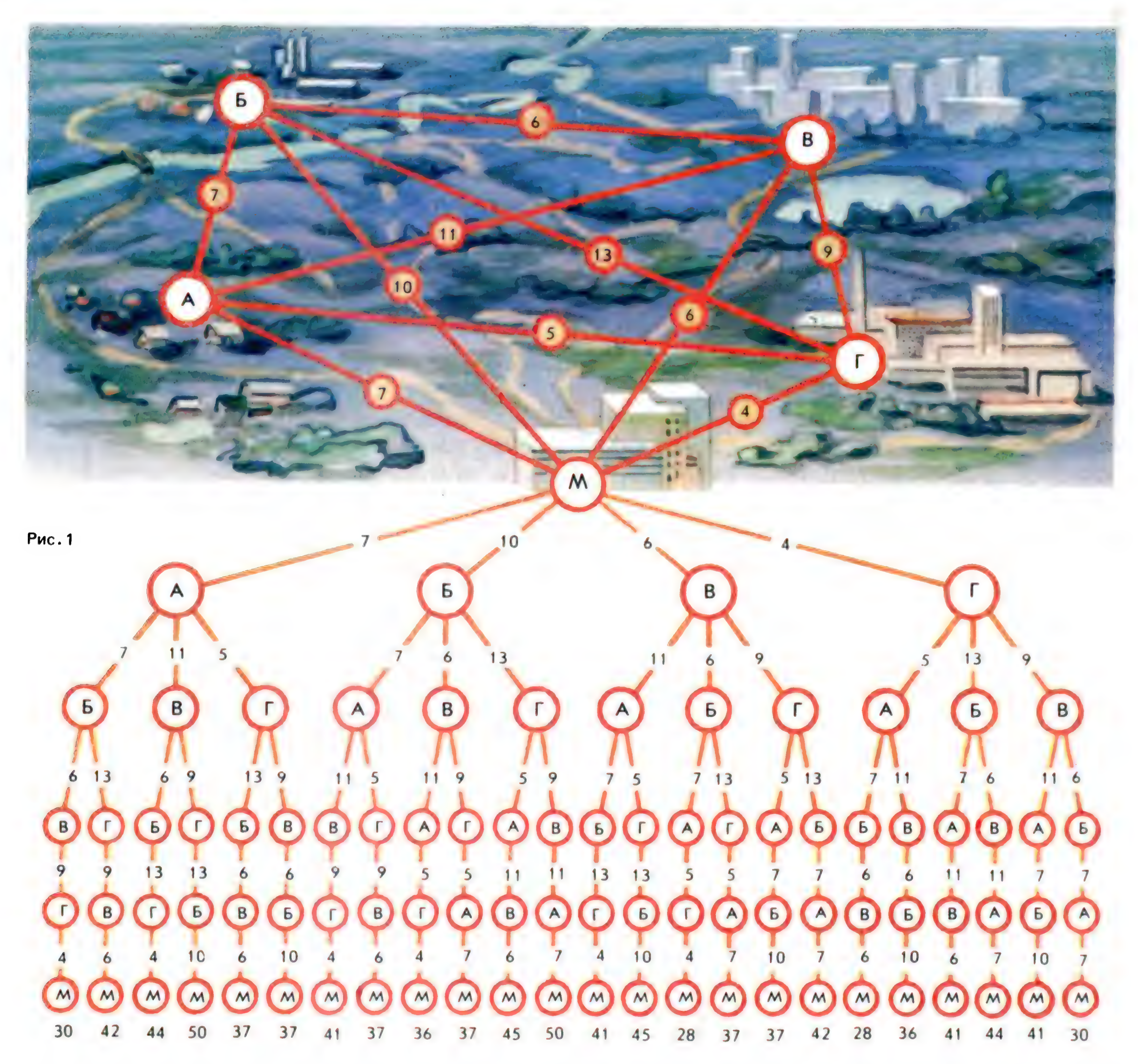


Рис. 1

бами: в *А*, в *Б*, в *В* или в *Г*. После посещения одного из сел остается три возможности продолжения маршрута, потом две, потом дорога в последнее село и вновь в *М*. Всего $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа. Все они на этом графе.

Расставим вдоль его ребер цифры, обозначающие расстояния между селами, а в конце каждого маршрута напишем сумму этих расстояний по маршруту. Из полученных 24 чисел наименьшими являются два числа по 28 км, соответствующие маршрутам *М–В–Б–А–Г–М* и *М–Г–А–Б–В–М*. Заметим, что это один и тот же путь, но пройденный в разных направлениях.

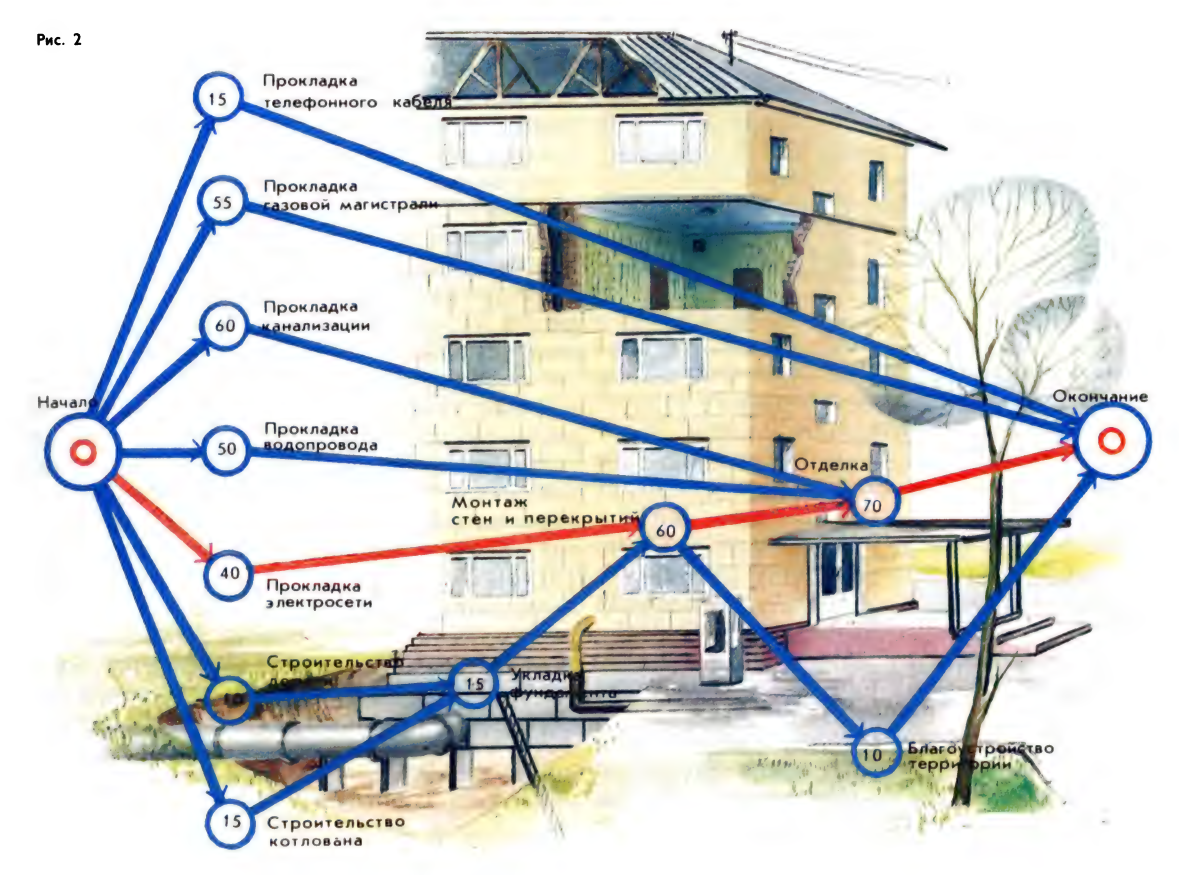
Подобные задачи возникают часто при нахождении наилучших вариантов развозки товаров по магазинам, материалов по стройкам.

В строительстве графы используются при планировании проведения работ. Граф, изображенный на рис. 2, называется сетевым графиком строительства. В данном случае он составлен для строительства жилого дома. Вершины этого графа обозначают отдельные виды работ на стройке, кроме того, есть еще две вершины: начало строительства и его окончание. Если на ребрах графа нанесены стрелочки, указывающие направление ребер, то такой граф называют направленным. Заметим, что и граф на рис. 1 тоже можно было сделать направленным, указав направление сверху вниз на каждом из ребер, что соответствовало бы направлению движения почтальона.

Стрелка от работы *А* к работе *В* на графе, изображенном на рис. 2, означает, что работа *В* не может начаться раньше, чем кончится работа *А*. Нельзя начинать монтаж стен, не закончив строить фундамент, чтобы приступить к отделке, нужно иметь на этажах воду, для сварочных работ при монтаже нужно иметь подвод электричества и т. д.

Около вершин графа указаны числа – продолжительность в днях соответствующей работы. Теперь мы можем узнать наименьшую возможную продолжительность строитель-

Рис. 2



ства. Для этого из всех путей по графу в направлении стрелок нужно выбрать путь, у которого сумма чисел при вершинах наибольшая. Он называется критическим путем (на рис. 2 он выделен коричневым цветом). В нашем случае получаем 170 дней. А если сократить время прокладки электросети с 40 до 10 дней, то и время строительства тоже сократится на 30 дней? Нет. В этом случае критический путь станет проходить не через эту вершину, а через вершины, соответствующие строительству котлована, укладке фундамента и т. д. И общее время строительства составит 160 дней, т.е. срок сократится лишь на 10 дней.

Графы часто используют для решения логических проблем, связанных с перебором вариантов. Для примера рассмотрим такую задачу. В ведре 8 л воды, и имеется две кастрюли емкостью 5 и 3 л. Требуется отлить в пятилитровую кастрюлю 4 л воды и оставить в ведре 4 л, т.е. разлить воду поровну в ведро и большую кастрюлю.

Ситуацию в каждый момент можно описать тремя числами (x, y, z), где x – количество литров воды в ведре, y – в большой кастрюле, z – в меньшей. В начальный момент ситуация описывалась тройкой чисел (8, 0, 0), от нее мы можем перейти в одну из двух ситуаций: (3, 5, 0), если наполним водой большую кастрюлю, или (5, 0, 3), если наполним меньшую кастрюлю.

В результате получаем два решения: одно в 7 ходов, другое в 8 ходов.

Подобным образом можно составить граф любой позиционной игры: шахмат, шашек, «крестиков-ноликов», где позиции станут вершинами, а направленные отрезки между ними будут означать, что одним ходом можно перейти от одной позиции к другой, по направлению стрелки.

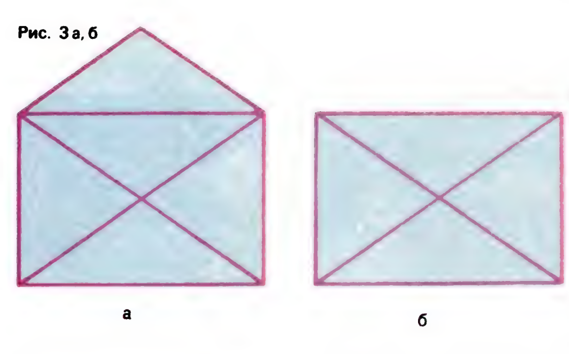
Однако для шахмат и шашек такой граф будет очень большим, поскольку различные позиции в этих играх исчисляются миллионами. А вот для игры в «крестики-нолики» на доске 3 × 3 соответствующий граф нарисовать не так уж трудно, хотя и он будет содержать несколько десятков (но не миллионов) вершин.

Свойства графов не зависят от того, соединены вершины отрезками или кривыми линиями, что дает возможность изучения их свойств с помощью одной из молодых наук – *топологии*.

Впервые основы теории графов появились в работе Л. Эйлера, где он описывал решения головоломок и математических развлекательных задач. Широкое развитие теория графов получила с 50-х гг. XX в. в связи со становлением кибернетики и развитием вычислительной техники.

В терминах графов легко формулируется и решается задача о назначении на должности. А именно: если имеется несколько вакантных

Рис. 3 а, б



должностей и группа лиц, желающих их занять, причем каждый из претендентов имеет квалификацию для нескольких должностей, то при каких условиях каждый из претендентов сможет получить работу по одной из своих специальностей?

Свойства графов не зависят от того, соединены вершины отрезками или кривыми линиями. Это дает возможность изучения их свойств с помощью одной из молодых наук – *топологии*, хотя сами задачи теории графов являются типичными задачами *комбинаторики*.

Вот несколько задач теории графов. Задача об эйлеровом пути: найти путь по ребрам графа, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Такой путь существует лишь в том случае, если граф – связный, т. е. от каждой его вершины к каждой другой можно пройти по ребрам графа, и из каждой вершины, кроме, может быть, двух, выходит четное число ребер. На графе, изображенном на рис. 3,*а*, он есть, а на рис. 3,*б* его нет.

Гамильтонов путь на графе – путь, проходящий по одному разу через все вершины графа. Попробуйте отыскать его на графе, состоящем из вершин и ребер додекаэдра. Условия существования гамильтонова пути на графе формулируются существенно сложнее, чем для эйлерового пути.

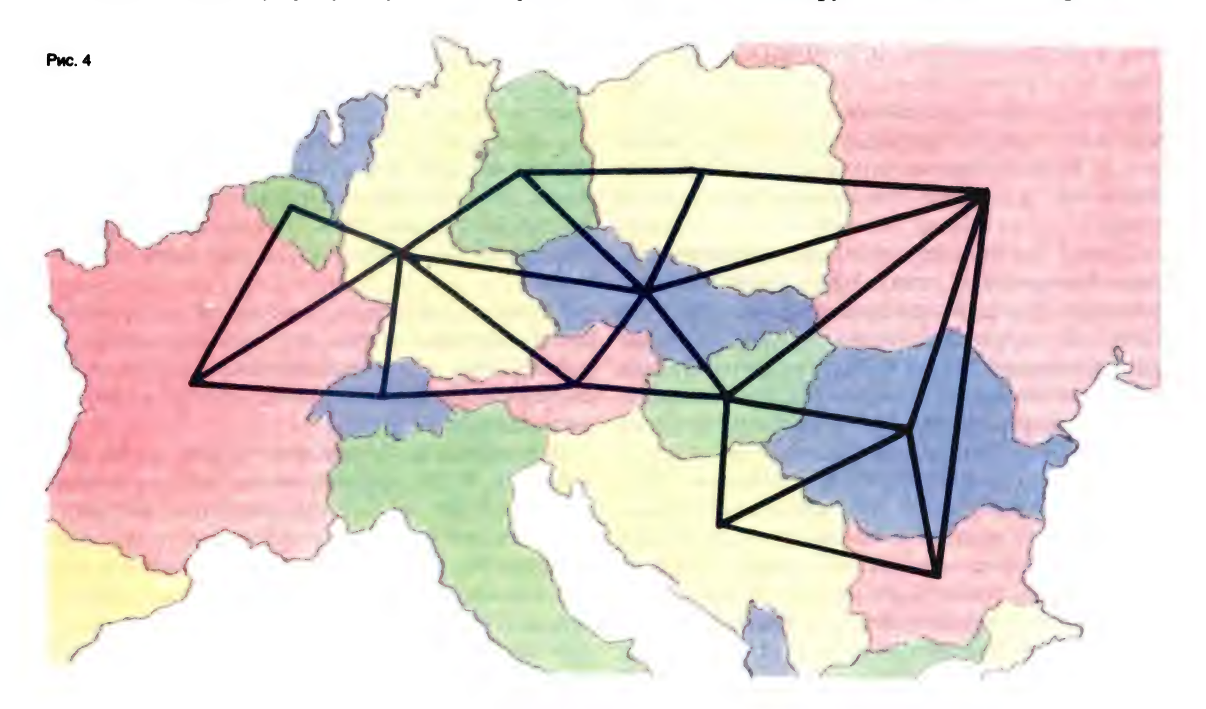
Хроматическим числом графа называется наименьшее количество красок, с помощью которых можно так раскрасить вершины графа, что любые две вершины, соединенные ребром, окрашиваются при этом в разные цвета. Долгое время математики не могли решить такую проблему: достаточно ли четырех красок, для того чтобы раскрасить произвольную географическую карту так, чтобы любые две страны, имеющие общую границу, были окрашены разными красками? Если изобразить страны точками – вершинами графа, соединив ребрами те вершины, для которых соответствующие им страны граничат (рис. 4), то задача сведется к следующей: верно ли, что хроматическое число любого графа, расположенного на плоскости не больше четырех? Положительный ответ на этот вопрос был лишь недавно получен с помощью ЭВМ.

ГРУППА

Группа – одно из основных понятий математики, применяемое в алгебре, геометрии, физике и других науках.

С точки зрения диалектической теории познания понятие группы является абстракцией

Рис. 4



второй ступени. Математические абстракции первой ступени можно назвать слепками с объектов и процессов реального мира, т. е. для них имеются «прототипы» в окружающей нас действительности. Например, человек многократно наблюдал множества, содержащие два элемента: две руки, два глаза и т. д. Постепенно, путем отвлечения от конкретных свойств элементов, входящих в эти множества, возникает новое понятие – число 2.

Математические абстракции первой ступени возникли в глубокой древности. Так, Евклид, который жил более двух тысяч лет назад, использовал уже сформированные понятия о числах и действиях над ними, о геометрических линиях, поверхностях и телах. У Архимеда мы находим представление о векторном понимании механических величин (силы, скорости) и их сложении по правилу параллелограмма.

В XIX в. в распоряжении математиков было уже несколько конкретных действий: сложение действительных чисел, умножение чисел, сложение векторов, умножение (или, лучше сказать, композиция) *геометрических преобразований*, умножение перестановок (т. е. преобразований конечного множества) и др. При этом оказалось, что свойства этих математических действий во многом похожи. Например, и операция сложения чисел, и сложения векторов, и умножения чисел, и композиции геометрических преобразований обладают свойством ассоциативности (сочетательности). Постепенно возникла абстракция второй ступени, т. е. абстракция уже сформировавшихся математических понятий первой ступени: математики стали отвлекаться от конкретного вида складываемых (или перемножаемых) элементов, т. е. от того, что складывается, а обращали внимание лишь на то, что в некотором множестве задано сложение и это действие обладает определенными свойствами (ассоциативности и др.). Это и привело к возникновению понятия группы.

Расскажем подробно об этом понятии. Свойства сложения действительных чисел хорошо известны:

1) $a+(b+c)=(a+b)+c$ для любых a, b, c (ассоциативность);

2) $a+b=b+a$ для любых a, b (коммутативность);

3) существует такое число 0, что $a+0=a$ для любого a (существование нуля);

4) для любого a существует такое число $-a$, что $a+(-a)=0$ (существование противоположного элемента).

Точно такими же свойствами обладает сложение векторов:

1) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Далее, операция умножения, если ее рассматривать в множестве всех отличных от нуля действительных чисел, также имеет аналогичные свойства:

1) $a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность);

2) $ab=ba$ (коммутативность);

3) существует такое число 1, что $a\cdot 1=a$ для любого a;

4) для любого $a (a\neq 0)$ существует такое число a^{-1}, что $a\cdot a^{-1}=1$.

А вот операция композиции движений (см. *Геометрия*) обладает лишь тремя из этих свойств:

1) $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ для любых движений f, g, h;

2) существует такое движение e (тождественное преобразование), что $f\circ e=f$, $e\circ f=f$ для любого движения f;

3) для любого движения f существует обратное движение f^{-1}, удовлетворяющее соотношениям $f\circ f^{-1}=e$, $f^{-1}\circ f=e$. Коммутативность же, т. е. соотношение $g\circ f=f\circ g$ для движений, вообще говоря, места не имеет.

Теперь будет понятно следующее определение: множество G, в котором задана некоторая операция, сопоставляющая двум элементам a, b из G некоторый элемент $a*b$ того же множества G, называется группой, если выполнены следующие свойства:

I) $a*(b*c)=(a*b)*c$ для любых a, b, c из G;

II) существует такой элемент $e\in G$ (единица, или нейтральный элемент группы G), что $a*e=a$ и $e*a=a$ для любого $a\in G$;

III) для любого $a\in G$ существует такой элемент $a^{-1}\in G$ (обратный элемент), что $a*a^{-1}=e$, $a^{-1}*a=e$;

если, кроме того, для любых a, b из G справедливо соотношение

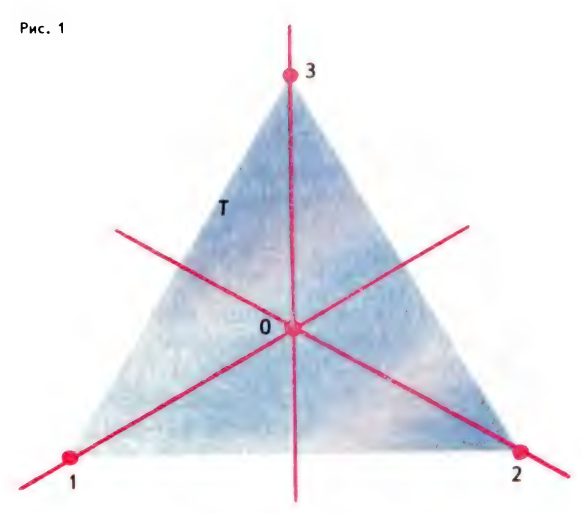
IV) $a*b=b*a$,

то группа G называется коммутативной (или абелевой).

Из сказанного выше ясно следующее: 1) множество R всех действительных чисел, в котором рассматривается операция сложения, является группой (и притом абелевой); 2) множество R^2 всех векторов на плоскости с имеющейся в нем операцией сложения является абелевой группой; 3) множество всех отличных от нуля действительных чисел, в котором рассматривается операция умножения, является абелевой группой; 4) множество всех движений плоскости, в котором рассматривается операция композиции, является группой, но не абелевой (т. е. не коммутативной).

В чем польза от введения такой «абстракции второй ступени», какой является группа? Ответ можно сформулировать так. Доказав на основе аксиом 1–4 некоторую теорему теории абелевых групп, мы сможем утверждать, что эта теорема будет справедлива и для действительных чисел, и для векторов, и для любой другой абелевой группы.

Рис. 1



Это позволит, один раз доказав теоремы об абелевых группах, применять их в теории относительности, в кристаллографии, в ядерной физике, т. е. во всех областях, где появляются группы.

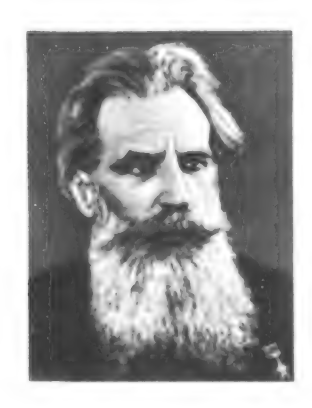
Свои первые применения понятие группы нашло в алгебре. Особенно интересной была теория, созданная французским математиком Э. *Галуа*.

В геометрии важную роль играют группы самосовмещений фигур. Если F – некоторая фигура на плоскости (или в пространстве), то можно рассмотреть множество G_F всех тех движений плоскости (или пространства), при которых фигура F переходит в себя. Это множество является группой (см. *Геометрические преобразования*). Например, для равностороннего треугольника T группа движений плоскости, переводящих треугольник в себя, состоит из 6 элементов: поворотов на углы 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$ вокруг точки O и симметрий относительно трех прямых. Они изображены на рис. 1 красными линиями. Элементы группы самосовмещений правильного треугольника могут быть заданы и иначе. Чтобы пояснить это, пронумеруем вершины правильного треугольника T числами 1, 2, 3. Любое самосовмещение f треугольника T переводит точки 1, 2, 3 в те же самые точки, но взятые в ином порядке, т. е. f может быть условно записано в виде одной из таких скобок:

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,3\,2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,2\,1\end{pmatrix}\quad \text{и т. д.,} \qquad (1)$$

где числами 1, 2, 3 обозначены номера тех вершин, в которые переходят вершины 1, 2, 3 в результате рассматриваемого движения.

ОТТО ЮЛЬЕВИЧ ШМИДТ (1891–1956)



О. Ю. Шмидт – замечательный советский ученый, общественный и государственный деятель, Герой Советского Союза (1937), академик (1935), вице-президент Академии наук СССР (1939–1942).

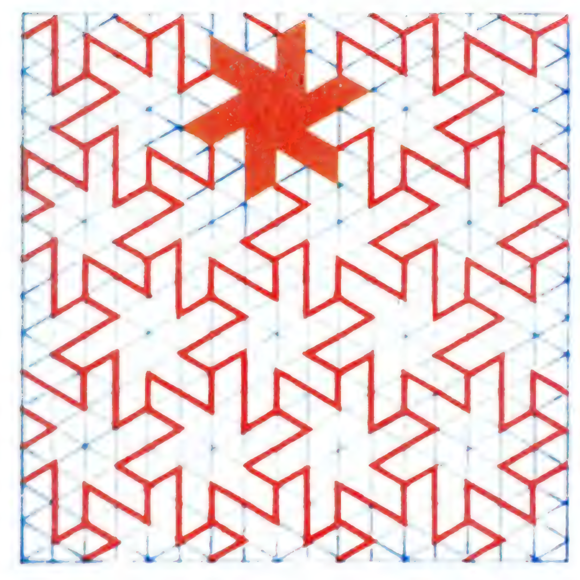
Овеянное легендой имя О. Ю. Шмидта в памяти миллионов людей навсегда связано с освоением Арктики, Северного морского пути, с челюскинской эпопеей, с высадкой на лед научно-исследовательской станции «Северный полюс-1». Однако при всей многогранности научных интересов О. Ю. Шмидт всю жизнь оставался прежде всего математиком – по образованию, по складу мышления, по глубине и продолжительности своих привязанностей.

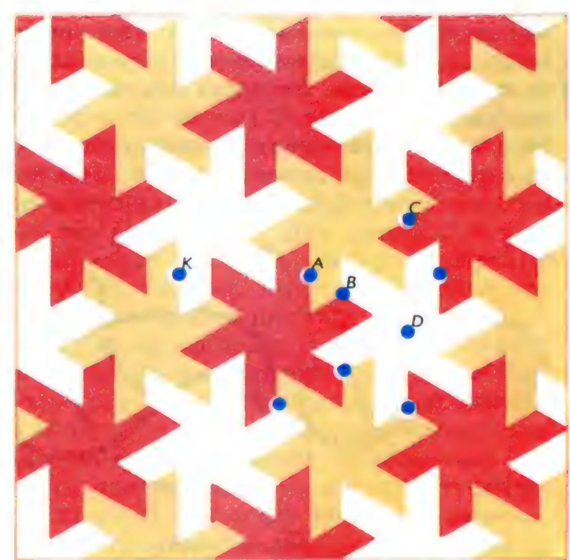
В 1909 г. молодой Шмидт поступил на физико-математический факультет Киевского университета. Там он с увлечением изучает теорию групп – одну из самых абстрактных областей математики. Уже в студенческие годы он печатает на эту тему две научные статьи и через несколько лет начинает работу над монографией «Абстрактная теория групп», опубликованной в 1916 г. Эта книга выдержала еще два издания и на несколько десятилетий стала настольным пособием алгебраистов.

После получения диплома Шмидт был оставлен в университете для подготовки к профессорскому званию, и молодой ученый, казалось, целиком посвятил себя науке. Но революционные события разбудили в нем, по его словам, «человека воли, действия». По личному указанию В. И. Ленина О. Ю. Шмидт работал над подготовкой и реализацией ряда проектов, был членом комиссий народных комиссариатов. Он стал организатором высшего образования в стране. С 1924 по 1941 г. Отто Юльевич был главным редактором Большой советской энциклопедии.

Летом 1927 г. О. Ю. Шмидту представилась возможность совершить поездку в Геттинген – математическую столицу того времени и встретиться там с крупнейшими математиками, среди них и с *Д. Гильбертом*. Шмидт ознакомился с достижениями в изучаемой им области за целое десятилетие и сумел доказать замечательную теорему «о бесконечных группах с конечной цепью», ставшую классической.

Рис. 2





Например, первая из этих скобок представляет собой условную запись поворота на угол $2\pi/3$, вторая обозначает симметрию относительно прямой, проходящей через вершину 1.

Скобки вида (1) называются подстановками из трех элементов 1, 2, 3. Перемножение подстановок (соответствующее композиции движений) легко проследить. Например, при первой из подстановок (1) вершина 1 переходит в 2, а при второй подстановке (1) эта вершина 2 переходит в 3, т. е. в результате последовательного выполнения этих подстановок вершина 1 переходит в 3. Проследив это и для других вершин, находим, что произведение первой и второй подстановок (1), т. е. результат их последовательного выполнения, представляет собой 3-ю из этих подстановок.

Еще одним примером конечной группы мо-

Коренная перестройка основ алгебры, начавшаяся в конце 20-х гг., предъявила новые требования к преподаванию в университетах. По инициативе О. Ю. Шмидта в МГУ была организована кафедра высшей алгебры, а затем научно-исследовательский семинар по теории групп. Семинар и кафедра превратились в один из основных алгебраических центров в СССР.

30-е гг. были заполнены работой по освоению Арктики. О. Ю. Шмидт становится директором Арктического института, затем – начальником Главсевморпути. В 1932 г. экспедиция под руководством О. Ю. Шмидта на ледоколе «Сибиряков» впервые за одну навигацию прошла из Архангельска в Тихий океан. На следующий год Шмидт возглавил ставшее историческим плавание на пароходе «Челюскин» по Северному морскому пути.

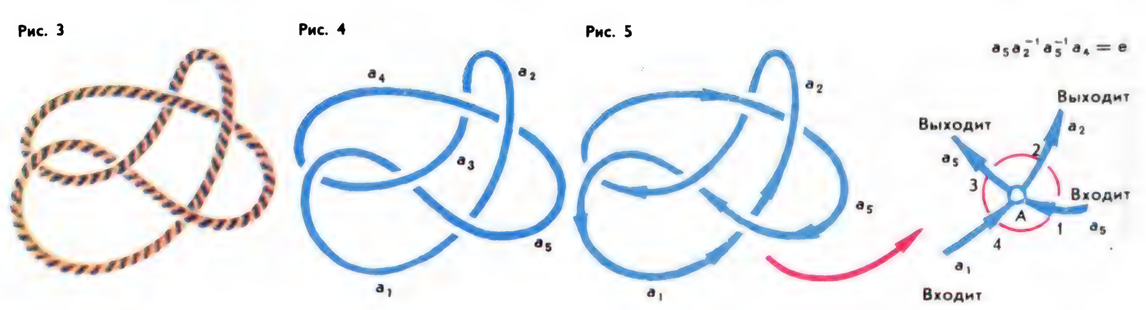
В середине 40-х гг. О. Ю. Шмитд выдвинул новую гипотезу об образовании Земли и планет Солнечной системы, над которой он работал вместе с группой ученых до конца жизни.

И в эти годы Шмидт не оставляет научной деятельности. При всей своей занятости ученый продолжает работать над теорией групп. Вопросы, которые он разрабатывал, оставили заметные вехи на пути развития этой теории. Последняя работа основоположника советской теоретико-групповой школы выполнена в 1947 г., но математическая деятельность ученого продолжалась до последних дней его жизни.

О встречах с О. Ю. Шмидтом сохранились воспоминания советских академиков *П. С. Александрова*, Б. Н. Делоне, А. Н. *Колмогорова*. Академик П. С. Александров писал: «Обилие – вот, пожалуй, то слово, которое приходит, когда думаешь о личности О. Ю. Шмидта. Обилие ума и обилие сердца, полное развитие человеческой личности в ее интеллектуальном, эстетическом, волевом, эмоциональном и социальном аспектах».

жет служить группа Z_m, элементами которой являются вычеты по модулю m (см. *Сравнения*).

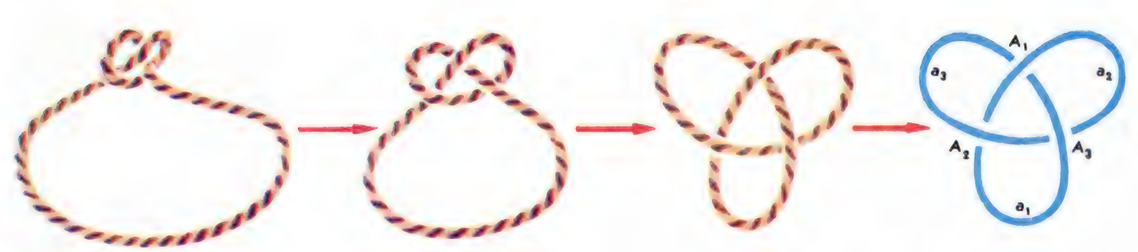
Например, группа Z_2 состоит из двух элементов, один из них – множество всех четных чисел, а другой – множество всех нечетных. Если первый из этих элементов обозначить через 0, а второй – через 1 (т. е. 0 – «чет», 1 – «нечет»), то в соответствии с правилом сложения по модулю 2 мы имеем: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$. Можно это записать в ви-



де «таблицы сложения» в группе Z_2:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Расскажем о способах, которыми задаются различные группы. Наиболее известно описание группы с помощью образующих и соотношений. Системой образующих некоторой



группы G называется такое подмножество ее элементов, что любой элемент группы G можно представить в виде произведения некоторых степеней этих образующих элементов. Рассмотрим, например, паркет, изображенный на рис. 2, и обозначим через G группу всех самосовмещений этого паркета (без учета цветной раскраски). В частности, в группе G содержится симметрия s относительно точки A и поворот g на $2\pi/3$ вокруг точки B. Можно проверить, что любое самосовмещение рассматриваемого паркета представляется в виде произведения (композиции) некоторых степеней элементов s и g (например, поворот вокруг точки D на $2\pi/3$ записывается в виде $g\circ s\circ g^2\circ s\circ g$, а параллельный перенос на вектор $\vec{AK}$ – в виде $s\circ g^2\circ s\circ g$. Иначе говоря, s и g составляют систему образующих для группы G. Между этими образующими есть равенства, которым эти образующие удовлетворяют: $s^2=e$, $g^3=e$ и др. Алгебраически группа G полностью определяется указанием образующих s, g и соотношений между ними.

В *топологии*, например, рассматриваются различные узлы (рис. 3) и для каждого узла определяется некоторая группа, называемая группой узла. Если узел изображен так, как на рис. 4 (с разрывами, показывающими пространственное расположение частей нити узла друг относительно друга), то за систему образующих группы узла можно принять дуги a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, остающиеся неразорванными при таком изображении, а соотношения между этими образующими выписываются для каждой точки перекрещивания нитей узла (для этого надо задать какое-нибудь направление обхода на узле и выписывать соотноше-

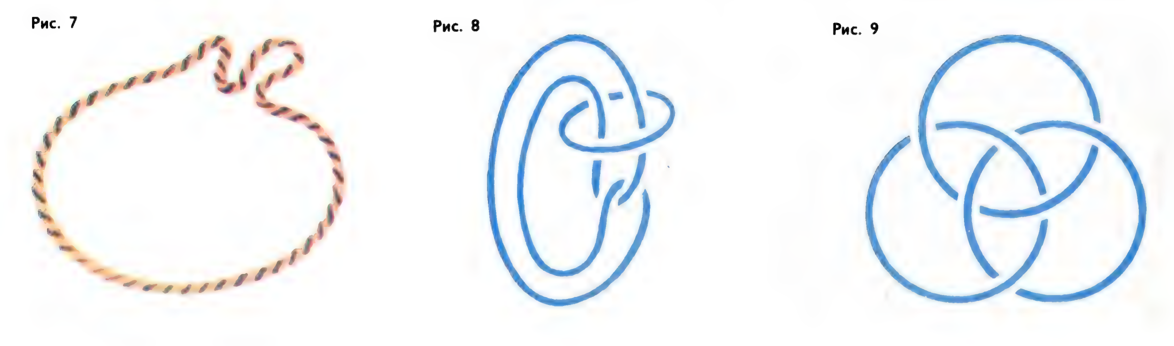


Рис. 10



ния по правилу, показанному на рис. 5). Так, для простейшего узла (его называют трилистником, рис. 6) его группа имеет три образующие a_1, a_2, a_3, между которыми имеются соотношения:

$$a_2a_3^{-1}a_2^{-1}a_1 = e, \quad a_3a_1^{-1}a_3^{-1}a_2 = e,$$
$$a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_3 = e.$$

Устанавливается, что эта группа алгебраически отлична от группы узла на рис. 7, и различие этих групп служит математическим доказательством того, что узел на рис. 6 невозможно «развязать», т.е., деформируя его, превратить в ровную линию без узлов (рис. 7). На рис. 8 и 9 изображены узлы, составленные из 2 или 3 замкнутых нитей. И в этих случаях, рассмотрев группу узла, можно доказать, что эти узлы не могут быть развязаны, т.е. нити, составляющие узел, невозможно развести, не разрывая их.

Мы рассказали о некоторых применениях понятия группы в различных вопросах алгебры и геометрии и упомянули о том, что в любой из областей знания, где встречаются группы, можно применять теоремы о группах (один раз доказав эти теоремы, исходя из аксиом группы). В чем же состоят эти теоремы? Рассмотрим одну из них.

Прежде всего приведем определение подгруппы. Пусть G – некоторая группа и H – подмножество множества G. Если H само является группой (относительно той операции умножения, которая имеется во всей группе G), то H называется подгруппой группы G. Например, Z (множество всех целых чисел) является подгруппой группы $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел с операцией сложения. И еще один пример: группа G самосовмещений орнамента на рис. 2 является подгруппой группы всех движений плоскости. Это пример так называемой кристаллографической группы. Некоторая подгруппа G' группы всех движений плоскости называется кристаллографической группой, если существует такой многоугольник M (фундаментальная область группы G'), что всевозможные многоугольники, в которые переходит M при движениях, принадлежащих группе G', заполняют всю плоскость и попарно не имеют общих внутренних точек. Для группы G фундаментальными областями являются параллелограммы, которые, будто кристаллики, заполняют плоскость (рис. 10).

Кристаллографические группы можно рассматривать и в пространстве. Русский кристаллограф XIX в. Е. С. Федоров, основываясь на понятии группы, дал полное перечисление выпуклых многогранников, описывающих все формы кристаллов, которые служат фундаментальными областями кристаллографических групп в пространстве.

Вспомним теперь, как определяются вычеты по некоторому модулю m (см. *Сравнения*). Через H_m обозначим подмножество множества Z всех целых чисел, состоящее из чисел, делящихся на m. Два целых числа a_1 и a_2 называются имеющими одинаковые остатки при делении на m, если их разность делится на m, т.е. если $(a_2 - a_1) \in H_m$. Все числа, имеющие один и тот же остаток при делении на m, составляют один смежный класс относительно подгруппы $H_m \subset Z$. Таким образом, всего имеется m смежных классов по этой подгруппе.

Сказанное можно применить и к любой другой группе G, в которой задана некоторая подгруппа H. Два элемента a_1, a_2 группы G считаются принадлежащими одному смежному классу по подгруппе H, если их разность $a_2 - a_1$ (или элемент $a_1^{-1}a_2$, если групповой операцией является умножение) принадлежит подгруппе H. Тем самым вся группа G «расслаивается» на смежные классы по подгруппе H. Все смежные классы содержат одинаковое количество элементов (конечное или бесконечное) – столько же, сколько их имеется в подгруппе H. Поэтому если G – конечная группа, содержащая g элементов, то справедливо соотношение $g = kh$, где h – число элементов подгруппы H, а k – число смежных классов, – в этом состоит одна из простейших теорем теории групп.

Пусть, например, K – некоторый куб, G_K – группа его самосовмещений. Через H_A обозначим подгруппу группы G_K, состоящую из движений $f \in G_K$, переводящих вершину A в себя. Подгруппа H_A содержит 6 элементов: три поворота вокруг диагонали AC_1 (рис. 11) и три зеркальные симметрии (рис. 12). Два элемента g_1, $g_2 \in G_K$ в том, и только том, слу-

Рис. 11

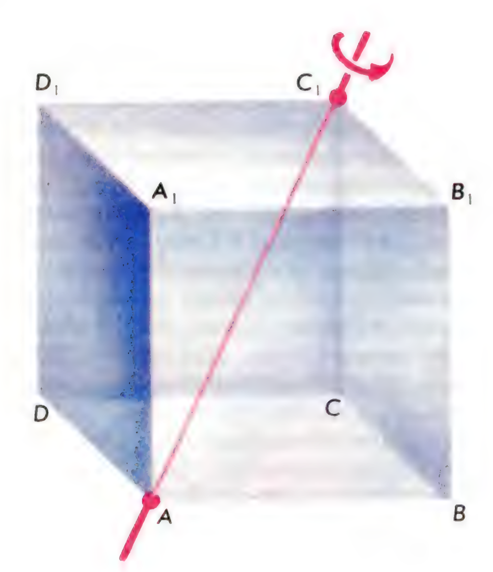
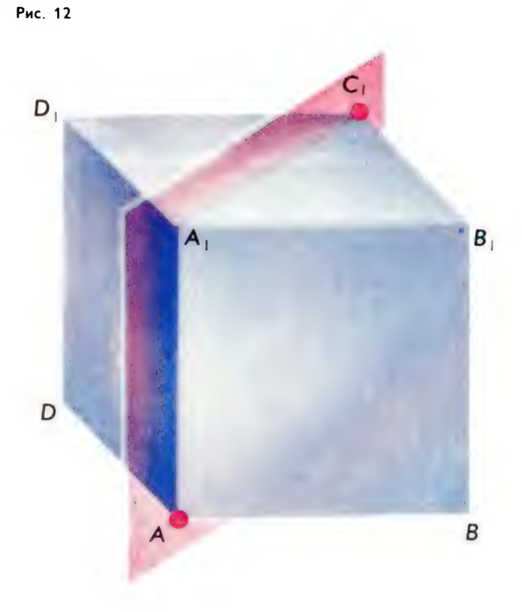


Рис. 12



чае принадлежат одному смежному классу по подгруппе H_A, если g_1 и g_2 переводят A в одну и ту же вершину: $g_1(A) = g_2(A)$. Поэтому имеется всего 8 смежных классов (по числу вершин). Так как в каждом из них содержится 6 элементов (столько же, сколько в подгруппе H_A), то всего группа G_K содержит $6 \cdot 8 = 48$ элементов. Итак, существует 48 движений пространства, переводящих куб K в себя.

Аналогичным образом можно подсчитать число элементов в группах самосовмещений других правильных многогранников. Например, правильный икосаэдр имеет 10 самосовмещений, оставляющих неподвижной одну из его вершин (эти 10 самосовмещений образуют подгруппу группы всех самосовмещений), а всего у него имеется 12 вершин. Следовательно, группа самосовмещений правильного икосаэдра состоит из 120 элементов. Это самая большая из конечных групп движений трехмерного пространства. Заметим, что со свойствами этой группы тесно связан важный алгебраический факт – неразрешимость общего уравнения 5-й степени в радикалах.

ЗАДАЧИ

Задача 2. На чудо-яблоне садовник вырастил 25 бананов и 30 апельсинов. Каждый день он срывает два плода и на их месте вырастает новый, причем если он срывает два одинаковых фрукта, то вырастает апельсин, а если два разных, то вырастает банан. Каким может оказаться последний фрукт на этом дереве?

Задача 3. Обычный комплект домино содержит 28 костей. Если бы количество очков на костях изменялось бы не от 0 до 6, а от 0 до 4, то количество костей было бы лишь 15. (Проверьте.) А сколько костей содержит комплект домино, количество очков у которого меняется от 0 до 12?

Задача 4. Отец и сын наблюдали солнечное затмение, и поэтому темой их разговора были Солнце и Луна. «Папа,– спросил мальчик,– а во сколько раз Солнце дальше от нас, чем Луна?»

«Насколько я помню,– отвечал отец,– в 387 раз».

«Тогда я могу посчитать, во сколько раз объем Солнца больше объема Луны».

«Пожалуй, ты прав»,– подумав, ответил отец.

Во сколько же раз объем Солнца больше объема Луны?

Задача 5. Взяв у сестренки-первоклассницы по одной карточке с цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Гена разложил их по две на столе и вдруг увидел, что полученные числа относятся как 1:2:3:4:5. Когда вечером он захотел показать этот интересный результат отцу, то обнаружил, что отсутствует карточка с цифрой 0. Однако, подумав, он из оставшихся карточек сложил пять чисел, отношение которых вновь было 1:2:3:4:5. Как он раскладывал карточки в первый и во второй раз?

Д

ДЕЛИМОСТЬ

Делимость – одно из основных понятий, изучаемых в теории чисел (см. *Чисел теория*). Говорят, что целое число a делится на целое $b \neq 0$, если частное a/b является целым, т. е. существует такое целое число c, что $a = bc$. Например, 54 делится на 6, так как $54 = 6 \cdot 9$; 273 делится на 21, так как $273 = 21 \cdot 13$. Из определения делимости следует, что число 0 делится на любое число, отличное от нуля.

Часто утверждение о делимости числа a на число b выражают другими равнозначными словами: a кратно b, b – делитель a или же b делит a.

Всякое целое число a делится по крайней мере на четыре числа a, $-a$, 1, -1. Натуральное число a называется простым, если никаких других делителей оно не имеет.

Приведем несколько свойств делимости:

а) если числа a и b делятся на c, то и числа $a + b$, $a - b$ делятся на c;

б) если a делится на b и c – произвольное целое число, то ac делится на bc;

в) если a делится на b и b – на c, то a делится на c.

Зная разложения чисел a и b на простые множители, можно легко выяснить, делится ли a на b. Для того чтобы число a делилось на число b, необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа b, входил и в разложение числа a; причем если простой множитель встречается k раз в разложении числа b, то он должен встретиться не менее k раз и в разложении числа a.

Если целые числа a и b заданы своими записями в десятичной системе счисления, то, разделив «в столбик» первое число на второе, мы найдем их частное, а значит, сможем ответить на вопрос, делится ли a на b.

Уже давно были найдены признаки делимости чисел, которые позволяют в некоторых случаях быстро установить делимость одного числа на другое, не прибегая к непосредственному делению «в столбик». Среди этих признаков практически наиболее удобны следующие (связанные с записью числа в десятичной системе):

а) для делимости на 2 нужно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2;

б) для делимости на 3 нужно, чтобы сумма цифр числа делилась на 3;

в) для делимости на 4 нужно, чтобы число, записанное двумя последними цифрами, делилось на 4;

г) для делимости на 5 нужно, чтобы последняя цифра была 0 или 5;

д) для делимости на 8 нужно, чтобы число, записанное тремя последними цифрами, делилось на 8;

е) для делимости на 9 нужно, чтобы сумма цифр делилась на 9;

ж) для делимости на 10 нужно, чтобы последняя цифра была 0;

з) для делимости на 11 нужно, чтобы разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делилась на 11.

Развитие идеи делимости привело к понятию *сравнения*, использование которого позволило перенести в теорию чисел алгебраические методы и с их помощью получить большое количество интересных результатов.

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

Диофантовыми уравнениями называют алгебраические уравнения или системы алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, для которых надо найти целые или рациональные решения. При этом число неизвестных в уравнениях должно быть не менее двух (если не ограничиваться только целыми числами). Диофантовы уравнения имеют, как правило, много решений, поэтому их называют неопределенными уравнениями. Это, например, уравнения:

$3x + 5y = 7$;

$x^2 + y^2 = z^2$;

$3x^3 + 4y^3 = 5z^3$.

Названы они по имени греческого математика Диофанта, жившего в III в. Его книга «Арифметика» содержала большое количество интересных задач, ее изучали математики всех поколений. Книга сохранилась до наших дней, ее можно найти в русском переводе в библиотеке.

Задачи поиска целочисленных и рациональных решений обычно тесно связаны между собой. Легко сообразить, какая связь есть между целочисленными решениями уравнения $3x^3 + 4y^3 = 5z^3$ и рациональными решениями уравнения

$$\frac{3}{5}u^3 + \frac{4}{5}v^3 = 1 \quad \left(u = \frac{x}{z},\ v = \frac{y}{z}\right).$$

К диофантовым уравнениям приводят задачи, по смыслу которых неизвестные значения величин могут быть только целыми числами.

Решение уравнений в целых числах – очень увлекательная задача. С древнейших времен накопилось много способов решения конкретных диофантовых уравнений, однако только в нашем веке появились общие приемы их исследования. Правда, линейные диофантовы уравнения и диофантовы уравнения 2-й степени научились решать давно.

Так, легко доказать, что по формулам $x = 4 + 5t$, $y = -1 - 3t$ (t – любое целое число) находятся все целочисленные решения уравнения $3x + 5y = 7$. Формулы для нахождения целочисленных сторон прямоугольного треугольника (т.е. для решения уравнения $x^2 + y^2 = z^2$) были известны еще древним индийцам: $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = u^2 + v^2$ (u и v – целые числа, $u > v$).

Решения диофантовых уравнений более высоких степеней, а также систем уравнений давались с большим трудом. Знаменитое уравнение П. Ферма, которое более трехсот лет назад он написал на полях «Арифметики» Диофанта, $x^n + y^n = z^n$ ($n > 2$) не решено до сих пор (см. *Ферма великая теорема*).

Даже при $n = 3$ диофантовы уравнения поддаются решению с большим трудом, причем ответы могут быть совершенно разными. Так, уравнение $3x^3 + 4y^3 = 5z^3$ совсем не имеет решений в целых числах, кроме нулевого. Уравнение $x^3 + y^3 = 2z^3$ имеет конечное число решений в целых числах, которые легко найти. Уравнение $x^3 + y^3 = 9z^3$ имеет бесконечно много целочисленных решений, однако написать для них формулы далеко не просто.

Правда, оказалось, что кубические уравнения стоят в некотором смысле особняком. В 20-е гг. нашего века английский математик Е. И. Морделл высказал гипотезу, что уравнение более высокой степени, чем 3, должно иметь, как правило, конечное число целочисленных решений. Эта гипотеза была в 1983 г. доказана голландским математиком Г. Фалтингсом. Тем самым подтвердилось, что уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ при всяком $n > 2$ имеет лишь конечное число решений в целых числах (без общих множителей). Однако пока нет способа найти эти решения.

Долгое время надеялись отыскать общий способ решения любого диофантова уравнения. Однако в 1970 г. ленинградский математик Ю. В. Матиясевич доказал, что такого общего способа быть не может.

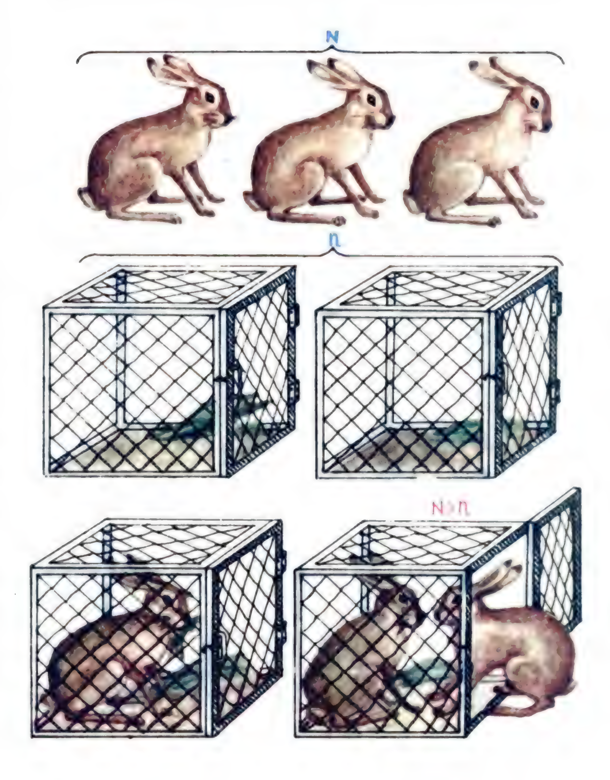
Решение уравнений в целых числах – один из самых красивых разделов математики. Ни один крупный математик не прошел мимо теории диофантовых уравнений. *Ферма, Эйлер* и Лагранж, Дирихле и *Гаусс, Чебышев* и Риман оставили неизгладимый след в этой интереснейшей теории.

ДИРИХЛЕ ПРИНЦИП

Этот принцип утверждает, что если множество из N элементов разбито на n непересекающихся частей, не имеющих общих элементов, где $N > n$, то, по крайней мере, в одной части будет более одного элемента. Принцип назван в честь немецкого математика П. Г. Л. Дирихле (1805–1859), который успешно применял его к доказательству арифметических утверждений.

По традиции в популярной литературе принцип Дирихле объясняют на примере «зайцев и клеток»: если N зайцев сидят в n клетках и $N > n$, то хотя бы в одной клетке сидит более одного зайца. Часто применяют обобщение принципа Дирихле: если зайцев $N > nk$, то хотя бы в одной клетке сидит более k зайцев. Самая популярная задача на прямое применение принципа Дирихле такова: на Земле живет 3 млрд. человек, у каждого на голове – не более миллиона волос (цифры условные). Нужно доказать, что обязательно найдутся два человека с одинаковым числом волос. А какое число людей с одинаковым числом волос можно гарантировать?

На той же идее основано доказательство того, что при обращении обыкновенной дроби p/q, $p < q$, $q > 0$ в десятичную получается или конечная, или бесконечная периодическая десятичная дробь, причем длина периода не превосходит $q - 1$. Будем делить p на q «уголком» и следить за остатками. Если на каком-то шаге остаток будет нулевым, то получится



конечная дробь. Если же все остатки будут отличны от нуля, то не позже, чем на $(q-1)$-м шагу начнут повторяться остатки, а вслед за этим – и цифры в частном.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Дифференциальное исчисление – это раздел *анализа математического*, связанный главным образом с понятиями производной и дифференциала функции. В дифференциальном исчислении изучаются правила вычисления производных (законы дифференцирования) и применения производных к исследованию свойств *функций*.

Центральные понятия дифференциального исчисления – производная и дифференциал – возникли при рассмотрении большого числа задач естествознания и математики, приводивших к вычислению пределов одного и того же типа. Важнейшие среди них – физическая задача определения скорости неравномерного движения и геометрическая задача построения касательной к кривой. Рассмотрим подробно каждую из них.

Будем вслед за итальянским ученым Г. Галилеем изучать закон свободного падения тел. Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Пусть t – время, отсчитываемое от начала падения, а $s(t)$ – пройденное к моменту t расстояние. Галилей экспериментально нашел, что зависимость $s(t)$ имеет следующий простой вид:

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2,$$

где t – время в секундах, а g – физическая постоянная, равная примерно 9,8 м/с^2.

Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость v падения постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость $v(t)$? Ясно, что, зная зависимость $s(t)$, т.е. закон движения падающего тела, мы в принципе должны иметь возможность получить отсюда и выражение для скорости $v(t)$ как функции времени.

Попробуем найти зависимость v от t. Будем рассуждать следующим образом: фиксируем момент t, в который мы хотим знать значение скорости $v(t)$. Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t. За это время падающее тело пройдет путь, равный $s(t+h)-s(t)$. Если промежуток времени h очень маленький, то скорость тела за время h не успевает заметно измениться, поэтому можно считать, что если h мало, то приближенно

$$s(t+h)-s(t)\approx v(t)\cdot h, \qquad (1)$$

или

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}\approx v(t), \qquad (2)$$

причем последнее приближенное равенство тем точнее, чем меньше h (чем ближе величина h к нулю). Значит, величину $v(t)$ скорости в момент t можно рассматривать как *предел*, к которому стремится стоящее в левой части приближенного равенства (2) отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента $t+h$, когда величина h стремится к нулю.

Сказанное записывают в виде

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}. \qquad (3)$$

Проведем указанные в соотношении (3) вычисления, исходя из найденной Галилеем зависимости

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2.$$

Сделаем сначала элементарные вычисления:

$$s(t+h)-s(t)=\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2=$$

$$=\frac{1}{2}g(t^2+2th+h^2)-\frac{1}{2}gt^2=gth+\frac{1}{2}gh^2;$$

а теперь, разделив на h, получаем

$$\frac{s(t+h)-s(t)}{h}=gt+\frac{1}{2}gh.$$

Когда h стремится к нулю, второе слагаемое записанной справа суммы тоже стремится к нулю, а первое остается постоянным, точнее, не зависящим от величины h, поэтому в нашем случае

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}g\cdot(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2}{h}=gt,$$

и мы нашли закон

$$v(t)=gt$$

изменения скорости свободно падающего тела. Обратите внимание, формула (3) одновременно дает и определение, и правило вычисления значений $v(t)$ мгновенной скорости изменения функции $s(t)$.

Поскольку скорость $v(t)$ сама есть функция времени, то можно было бы поставить вопрос о скорости ее изменения. В физике скорость изменения скорости называется ускорением. Таким образом, если $v(t)$ – скорость как функ-

«Открытие исчисления бесконечно малых дало математикам возможность свести законы движения тел к аналитическим уравнениям».

Ж. Л. Лагранж



ция времени, то, рассуждая как и при выводе формулы (3), для мгновенного ускорения $a(t)$ в момент времени t получаем выражение

$$a(t)=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}. \qquad (4)$$

Посмотрим, что дает эта формула для случая свободного падения, в котором, как мы вычислили, $v(t)=gt$:

$$v(t+h)-v(t)=g(t+h)-gt=gh,$$

$$\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=g,$$

и, поскольку g – постоянная, то из (4) получается, что $a(t)=g$, т.е. ускорение свободно падающего тела постоянно и величина g есть та самая физическая постоянная, которая выражает ускорение свободного падения у поверхности Земли.

Нетрудно заметить полное сходство выражений (3), (4) и понять, что мы нашли общее математическое выражение для мгновенной скорости изменения переменной величины. Конечно, результат вычислений по формулам (3), (4), как мы убедились, зависит от конкретного вида функций $s(t)$ или $v(t)$, но сами операции над этими функциями, которые предписываются правыми частями формул (3), (4), одни и те же.

Обобщая сделанные наблюдения, в математическом анализе уже для любой функции $y=f(x)$ рассматривают важную величину:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad (5)$$

которую называют производной функции f.

Производная, таким образом, играет роль скорости изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x; последняя теперь уже не обязана иметь физический смысл времени.

Значение производной $f'(x)$ зависит от значения аргумента x, поэтому, как и в случае скорости, производная $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ сама является функцией переменной x.

Например, если $f(x)=x^3$, то

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=$$

$$=3x^2+(3xh+h^2);$$

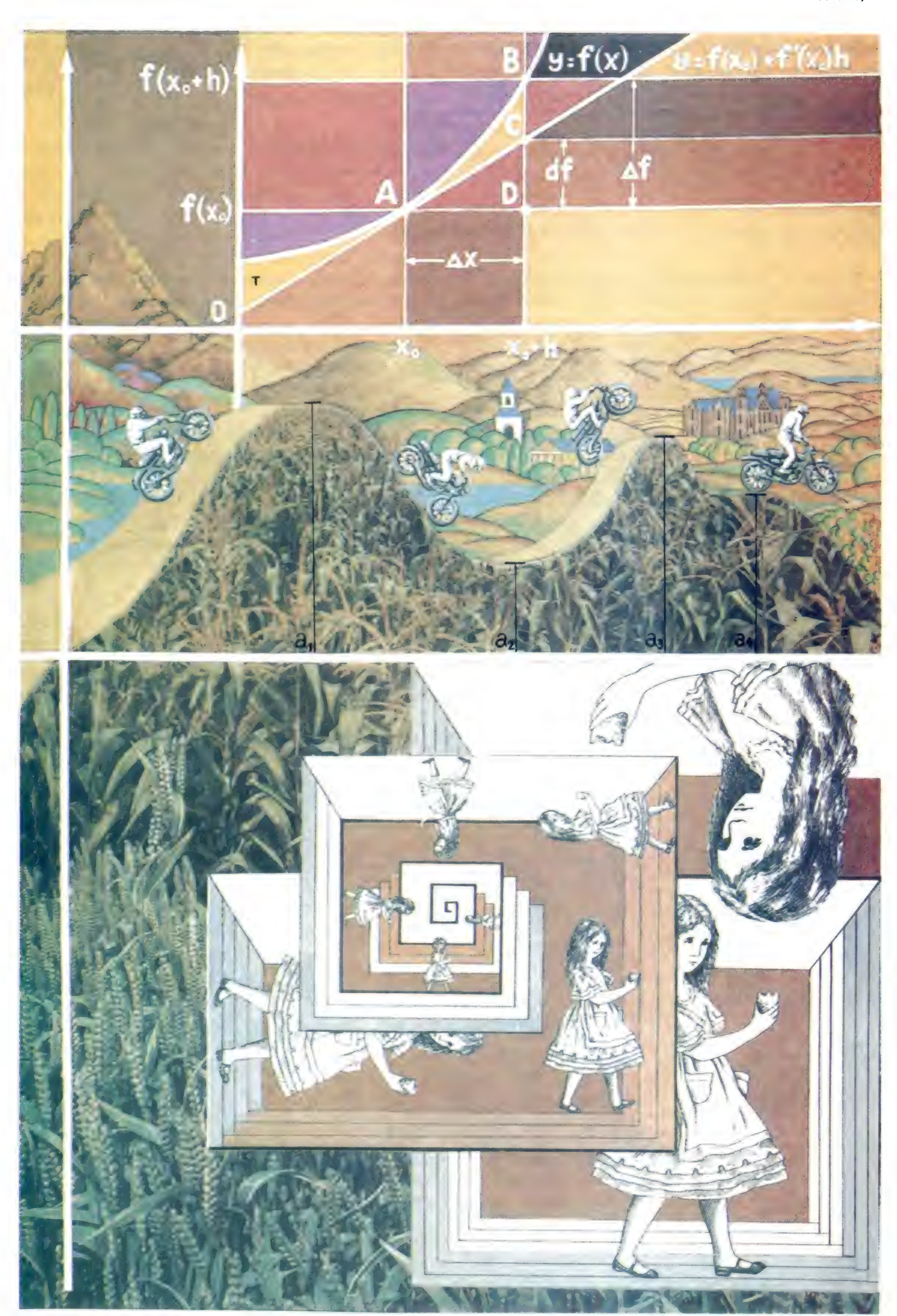
далее, при h, стремящемся к нулю, величина, стоящая в последних скобках, стремится к нулю, а вся правая часть при этом стремится к значению $3x^2$. Мы нашли таким образом, что если $f(x)=x^3$, то $f'(x)=3x^2$.

В формуле (5) величину h разности $(x+h)-$

«Лишь дифференциальное исчисление дает естествознанию возможность изображать математически не только состояния, но и процессы: движение».

Ф. Энгельс

Рис. 1а, б



$-x$ называют приращением аргумента функции и часто обозначают символом Δx (читается: дельта икс), а разность $f(x+h)-f(x)$ обозначают обычно через Δf (или, более полно через $\Delta f(x,\ \Delta x)$) и называют приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента. В этих обозначениях выражение (5) приобретает вид:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

или $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Таким образом, значение $f'(x)$ производной функции $f(x)$ в точке x – это предел отношения приращения функции $\Delta f(x,\ \Delta x)$, соответствующего смещению Δx от точки x, к приращению Δx аргумента x, когда Δx стремится к нулю.

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием. С физической точки зрения, как мы теперь понимаем, дифференцирование – это определение скорости изменения переменной величины.

В дифференциальном исчислении выводятся производные основных элементарных функций. Укажем, например, что производными функций x^α, $\sin x$, $\cos x$ являются соответственно функции $\alpha x^{\alpha-1}$, $\cos x$ и $-\sin x$.

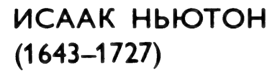
В дифференциальном исчислении выводятся также следующие общие правила дифференцирования:

$(cf)'=cf'$	(вынесение постоянного множителя);
$(f_1 \pm f_2)'=f_1' \pm f_2'$	(дифференцирование суммы и разности функций);
$(f_1 \cdot f_2)'=f_1' \cdot f_2+f_1 \cdot f_2'$	(дифференцирование произведения функций);
$\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)'=\dfrac{f_1' \cdot f_2-f_1 \cdot f_2'}{f_2^2}$	(дифференцирование частного функций).

Наконец, справедливо также следующее важное правило дифференцирования сложной функции: если $y=f(u)$, а $u=\varphi(x)$, то производная функции $f(\varphi(x))$ равна $f'(u)\cdot\varphi'(x)$, или $(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

Общие законы дифференцирования существенно облегчают отыскание производных, а для любых комбинаций элементарных функций делают дифференцирование столь же доступной операцией, как и арифметические действия для человека, знающего таблицу умножения.

Например, если $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+ \ldots +a_nx^n$ – многочлен, то $f'(x)=$
$=(a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)'=$



ИСААК НЬЮТОН (1643–1727)



В 1665 г. Исаак Ньютон окончил Кембриджский университет и собирался начать работу там же, в его родном Тринити-колледже. Однако чума, бушевавшая в Англии, заставила Ньютона уединиться на своей ферме, в Вулсторпе. «Чумные каникулы» затянулись почти на два года. «Я в то время был в расцвете моих изобретательских сил и думал о математике и философии больше, чем когда-либо позже»,– писал Ньютон. Тогда и сделал молодой ученый почти все свои открытия в физике и математике. Он открыл закон всемирного тяготения и приступил с его помощью к исследованию планет. Он обнаружил, что 3-й закон Кеплера о связи между периодами обращения планет и расстоянием до Солнца с необходимостью следует, если предположить, что сила притяжения Солнца обратно пропорциональна квадрату расстояния до планеты.

Но чтобы исследовать и выражать законы физики, Ньютону приходилось заниматься и математикой. В Вулсторпе Ньютон, решая задачи на проведение касательных к кривым, вычисляя площади криволинейных фигур, создает общий метод решения таких задач – метод флюксий (производных) и флюэнт, которые у *Г. В. Лейбница* назывались дифференциалами. Ньютон вычислил производную и интеграл любой степенной функции. О дифференциальном и интегральном исчислениях ученый подробно пишет в своей самой значительной работе по математике «Метод флюксий» (1670–1671), которая была опубликована уже после его смерти. В ней были заложены основы *математического анализа.* Ньютон также находит формулу для различных степеней суммы двух чисел (см. *Ньютона бином*), причем не ограничивается натуральными показателями и приходит к суммам бесконечных рядов чисел (см. *Ряды*). Ньютон показал, как применять ряды в математических исследованиях.

Когда Ньютон вернулся в Кембридж в 1666 г., он привез бесчисленные и бесценные результаты своих математических занятий в Вулсторпе. У него пока не было вре-

$= (a_0x^0)' + (a_1x^1)' + (a_2x^2)' + \ldots + (a_nx^n)' =$
$= a_0(x^0)' + a_1(x^1)' + a_2(x^2)' + \ldots + a_n(x^n)' =$
$= a_0(0 \cdot x^{0-1}) + a_1(1 \cdot x^{1-1}) + a_2(2 \cdot x^{2-1}) +$
$+ \ldots + a_n(n \cdot x^{n-1}) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$.

Или если $\psi(x) = \sin x^2$, то, полагая $f(u) = \sin u$, $u = \varphi(x) = x^2$, получаем, что $\psi(x) = f(\varphi(x))$ и, значит, $\psi'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x) = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2$.

Мы уже отмечали, что к вычислению пределов вида (3), (4), (5), т. е., как теперь можно говорить, к вычислению производной, приводили многие задачи.

Рассмотрим теперь другой классический пример уже чисто геометрического вопроса, который решается в терминах производной,— построение касательной к кривой (см. *Касательная*).

Требуется построить прямую T (рис. 1), касательную в точке A к кривой – графику функции $y = f(x)$.

Как и в случае определения мгновенной скорости, построение касательной будет сопровождаться уточнением самого понятия касательной.

Пусть (x_0, y_0) – координаты точки A: Как известно, любая не вертикальная прямая, проходящая через точку A, задается уравнением $y = y_0 + k \cdot (x - x_0)$,

где $k = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ –

так называемый угловой коэффициент прямой, характеризующий ее наклон к горизонтальной оси. В нашем случае $y_0 = f(x_0)$, поэтому уравнение прямой, проходящей через точку A, имеет вид $y = f(x_0) + k \cdot (x - x_0)$, и мы хотим выбрать значение коэффициента k так, чтобы прямая была как можно лучше «подогнана» к кривой $y = f(x)$, т. е. лучше всего приближала нашу кривую в окрестности точки A. Значит, мы хотим выбрать k так, чтобы приближенное равенство $f(x) \approx f(x_0) + k \cdot (x - x_0)$, или, что то же самое, приближенное равенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx k,$$

было возможно более точным при значениях x, близких к x_0.

Но это знакомая ситуация и, с точностью до переобозначений $x - x_0 = h$, $x = x_0 + h$, это знакомое нам отношение из формулы (5), следовательно,

$$k = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \quad (6)$$

Итак, найдено уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (7)$$

той прямой, которая наилучшим образом приближает кривую $y = f(x)$ в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$. Эту прямую естественно считать искомой касательной к данной кривой в рассматриваемой точке.

Например, если взять параболу $y = x^2$, т. е. $f(x) = x^2$, то касательная к ней в точке (1; 1)

мени привести их в форму, пригодную для публикации, и он не торопится с этим. Дел у него прибавляется, в 1669 г. он получает физико-математическую кафедру. В 1672 г. его выбирают членом Лондонского королевского общества (английской Академии наук).

В 1680 г. Ньютон начинает работу над основным своим сочинением «Математические начала натуральной философии», в котором он задумал изложить свою систему мира. Выход книги был крупным событием в истории естествознания. В ней все величественное здание механики строится на основании аксиом движения, которые теперь известны под названием законов Ньютона.

В «Началах» Ньютон чисто математически выводит все основные известные в то время факты механики земных и небесных тел, законы движения точки и твердого тела, кеплеровы законы движения планет.

Многие математические труды Ньютона так и не были своевременно опубликованы. Первые его сравнительно подробные публикации относятся к 1704 г. Это работы «Перечисление кривых третьего порядка», где описаны свойства этих кривых, и «Рассуждения о квадратуре круга», посвященные дифференциальному и интегральному исчислениям.

В 1688 г. И. Ньютона выбирают в парламент, а в 1699 г. он переезжает в Лондон, где получает пожизненное место директора монетного двора.

Работы И. Ньютона надолго определили пути развития физики и математики. Значительная часть классической механики надолго сохранилась в виде, созданном Ньютоном. Закон всемирного тяготения постепенно осознавался как единый принцип, позволяющий строить совершенную теорию движения небесных тел. Созданный им математический анализ открыл новую эпоху в математике.

в силу (7) будет задаваться уравнением $y = 1 + 2(x - 1)$, которое можно преобразовать к более компактному виду $y = 2x - 1$.

Выше мы дали физическую интерпретацию производной как мгновенной скорости, а теперь на основании уравнения касательной (7) можно дать геометрическую трактовку производной. А именно, значение $f'(x_0)$ производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в фиксированной точке $x = x_0$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Это, в частности, означает, что на участках изменения переменной x, на которых $f'(x) > 0$, функция $f(x)$ возрастает; там, где $f'(x) < 0$, функция $f(x)$ убывает, а в точках местных максимумов или минимумов функции ее производная должна обращаться в нуль, ибо касательная в этих точках горизонтальна. Ясно также, что если в некоторой точке $x = a$ производная обратилась в нуль, то нельзя спешить с выводом, что это точка максимума или минимума (см. точку a_4), ибо знак производной может не измениться при переходе через эту точку, и функция будет продолжать возрастать или убывать. Но если производная меняет свой знак при переходе через эту точку (см. точки a_1, a_2, a_3), то ясно, что при $x = a$ функция будет иметь или местный максимум, если идет смена знака с «+» на «−» (как в точках a_1, a_3), или местный минимум, если знаки меняются с «−» на «+» (как в точке a_2).

Сделанные наблюдения о связи знака или нулей производной с характером монотонности (возрастанием, убыванием) функции или с ее экстремумами (максимумами, минимумами) имеют многочисленные применения.

Попробуем, например, проволокой данной длины огородить такой прямоугольный участок луга, чтобы получить возможно более просторный загон для скота, т.е. среди прямоугольников с заданным периметром $2p$ (т.е. среди изопериметрических прямоугольников) надо найти тот, который имеет наибольшую площадь.

Если x – длина одной из сторон прямоугольника, то при указанном условии длина другой стороны равна $p - x$, а площадь прямоугольника равна $x(p - x)$. Надо найти максимальное значение функции $f(x) = x(p - x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant p$. Поскольку при $x = 0$ или $x = p$ функция, очевидно, обращается в нуль (прямоугольник вырождается в отрезок), то максимум достигается при каком-то значении x, лежащем между 0 и p. Как найти это значение?

В соответствии со сделанным выше наблюдением максимум значений функции $f(x)$ может быть лишь при том значении x_0, при котором скорость изменения функции равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Найдем, используя уже проведенные ранее вычисления, производную нашей функции. Поскольку $f(x) = px - x^2$, то $f'(x) = p - 2x$ и $f'(x_0) = p - 2x_0 = 0$

при $x_0 = \frac{1}{2}p$. По самому смыслу задачи при найденном значении аргумента x функция должна иметь именно максимум. Это можно проверить и формально:

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < \frac{1}{2}p \text{ и } f'(x) < 0 \text{ при } x > \frac{1}{2}p.$$

Таким образом, мы нашли, что искомым прямоугольником с наибольшей площадью является квадрат, длина стороны которого равна $\frac{1}{2}p$.

Решение единым методом различных задач на отыскание максимальных и минимальных значений функций, или, как их принято называть в математике, задач на отыскание экстремумов, является одним из ранних и вместе с тем наиболее популярных и впечатляющих достижений математического анализа (см. *Геометрические задачи на экстремум*).

До сих пор, следуя И. Ньютону, в качестве главного понятия дифференциального исчисления мы выделяли производную. Г. В. *Лейбниц*, другой родоначальник математического анализа, в качестве исходного выбрал понятие дифференциала, которое, как мы увидим, логически равноценно понятию производной, но не совпадает с ним. Лейбниц нашел правила вычисления дифференциалов, равноценные правилам отыскания производных, и назвал развитое им исчисление дифференциальным. Это название и сохранилось. Рассмотренные выше примеры помогут нам достаточно быстро разобраться в следующих, на первый взгляд формальных, но очень важных определениях всего дифференциального исчисления.

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой при некотором значении x ее аргумента, если приращение $\Delta f = f(x + h) - f(x)$ этой функции, отвечающее приращению $h = (x + h) - x = \Delta x$ ее аргумента x, можно представить в виде

$$f(x + h) - f(x) = k(x) \cdot h + \alpha \cdot h, \qquad (8)$$

где $k(x)$ – коэффициент, зависящий только от x, а α – величина, стремящаяся к нулю при h, стремящемся к нулю.

Таким образом,

$$f(x + h) - f(x) \approx k(x) \cdot h, \qquad (9)$$

т.е. с точностью до погрешности $\alpha \cdot h$, малой в сравнении с величиной h приращения аргумента, приращение $f(x + h) - f(x)$ дифференцируемой в точке x функции можно заменить величиной $k(x) \cdot h$, линейной относительно приращения h аргумента x.

Эта приближающая линейная по h функция

$k(x)\cdot h$ называется дифференциалом исходной функции f в точке x и обозначается символом df или, более полно, $df(x)$.

В каждой точке x приближающая линейная функция $k(x)\cdot h$, вообще говоря, своя, что отмечено зависимостью коэффициента $k(x)$ от x.

Поделив обе части равенства (8) на h и учитывая, что величина α стремится к нулю, когда h стремится к нулю, получаем соотношение:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k(x), \qquad (10)$$

позволяющее вычислять дифференциальный коэффициент $k(x)$ и показывающее, что он просто-напросто совпадает со значением производной $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x.

Таким образом, если функция дифференцируема в точке x, то в этой точке существует указанный в (10) предел, т.е. в ней существует

ГОТФРИД ВИЛЬГЕЛЬМ ЛЕЙБНИЦ (1646–1716)



Математика не была его единственной страстью. С юных лет ему хотелось познать природу в целом, и математика должна была стать решающим средством в этом познании. Он был философом и лингвистом, историком и биологом, дипломатом и политическим деятелем, математиком и изобретателем. Научные и общественные планы Лейбница были грандиозны. Он мечтал о создании всемирной академии наук, о построении «универсальной науки». Он хотел выделить простейшие понятия, из которых по определенным правилам можно сформировать все сколь угодно сложные понятия. Лейбниц мечтал об универсальном языке, позволяющем записывать любые мысли в виде математических формул, причем логические ошибки должны проявляться в виде математических ошибок. Он думал о машине, которая выводит теоремы из аксиом, о превращении логических утверждений в арифметические (эта идея была воплощена в жизнь в нашем веке).

Но грандиозность замыслов уживалась у Лейбница с пониманием того, что может быть непосредственно осуществлено. Он не может организовать всемирную академию, но в 1700 г. организует академию в Берлине, рекомендует Петру I организовать академию в России. При организации Петербургской Академии наук в 1725 г. пользовались планами Лейбница. Он прекрасно умеет решать конкретные задачи и в математике: создает новый тип арифмометра, который не только складывает и вычитает числа, но и умножает, делит, возводит в степень и извлекает квадратные и кубические корни, решает трудные геометрические задачи. Вводит понятие определителя и закладывает основы теории определителей. И все же Лейбниц всегда стремился рассмотреть любой вопрос под самым общим углом зрения. Скажем, X. Гюйгенс замечает сохранение энергии на примере некоторых механических задач, а Лейбниц пытается преобразовать это утверждение во всеобщий закон природы, он рассматривает Вселенную в целом как вечный двигатель (предварительная формулировка закона сохранения энергии!).

Но особенно ярко проявились эти качества Лейбница, когда он, узнав о разнообразных математических и механических задачах, решенных Гюйгенсом, по совету последнего знакомится с работой Б. Паскаля о циклоиде. Он начинает понимать, что в решении этих разных задач спрятан общий, универсальный метод решения широкого круга задач и что Паскаль остановился перед решающим шагом, «будто на его глазах была пелена». Лейбниц создает дифференциальное и интегральное исчисления, которые в другом варианте были построены, но не опубликованы *И. Ньютоном.*

Ученый, занимавшийся разработкой универсального языка, понимает, какую роль в новом исчислении должна играть символика (см. *Знаки математические*). Без символики (которая сохранилась до наших дней в форме, предложенной Лейбницем) метод математического анализа не вышел бы за пределы узкого круга избранных (как это было с алгеброй до символики Виета–Декарта). Кстати, Лейбниц предложил несколько других математических знаков, например = (равенство), · (умножение). В отличие от Ньютона Лейбниц потратил много сил на передачу своего метода другим математикам, среди которых выделялись братья Якоб и Иоганн Бернулли. По его инициативе создается журнал, в котором группа математиков оттачивает методы нового математического анализа.

Смысл своей жизни Лейбниц видел в познании природы, в создании идей, помогающих раскрыть ее законы.

производная $f'(x)$ и $k(x)=f'(x)$.

Обратно, если у функции $f(x)$ в точке x есть определенная равенством (5) производная, то

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\alpha,$$

где поправка α стремится к нулю, когда h стремится к нулю. Умножая это равенство на h, получаем

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)\cdot h+\alpha\cdot h, \qquad (11)$$

и значит, функция дифференцируема в точке x.

Итак, мы убедились, что функция имеет дифференциал $df=k(x)\cdot h$ в том, и только в том, случае, когда она имеет производную $f'(x)$, причем $df=f'(x)\cdot h$. Но дифференциал как линейная по h функция $k(x)\cdot h$ вполне определяется коэффициентом $k(x)=f'(x)$, поэтому отыскание дифференциала функции вполне равносильно отысканию ее производной. Вот почему обе эти операции часто называют одним термином – «дифференцирование», а исчисление называют дифференциальным.

Если вместо h писать Δx, то вместо $df=f'(x)\cdot h$ можно записать $df=f'(x)\cdot\Delta x$. Если взять $f(x)=x$, то $f'(x)=1$ и $dx=1\cdot\Delta x$, поэтому вместо приращения Δx независимой переменной часто пишут дифференциал dx. В этих обозначениях получается красивая запись $df=f'(x)\cdot dx$ дифференциала функции, от которой Лейбниц и пришел к обозначению df/dx для производной $f'(x)$, рассматривая последнюю как отношение дифференциалов функции и ее аргумента. Заметим, что обозначение $f'(x)$ для производной было введено лишь в 1770 г. французским математиком Ж. Л. Лагранжем, а исходным было обозначение

$$\frac{df}{dx} \text{ или } \frac{df(x)}{dx}$$

Г. Лейбница, которое во многих отношениях настолько удачно, что широко используется и по сей день.

Прежде чем показать, как дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях, проследим его геометрическую и физическую интерпретацию.

Если в равенстве (8) вместо x написать x_0, то можно считать, что на рис. 1 левой части равенства (8) отвечает отрезок BD (это приращение Δf функции или приращение ординаты кривой $y=f(x)$), дифференциалу $df=f'(x)\cdot\Delta x$ отвечает отрезок CD (это приращение ординаты касательной, приближающей нашу кривую в окрестности точки A), а остатку $\alpha\cdot h$ соответствует отрезок BC, который тем меньше в сравнении с отрезком CD, чем меньше приращение Δx аргумента. Именно это обстоятельство отражают соотношение (11) и приближенное равенство (9), означающее, что $\Delta f\approx df$.

На физическом языке, когда $f'(x)$ интерпретируется как скорость в момент x, а $f(x+h)-f(x)$ – как путь, пройденный за промежуток времени h, протекший от момента x, приближенное равенство $f(x+h)-f(x)\approx\approx f'(x)\cdot h$ означает, что за малое время h скорость мало меняется, поэтому пройденный путь приближенно можно найти, как и в (1), по формуле $f'(x)\cdot h$, выражающей равномерное прямолинейное движение с постоянной скоростью $f'(x)$.

Равенство (11) и вытекающее из него путем переобозначений соотношение

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0) \qquad (12)$$

позволяют приближенно находить значения функции $f(x)$ в точках x, близких к некоторой точке x_0, в которой уже известны значение $f(x_0)$ самой функции и значение $f'(x_0)$ ее производной.

Например, пусть $f(x)=x^\alpha$ и $x_0=1$. Тогда $f(1)=1^\alpha=1$, $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, $f'(1)=\alpha 1^{\alpha-1}=\alpha$, поэтому, полагая $x=1+\Delta$, из (12) находим следующую формулу $(1+\Delta)^\alpha\approx 1+\alpha\cdot\Delta$ для приближенных вычислений, справедливую для любых (не только целых) значений α, при условии малости величины Δ. По этой формуле

$$\sqrt[7]{1{,}07}=(1+0{,}07)^{1/7}\approx 1+\frac{1}{7}\cdot 0{,}07=1{,}01;$$

$$\sqrt{0{,}96}=(1+(-0{,}04))^{1/2}\approx 1+\frac{1}{2}(-0{,}04)=0{,}98;$$

$$(1{,}05)^7=(1+0{,}05)^7\approx 1+7\cdot 0{,}05=1{,}35.$$

Важную формулу (12) можно уточнить, если привлечь производные более высоких порядков, которые мы сейчас определим.

Поскольку производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама оказывается функцией аргумента x, то можно поставить вопрос о нахождении производной функции $f'(x)$, т. е. функции $(f')'(x)$, которая обозначается символом $f''(x)$ и называется второй производной исходной функции $f(x)$. Например, если $s(t)$ – закон движения, $v(t)=s'(t)$ – его скорость, а $a(t)=v'(t)$ – ускорение, то $a(t)=s''(t)$ есть вторая производная функции $s(t)$. Вообще можно определить производные любого порядка: n-я производная функции есть производная от ее $(n-1)$-й производной.

Для обозначения производных порядка n обычно используют символы $f^n(x)$ или

$$\frac{d^nf(x)}{dx}$$

в отличие от символов $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, употребляемых только для производных малых порядков (1, 2, 3).

Зная производные функции x^{α}, $\sin x$, $\cos x$, легко проверить по индукции, что производные n-го порядка от этих функций соответственно равны

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n},$$

$$\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Теперь вернемся к формуле (12), в которой функция $f(x)$ приближенно заменяется стоящим в правой части многочленом 1-й степени относительно $x-x_0$. Оказывается, соотношение (12) является частным случаем общего равенства

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_{n+1}, \tag{13}$$

называемого формулой Тейлора, в котором о величине r_{n+1}, называемой остаточным членом формулы Тейлора, говорится, например, что ее можно представить в виде:

$$r_{n+1}=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{14}$$

похожем на вид предыдущих членов формулы, но только здесь $f^{(n+1)}(x)$ вычисляется не в точке x_0, а в некоторой точке ξ, лежащей между x_0 и x.

Но этой информации бывает достаточно для вычислительных целей. Так, если $f(x)=\sin x$, а $x_0=0$, то вспомнив, что

$$\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),$$

получаем

$$|r_{n+1}|=\left|\frac{\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Значит, если, например, $|x|\leqslant 1$, а $n=6$, то $|r_7|<10^{-3}$ и потому, подставив в (13) $f^{(k)}(0)=\sin(k\pi/2)$, находим формулу:

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}, \tag{15}$$

позволяющую при любом x из отрезка $[-1; 1]$ вычислить значение $\sin x$ с точностью, не худшей, чем 10^{-3}.

Можно проверить, что в рассматриваемом случае $r_{n+1}\to 0$ при неограниченном увеличении n, поэтому можно предложить такую запись:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+$$

$$+(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\dots. \tag{16}$$

Справа в этом равенстве стоит бесконечно много слагаемых, т.е., как говорят, имеется ряд. Равенство (16) понимается, как и вообще сумма ряда, в том смысле, что при любом значении x разность между $\sin x$ и суммой конечного числа взятых по порядку слагаемых ряда стремится к нулю, если количество слагаемых неограниченно увеличивается.

Ценность формул вида (15), (16) состоит в том, что они позволяют заменить вычисление значений сложной функции вычислением значений приближающего ее многочлена. Вычисление же значений многочлена сводится к одним арифметическим операциям, которые, например, можно выполнить на электронной вычислительной машине.

Ряд (16) является частным случаем ряда

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dots, \tag{17}$$

который можно написать для любой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$. Он называется рядом Тейлора этой функции (Б. Тейлор (1685–1731) – английский математик). Ряд Тейлора (17) не всегда имеет своей суммой породившую его функцию $f(x)$, поэтому вопрос о сумме ряда Тейлора каждый раз требует определенного исследования, например такого, какое мы сделали выше, оценивая величину остатка r_{n+1}. Такими рассуждениями можно показать, что

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\dots$$

при любом значении x, а равенство

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots$$

имеет место при $|x|<1$, если α не целое, и при любом x, если $\alpha=n$ – целое положительное число. Но если $\alpha=n$, то $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m)=n(n-1)\dots(n-m)=0$ при $m>n$. Значит, при целых положительных n, в частности, получается соотношение:

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!}x^n,$$

известное в математике как бином Ньютона (см. *Ньютона бином*).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Математический анализ как анализ переменных величин с момента своего появления развивался в тесной связи с естествознанием, и в частности с физикой и механикой. Потребности развития физических наук, необходимость количественного изучения движения и меняющихся процессов привели к возникновению и формированию основных понятий *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*. Понятие дифференциального уравнения – одно из основных. Чтобы разъяснить это понятие, рассмотрим, из чего складывается изучение какого-либо физического процесса. Это – создание физической гипотезы, основанной на эксперименте, математическая форма записи физической гипотезы, математическое решение этой задачи и физическое толкование выводов из ее решения. Такой подход к изучению явлений природы впервые был предложен итальянским ученым Г. Галилеем (1564–1642). Впервые его блестяще применил один из создателей математического анализа – И. *Ньютон*. Математически сформулировать физические законы оказалось возможным лишь с появлением математического анализа и на его языке.

В очень большом числе случаев физические законы описывают некоторые соотношения между величинами, характеризующими изучаемый процесс, и скоростью изменения этих величин. Другими словами, эти законы выражаются равенствами, в которых участвуют неизвестные функции и их производные. Такие равенства называются дифференциальными уравнениями. Они появляются как математическая форма записи ряда физических законов. Изучение процессов, описываемых этими законами, сводится к изучению свойств решений дифференциальных уравнений. Поясним это на примерах.

Пусть тело (например, металлическая пластина), нагретое до температуры y_0, в момент времени $t = 0$ погружается в очень большой сосуд с воздухом нулевой температуры. Очевидно, тело начнет охлаждаться, и его температура будет функцией времени t. Обозначим ее $y(t)$.

Согласно закону охлаждения Ньютона, скорость изменения температуры тела, т. е. производная dy/dt, пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, в данном случае пропорциональна $y(t)$. Таким образом получаем, что в каждый момент времени справедливо соотношение

$$\frac{dy}{dt} = -ky \qquad (1)$$

(k – положительный коэффициент, зависящий от материала тела, знак «минус» потому, что температура убывает).

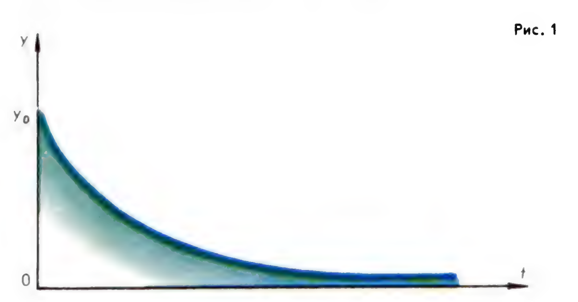
Это соотношение (1) в виде дифференциального уравнения является математической записью закона охлаждения, которое выражает зависимость между функцией (температурой) и ее производной в один и тот же момент времени. Его также называют математической моделью рассматриваемого процесса.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все функции $y(t)$, которые обращают уравнение в тождество. Все решения приведенного выше дифференциального уравнения даются формулой

$$y = Ce^{-kt}$$

(где C – произвольная постоянная), которая представляет собой его общее решение. Нахождение решения дифференциального уравнения всегда связано с операцией интегрирования, поэтому вместо слова «решить» часто употребляется глагол «проинтегрировать» (дифференциальное уравнение).

Рис. 1



В процессе охлаждения тела, который мы рассматриваем, нас интересует лишь то решение, которое в момент времени $t = 0$ принимает значение y_0. Подставляя в приведенную выше формулу $t = 0$, находим: $C = y_0$. Значит, закон охлаждения окончательно можно выразить так:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}.$$

Как видим, температура тела с течением времени понижается по показательному (экспоненциальному) закону и стремится к температуре окружающей среды (рис. 1).

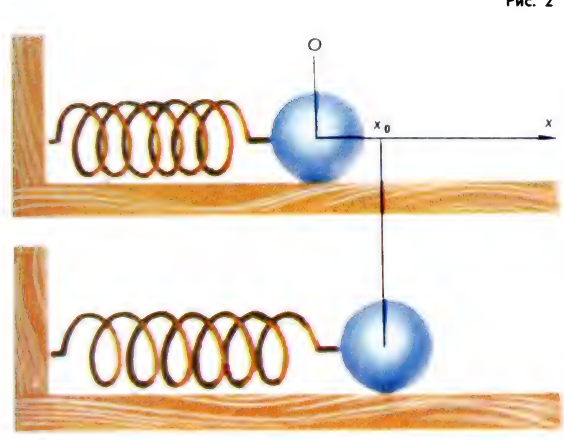
Условие $y(0) = y_0$ принято называть начальным, оно позволяет из бесконечного множества решений выбрать единственное.

Рассмотренное дифференциальное уравнение (1) выражает тот факт, что скорость изменения функции пропорциональна (с коэффициентом $-k$) самой функции. Такая зависимость наблюдается и в других явлениях природы, например падение атмосферного давления в зависимости от высоты над уровнем моря пропорционально величине давления. Еще пример – радиоактивный распад: скорость уменьшения массы радиоактивного вещества пропорциональна количеству этого веще-

ства. Следовательно, атмосферное давление y как функция высоты t над уровнем моря и масса радиоактивного вещества y как функция времени t удовлетворяют уравнению (1). Как видим, одно и то же дифференциальное уравнение может служить математической моделью совершенно разных явлений.

Рассмотрим небольшой шарик массой m, к которому прикреплена горизонтально расположенная пружина. Другой ее конец закреплен (рис. 2). Направим ось Ox вдоль оси пружины, за начало координат примем положение равновесия шарика. Если немного сместить шарик вдоль оси, то возникнет упругая сила F, стремящаяся вернуть его в положение равновесия. По закону Гука, эта сила пропорциональна смещению x, т.е. $F = -kx$ (k – положительная константа, характеризующая упругие свойства пружины, знак «минус» ста-

Рис. 2



вится потому, что сила восстанавливающая). Согласно второму закону Ньютона, сила, действующая на тело массой m, равна произведению массы на ускорение a:

$F = ma$.

Если же $x(t)$ – положение шарика в момент времени t, то его ускорение выражается второй производной $x''(t)$. Таким образом, движение шарика под действием упругих сил можно выразить дифференциальным уравнением

$$mx''(t) = -kx(t),$$

которое чаще записывается в виде

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0, \text{ где } \omega^2 = k/m.$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением гармонических колебаний. Можно доказать, что любое его решение может быть записано в виде

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

здесь A и φ – произвольные постоянные. Движения, характеризуемые таким уравнением, называются гармоническими колебаниями. Они представляют собой периодическое движение (рис. 3) с периодом $T = 2\pi/\omega$; величина A называется амплитудой колебания.

Очевидно, что дифференциальное уравнение $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ не вполне определяет движение шарика. Оно зависит от того, на какую величину x_0 шарик был смещен в момент времени $t = 0$ и с какой скоростью $v = x'(0)$ он отпущен, т.е. зависит от начальных данных. Если, например, скорость была нулевой, то движение шарика будет подчиняться закону

$$x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

Полученное нами выше дифференциальное уравнение есть математическая форма записи (математическая модель) закона движения под действием только силы упругости. Если рассмотреть движение шарика в среде, оказывающей сопротивление, и предположить, что кроме сил упругости на шарик действует сила сопротивления, пропорциональная скорости движения, то дифференциальное уравнение такого движения будет иметь вид:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0.$$

Решения этого уравнения уже не являются периодическими функциями, а представляют собой колебания с изменяющейся амплитудой, так называемые затухающие колебания (рис. 4).

Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным; таковы рассмотренные выше уравнения. Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в него. Как видим, уравнение $dy/dt = -ky$ первого порядка, уравнение $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$ – второго.

Если неизвестная функция зависит от нескольких переменных, то дифференциальное уравнение содержит ее частные производные и называется дифференциальным уравнением с частными производными. Такие уравнения

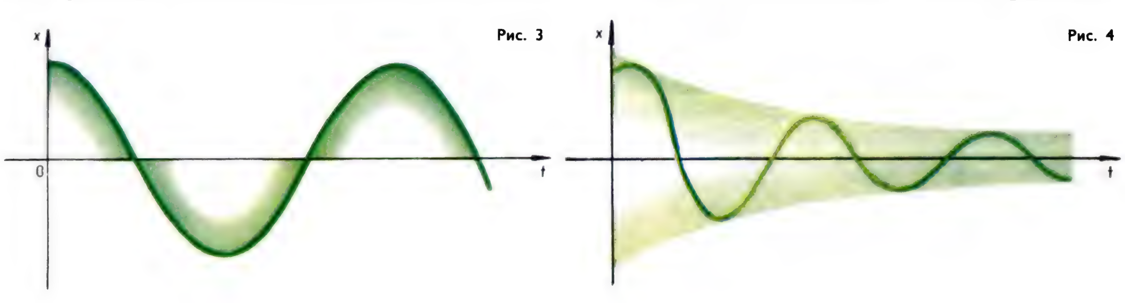


Рис. 3

Рис. 4

описывают, например, колебание мембраны, распространение тепла в некоторой среде, движение спутника.

Дифференциальные уравнения – важный математический аппарат в естествознании. Они применяются в физике и астрономии, аэродинамике и теории упругости, химии и экономике, биологии и медицине.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $dx/dt = f(x, t)$ допускает простую геометрическую интерпретацию. Если $x = \varphi(t)$ – его решение, то это уравнение в каждой точке кривой $x = \varphi(t)$ задает значение производной dx/dt, т. е. значение тангенса угла наклона касательной. Таким образом, в каждой точке области определения функции $f(x, t)$ задается угловой коэффициент касательной к решению, как говорят, задается поле

СОФЬЯ ВАСИЛЬЕВНА КОВАЛЕВСКАЯ (1850–1891)



Первая русская женщина-математик С. В. Ковалевская родилась в Москве в богатой семье генерал-лейтенанта артиллерии в отставке Корвин-Круковского. Девочка росла разносторонне способной, но особенно ее увлекала математика. Ее первое знакомство с математикой произошло, когда ей было 8 лет. Для оклейки комнат не хватило обоев, и стены комнаты маленькой Сони оклеили листами лекций *М. В. Остроградского* по математическому анализу. С. В. Ковалевская вспомнила, что «от долгого ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти...» С 15 лет она начала систематически изучать курс высшей математики.

В то время в России женщинам было запрещено учиться в университетах и высших школах, и, чтобы уехать за границу и получить там высшее образование, С. В. Ковалевская вступила в фиктивный брак с молодым ученым-биологом В. О. Ковалевским (со временем этот брак стал фактическим).

В 1869 г. молодые супруги уезжают в Германию, Ковалевская посещает лекции крупнейших ученых, а с 1870 г. она добивается права заниматься под руководством немецкого ученого К. Вейерштрасса. Занятия носили частный характер, так как и в Берлинский университет женщин не принимали.

В 1874 г. Вейерштрасс представляет три работы своей ученицы в Геттингенский университет для присуждения степени доктора философии, подчеркивая, что для получения степени достаточно любой из этих работ. Работа «К теории дифференциальных уравнений в частных производных» содержала доказательство решений таких уравнений. В наши дни эта важнейшая теорема о дифференциальных уравнениях называется теоремой Коши – Ковалевской. Другая работа содержала продолжение исследований Лапласа о структуре колец Сатурна, в третьей излагались труднейшие теоремы математического анализа. Степень была присуждена Ковалевской «с высшей похвалой».

С дипломом доктора философии она возвращается в Петербург и почти на 6 лет оставляет занятия математикой. В это время начинается ее литературно-публицистическая деятельность.

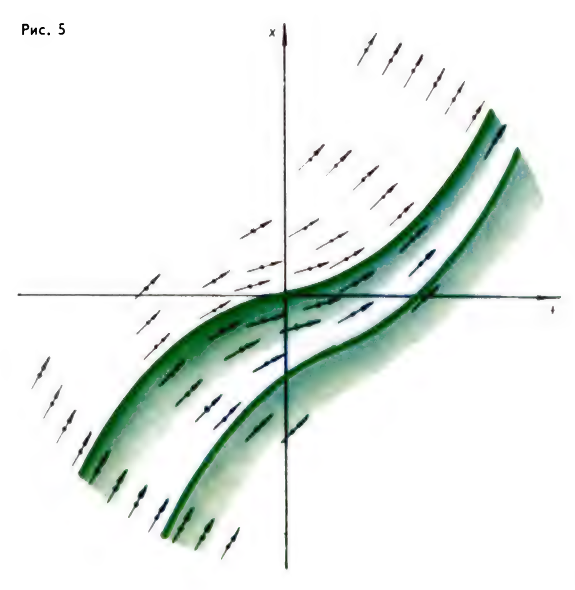
В 1880 г. Ковалевская переезжает в Москву, но там ей не разрешили сдавать в университете магистерские экзамены. Не удалось ей получить также место профессора на Высших женских курсах в Париже. Только в 1883 г. она переезжает в Швецию и начинает работать в Стокгольмском университете, где через год становится профессором. В течение 8 лет она прочитала 12 курсов лекций. Годы работы в Стокгольмском университете – период расцвета ее научной и литературной деятельности.

В 1888 г. Ковалевская написала работу «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки», присоединив к двум движениям гироскопа, открытым Л. Эйлером и Ж. Лагранжем, еще одно. За эту работу ей была присуждена премия Парижской академии наук – премия Бордена, причем сумма премии была увеличена ввиду высокого качества работы.

Через год по настоянию П. Л. Чебышева и других русских математиков Петербургская академия наук избрала Ковалевскую своим членом-корреспондентом. Предварительно для этого было принято специальное постановление о присуждении женщинам академических званий.

С. В. Ковалевская мечтала о научной работе в России, но ее мечта не сбылась, в 1891 г. она умерла в Стокгольме.

Рис. 5



направлений. Геометрически поле направлений обычно изображается единичными векторами. На рис. 5 представлено поле направлений дифференциального уравнения $dx/dt = t^2 + x^2$.

Решение дифференциального уравнения есть кривая, которая в каждой точке касается поля направлений, ее называют интегральной кривой. Рис. 5 позволяет довольно ясно представить, как должны выглядеть интегральные кривые этого уравнения.

В XVIII в. теория дифференциальных уравнений выделилась из математического анализа в самостоятельную математическую дисциплину. Ее успехи связаны с именами швейцарского ученого И. Бернулли, французского математика Ж. Лагранжа и особенно Л. *Эйлера*. Первый период развития дифференциальных уравнений был связан с успешным решением некоторых важных прикладных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям, разработкой методов интегрирования различных видов дифференциальных уравнений и поиском классов интегрируемых уравнений, т. е. таких, решение которых может быть найдено в квадратурах (в виде элементарных функций или их первообразных). Однако очень скоро выяснилось, что интегрируемых уравнений совсем не много. Даже уравнение первого порядка очень простого вида может не интегрироваться в квадратурах. Например, уравнение, для которого на рис. 5 было изображено поле направлений, имеет бесконечно много решений, но они не выражаются в квадратурах.

Установление таких фактов привело к развитию собственно теории дифференциальных уравнений, которая занимается разработкой методов, позволяющих по свойствам дифференциального уравнения определять свойства и характер его решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Доказательство – цепочка умозаключений, устанавливающая истинность данного суждения.

Метод перебора – один из простейших методов доказательства. Например, чтобы установить, что заданное число, скажем 103, простое, достаточно проверить, что оно не делится ни на одно простое число, не превосходящее корня из данного числа, в нашем случае, что оно не делится на 2, 3, 5, 7.

Однако когда количество объектов бесконечно, то уже невозможно перебрать все варианты. Здесь может помочь метод *математической индукции*, с помощью которого можно доказывать утверждения уже для бесконечного количества объектов.

Один из методов доказательства – принцип Дирихле (см. *Дирихле принцип*).

Доказательство – единственный способ установления истины в классической математике. Оно далеко не сразу заняло в математике такую исключительную роль. Например, в египетской и вавилонской математике вычислительные формулы, т. е. «рецепты» решения задач, так или иначе угадывались, они подвергались экспериментальной проверке, а затем сообщались в виде немотивированных утверждений.

Доказательства не сразу появились и в греческой геометрии. Архимед (III в. до н. э.) говорил о результатах, ранее «найденных, но не доказанных». С V в. до н. э. философы, начиная с Парменида и его ученика Зенона, во многом учась у ораторов, вычленяют различные приемы перехода от одних истинных утверждений к другим. Парменид формулирует закон «исключенного третьего» (из двух противоположных утверждений одно, и только одно, истинно), а Зенон использует метод приведения к абсурду (противоречию).

Но в математику эти приемы проникают не сразу: по-видимому, еще Демокрит, живший в V–IV вв. до н. э., обходился без доказательств. В IV в. до н. э. логика завоевывает математику. Несомненно, на первых порах доказательство – это логическое сведение неочевидных утверждений к очевидным или уже известным.

Наши современники не могут точно воссоздать картину, как появилась идея максимально ограничить число очевидных утверждений (аксиом), об истинности которых заключается соглашение и из которых остальные утверждения выводятся чисто логически (см. *Аксиоматика и аксиоматический метод*). В «Началах» Евклида (III в. до н. э.) грандиозная программа аксиоматизации геометрии уже полностью решена. По правилам Евклида доказательства должны быть чисто логическими

выводами из аксиом. Окончательные геометрические тексты тщательно оберегались от дополнительных апелляций к очевидности. Прокл Диадох (V в.), первый комментатор Евклида, писал: «...мы научились от самих пионеров этой науки совсем не принимать в расчет правдоподобные заключения, когда дело касается рассуждений, которые должны войти в науку геометрии». Тем временем Аристотель проводит формализацию и каталогизацию правил умозаключений. Его утверждение об их конечности и обозримости не менее поразительно, чем утверждение о конечности множества аксиом. Полнота этих двух каталогов не оспаривалась до XIX в.

Правила, которыми мы пользуемся при логических рассуждениях (доказательствах), не выходят за пределы простых логических операций. Утверждение, справедливое для некоторого множества (скажем, всех параллелограммов), справедливо и для его подмножества (например, прямоугольников). Если справедливы утверждения A и из A следует B, то справедливо B. При доказательстве теоремы, имеющей вид «из A следует B» (A – то, что дано, B – то, что требуется доказать), при помощи уже известных нам теорем выводятся разные следствия, которые затем комбинируются, и из их комбинаций делаются новые выводы, пока в результате не получится B.

При доказательстве методом от противного теоремы «из A следует B» из справедливости утверждения A и отрицания утверждения B выводится справедливость пары противоположных утверждений, например, достаточно доказать отрицание утверждения A или утверждения B. Вспомним одно из классических доказательств от противного – доказательство Евклида бесконечности множества простых чисел. Если предположить, что множество простых чисел конечно и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – их полный набор, то число $p_1 \ldots p_k + 1$ не может быть составным, так как оно не делится ни на одно из простых чисел p_j, но оно не может быть и простым, так как оно больше каждого p_k.

Существуют и другие способы установления справедливости математических утверждений. Так, у Архимеда большинство его замечательных утверждений о площадях криволинейных фигур и объемах тел было получено первоначально при помощи чисто механических рассуждений с центрами тяжести, равновесием рычагов и т. д. В дальнейшем появилось большое число «механических» доказательств геометрических утверждений. Вот одно из самых изящных. Из внутренней точки многогранника на его грани опускаются перпендикуляры. Надо доказать, что хотя бы для одной грани перпендикуляр придется на саму грань, а не на ее продолжение. «Механическое» рассуждение состоит в следующем. Изготовляется массивный многогранник с неравномерной плотностью, у которого центр тяжести находится в заданной точке. Если все перпендикуляры попадут на продолжения граней, то многогранник не сможет стоять ни на одной грани, и мы получим вечный двигатель. Можно ли считать это рассуждение доказательством? С точки зрения, принятой в геометрии, разумеется, нет. Более того, нет никаких формальных способов преобразовывать «механические» доказательства в геометрические. Архимед справился с этой задачей, он дал геометрические доказательства к найденным им фактам.

Доказательство теоремы, как правило, не несет никакой информации о том, как к этой теореме можно на самом деле прийти. Одним из немногих великих математиков, допускавших посторонних в свою творческую лабораторию, был Л. *Эйлер*. Тексты Эйлера дают нам возможность проследить за ходом его мысли. Например, он рассматривает бесконечный ряд

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots.$$

Далее, используя, что $\sin x/x = 0$ при $x = k\pi$, $k \neq 0$, Эйлер применяет к ряду теорему о разложении на линейные множители, как если бы это был многочлен:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\ldots$$

Раскрывая скобки и вычисляя коэффициент при x^2, получаем $\pi^2/6 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \ldots + 1/n^2 + \ldots$. Разумеется, Эйлер понимал, что его смелое рассуждение доказательством не является. Он ищет косвенные подтверждения: вычисляет с большим числом знаков левую и правую части полученного соотношения, получает другие аналогичные соотношения и в их числе уже доказанное Лейбницем: $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$. У него появляется уверенность в правильности своего рассуждения, хотя он еще не в состоянии проводить эквивалентные строгие доказательства. Эйлер энергично использует свой прием для открытия новых фактов. Умение открывать новые факты в виде гипотез, умение исследовать гипотезы на правдоподобность, как и умение проводить строгие доказательства,– важнейшие компоненты математического творчества.

С XVII в. математики начинают осознавать, что, в отличие от представителей других наук, они имеют надежный способ установления истины – доказательство. С этим связаны многочисленные попытки перенести доказательства за пределы математики. И. Ньютон строит механику на аксиомах по образцу «Начал» Евклида. Нидерландский философ-материа-

лист XVII в. Б. Спиноза аксиоматизирует этику. Начиная с французского математика и физика П. С. Лапласа (1749–1827) многие пытались внедрить математические рассуждения в юридическую практику. Делались бесконечные попытки решить проблемы человеческих отношений при помощи математики. Но, конечно же, в самой математике доказательства стали играть важнейшую роль.

К началу нашего века аксиоматический метод выходит за пределы геометрии. Большинство фактов о числах, известных со времен Пифагора, носило характер частных наблюдений над конкретными числами, а не обобщающих теорем. В XVI в. теоремы появились в алгебре (у Дж. Кардано), в XVII в. – в теории чисел (у П. Ферма). Однако здесь математики не имели дело с аксиоматическими теориями и понимание доказательства находилось на доевклидовом уровне, когда набор исходных утверждений не фиксируется. В XIX в. начинается аксиоматизация всей математики. На новом уровне формализуются и перечисляются правила вывода – перехода от одних утверждений к другим. Это позволило доказать, что некоторые утверждения невыводимы из аксиом. Всеобщее удивление вызвало рассуждение немецкого математика К. Геделя о том, что в арифметике и вообще во всякой содержащей ее аксиоматической теории существует такая теорема, что ни она сама, ни ее отрицание невыводимы из аксиом.

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Эта функция представляет собой частное двух линейных функций и задается формулой:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}. \qquad (1)$$

Дробно-линейная функция сводится к линейной функции при $c = 0$ и к постоянной при $ad = bc$.

Особенно важен частный случай дробно-линейной функции при $a = d = 0$, так как он выражает закон обратной пропорциональной зависимости:

$$y = \frac{k}{x}. \qquad (2)$$

Обратная пропорциональная зависимость связывает, например, давление газа p и его объем v при постоянной температуре, так как по закону Бойля – Мариотта $pv = \text{const}$. В случае равномерного движения при прохождении заданного пути s время движения t обратно пропорционально скорости v, т. е. $t = s/v$.

Графики функций $y = k/x$ при различных значениях k изображены на рис. 1: сплошной линией при $k > 0$ и пунктирной при $k < 0$. Все эти кривые называются равнобочными *гиперболами*, они стремятся к оси Ox при неограниченном возрастании и убывании аргумента x и стремятся к оси Oy при стремлении x слева или справа к нулю.

График общей дробно-линейной функции (1) получается из графика функции $y = k/x$ при помощи параллельного переноса. На рис. 2 приведен график функции

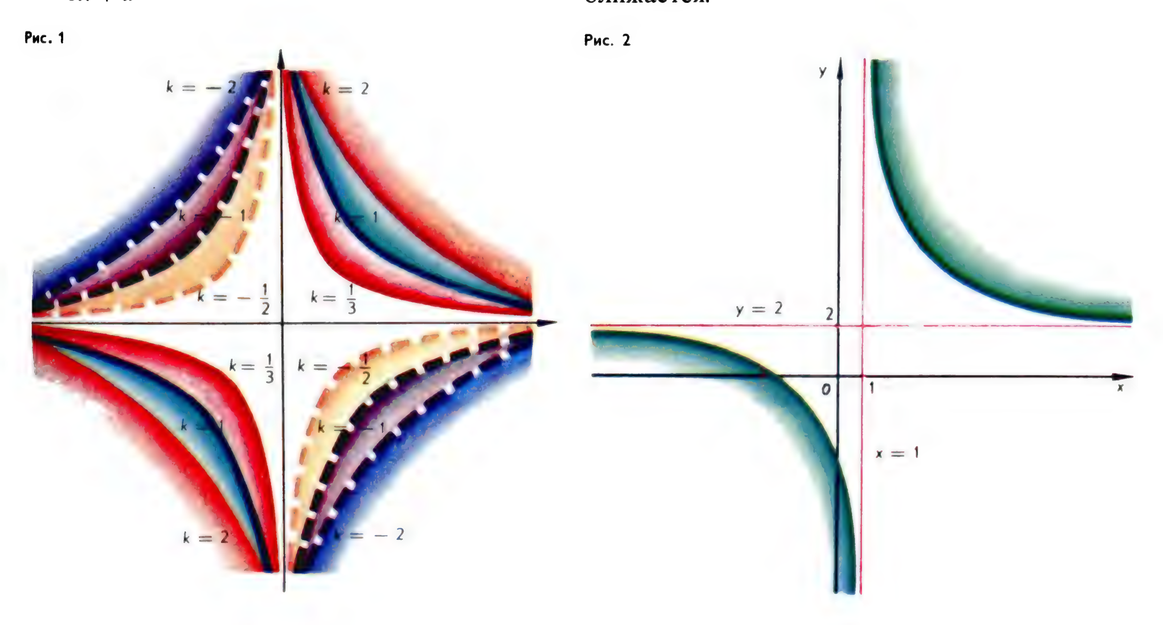
$$y = \frac{2x + 3}{x - 1}.$$

Эта функция представима в виде

$$y = 2 + \frac{5}{x - 1},$$

и легко понять, что ее график получается параллельным переносом из равнобочной гиперболы $y = 5/x$ и заключен между прямыми $x = 1$ и $y = 2$, к которым неограниченно приближается.

Рис. 1 Рис. 2



Е,З,И

ЕВКЛИД И ЕГО «НАЧАЛА»

В течение двух тысяч лет геометрию узнавали либо из «Начал» Евклида, либо из учебников, написанных на основе этой книги. Лишь профессиональные математики обращались к трудам других великих греческих геометров: *Архимеда*, Аполлония – и геометров более позднего времени. Классическую геометрию стали называть евклидовой в отличие от появившихся в XIX в. «неевклидовых геометрий».

Об этом поразительном человеке история сохранила настолько мало сведений, что нередко высказываются сомнения в самом его существовании. Что же дошло до нас? Каталог греческих геометров Прокла Диадоха Византийского, жившего в V в. н. э.,– первый серьезный источник сведений о греческой геометрии. Из каталога следует, что Евклид был современником царя Птолемея I, который царствовал с 306 по 283 г. до н. э.

Евклид должен быть старше Архимеда, который ссылался на «Начала». До наших времен дошли сведения, что он преподавал в Александрии, столице Птолемея I, начинавшей превращаться в один из центров научной жизни. Евклид был последователем древнегреческого философа Платона, и преподавал он, вероятно, четыре науки, которые, по мнению Платона, должны предшествовать занятиям философией: арифметику, геометрию, теорию гармонии, астрономию. Кроме «Начал» до нас дошли книги Евклида, посвященные гармонии и астрономии.

Что касается места Евклида в науке, то оно определяется не столько собственными его научными исследованиями, сколько педагогическими заслугами. Евклиду приписывается несколько теорем и новых доказательств, но их значение не может быть сравнимо с достижениями великих греческих геометров: Фалеса и *Пифагора* (VI в. до н. э.), Евдокса и Теэтета (IV в. до н. э.). Величайшая заслуга Евклида в том, что он подвел итог построению геометрии и придал изложению столь совершенную форму, что на две тысячи лет «Начала» стали энциклопедией геометрии.

Евклид с величайшим искусством расположил материал по 13 книгам так, чтобы трудности не возникали преждевременно. Позже греческие математики включили в «Начала» еще две книги – XIV-ю и XV-ю, написанные другими авторами.

Первая книга Евклида начинается с 23 «определений», среди них такие: точка есть то, что не имеет частей; линия есть длина без ширины; линия ограничена точками; прямая есть линия, одинаково расположенная относительно всех своих точек; наконец, две прямые, лежащие в одной плоскости, называются параллельными, если они, сколь угодно продолженные, не встречаются. Это скорее наглядные представления об основных объектах, и слово «определение» в современном понимании не точно передает смысл греческого слова «хорой», которым пользовался Евклид.

В книге I рассматриваются основные свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов, сравниваются их площади. Здесь появляется теорема о сумме углов треугольника. Затем следует пять геометрических постулатов: через две точки можно провести одну прямую; каждая прямая может быть сколь угодно продолжена; данным радиусом из данной точки можно провести окружность; все прямые углы равны; если две прямые проведены к третьей под углами, составляющими в сумме меньше двух прямых, то они встречаются с той же стороны от этой прямой. Все эти постулаты, кроме одного, вошли в современные курсы основной геометрии. За постулатами приводятся общие предположения, или *аксиомы*,– восемь общематематических утверждений о равенствах и неравенствах. Книга заканчивается теоремой Пифагора (см. *Пифагора теорема*).

В книге II излагается геометрическая алгебра, с помощью геометрических чертежей даются решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям. Алгебраической символики тогда не существовало.

В книге III рассматриваются свойства круга, свойства касательных и хорд, в книге IV – правильные многоугольники, появляются основы учения о подобии. В книгах VII–IX изложены начала теории чисел (см. *Чисел теория*), основанной на алгоритме нахождения *наибольшего общего делителя*, приводится алгоритм Евклида (см. *Евклида алгоритм*), сюда входит теория делимости и теорема о бесконечности множества простых чисел.

Последние книги посвящены стереометрии. В книге XI излагаются начала стереометрии, в XII с помощью метода исчерпания определяются отношение площадей двух кругов и отношение объемов пирамиды и призмы, конуса и цилиндра. Вершина стереометрии у Евклида – теория правильных многогранников. В «Начала» не попало одно из величайших достижений греческих геометров – теория *конических сечений*. О них Евклид написал отдельную книгу «Начала конических сечений»,

не дошедшую до нас, но ее цитировал в своих сочинениях Архимед.

«Начала» Евклида не дошли до нас в подлиннике. Двенадцать столетий отделяют от Евклида самые старые известные списки, семь столетий – сколь-нибудь подробные сведения о «Началах». В средневековую эпоху интерес к математике был утрачен, некоторые книги «Начал» пропали и потом с трудом восстанавливались по латинским и арабским переводам. А к тому времени тексты обросли «улучшениями» позднейших комментаторов.

В период возрождения европейской математики (XVI в.) «Начала» изучали и воссоздавали заново. Логическое построение «Начал», аксиоматика Евклида воспринимались математиками как нечто безупречное до XIX в., когда начался период критического отношения к достигнутому, который закончился новой аксиоматикой евклидовой геометрии – аксиоматикой *Д. Гильберта.* Изложение геометрии в «Началах» считалось образцом, которому стремились следовать ученые и за пределами математики.

ЕВКЛИДА АЛГОРИТМ

Алгоритм Евклида – это способ нахождения *наибольшего общего делителя* двух целых чисел, а также наибольшей общей меры двух соизмеримых отрезков.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух целых положительных чисел, нужно сначала большее число разделить на меньшее, затем второе число разделить на остаток от первого деления, потом первый остаток – на второй и т. д. Последний ненулевой положительный остаток в этом процессе и будет наибольшим общим делителем данных чисел.

Обозначив исходные числа через a и b, положительные остатки, получающиеся в результате делений, через $r_1, r_2, \ldots, r_n$, а неполные частные через $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$, можно записать алгоритм Евклида в виде цепочки равенств:

$$a = bq_1 + r_1,$$
$$b = r_1 q_2 + r_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,$$
$$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$$

Приведем пример. Пусть $a = 777$, $b = 629$. Тогда $777 = 629 \cdot 1 + 148$, $629 = 148 \cdot 4 + 37$, $148 = 37 \cdot 4$. Последний ненулевой остаток 37 и есть наибольший общий делитель чисел 777 и 629.

Для нахождения наибольшей общей меры двух отрезков поступают аналогично. Операцию деления с остатком заменяют ее геометрическим аналогом: меньший отрезок откладывают на большем столько раз, сколько возможно; оставшуюся часть большего отрезка (принимаемую за «остаток от деления») откладывают на меньшем отрезке и т. д. Если отрезки a и b соизмеримы, то последний ненулевой остаток даст наибольшую общую меру этих отрезков. В случае несоизмеримых отрезков получаемая последовательность ненулевых остатков будет бесконечной.

Рассмотрим пример. Возьмем в качестве исходных отрезков стороны AB и AC равнобедренного треугольника ABC, у которого $\hat{A} = \hat{C} = 72°$, $\hat{B} = 36°$. В качестве первого остатка мы получим отрезок AD (CD – биссектриса угла C), и, как легко видеть, последовательность ненулевых остатков будет бесконечной. Значит, отрезки AB и AC несоизмеримы.

Алгоритм Евклида известен издавна. Ему уже более 2 тыс. лет. Этот алгоритм сформулирован в «Началах» Евклида, где из него выводятся свойства простых чисел, *наименьшего общего кратного* и т. д. Как способ нахождения наибольшей общей меры двух отрезков алгоритм Евклида (иногда называемый методом попеременного вычитания) был известен еще пифагорейцам. К середине XVI в. алгоритм Евклида был распространен на многочлены от одного переменного. В дальнейшем удалось определить алгоритм Евклида и для некоторых других алгебраических объектов.

Алгоритм Евклида имеет много применений. Равенства, определяющие его, дают возможность представить наибольший общий делитель d чисел a и b в виде $d = ax + by$ (x; y – целые числа), а это позволяет находить решения *диофантовых уравнений* 1-й степени с двумя неизвестными. Алгоритм Евклида является средством для представления рационального числа в виде цепной дроби (см. *Календарь*). Он часто используется в программах для электронных вычислительных машин.

ЕДИНИЦА

Единица – это первое число *натурального ряда*, а также одна из цифр в десятичной системе счисления.

Считается, что обозначение единицы любого разряда одним и тем же знаком (довольно близким современному) появилось впервые в Древнем Вавилоне приблизительно за 2 тыс. лет до н. э.

Древние греки, считавшие числами лишь натуральные числа, рассматривали каждое из них как собрание единиц. Самой же единице отводилось особое место: она числом не считалась. (Это заставляло, например, *Евклида*

отдельно доказывать свойства пропорций в случае, когда один из членов пропорции равен единице.)

Но уже И. *Ньютон* писал: «...под числом мы понимаем не столько собрание единиц, сколько отвлеченное отношение одной величины к другой величине, условно принятой нами за единицу». Таким образом, к тому времени единица уже заняла свое законное место среди других чисел.

Основное свойство, характеризующее число 1, таково: $a \cdot 1 = a$ для любого числа a.

Это свойство числа 1 переносится и на некоторые другие математические объекты, для которых определена операция умножения (см. *Группа*).

ЗНАКИ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ

Знаки математические – условные обозначения, которые служат для записи математических понятий, предложений, соотношений. Развитие системы обозначений в математике было тесно связано с общим развитием ее понятий и методов.

В процессе становления математических наук возникала необходимость в точных, ясных и сжатых формулировках, требовалось устранить громоздкость словесных описаний математических фактов, многозначность в математических выражениях.

Первыми математическими знаками были *цифры*. В работах древнегреческих математиков, например в «Началах» Евклида, отрезки и другие геометрические объекты обозначались буквами. Зачатки буквенного обозначения величин появились в III в., когда Диофант ввел обозначения для неизвестной величины и ее степеней, предложил особые знаки для операции вычитания и для обозначения равенства. Буквенные обозначения для неизвестных применяли индийские математики в VII в., однако создание развернутого буквенного исчисления относится к XIV–XVII вв. В конце XV в. француз Н. Шюке и итальянец Л. Пачоли впервые написали знаки сложения и вычитания $\tilde{p}$ и $\tilde{m}$ (от латинского *plus* и *minus*), а немецкие математики ввели современные обозначения $+$ и $-$.

В XVI в. математики применяли смешанные записи, содержавшие слова и некоторые математические знаки. Например, уравнение $x^3 + 5x = 12$ имело бы у Дж. Кардано (1545) вид

I. *cubus* $\tilde{p}$.5. *positionibus aequantur* 12

(*cubus* – «куб», *positio* – «неизвестная», *aequantur* – «равно»); у итальянского математика Р. Бомбелли (1572) – вид

$1^3 p.5^1$ *equale à* 12

(^{3} – «куб неизвестной», ^{1} – «неизвестная», *equale à* – «равно»); у французского ученого Ф. Виета (1591 г.) – вид

1*C*. + 5*N aequantur* 12

(*C* – *cubus* – «куб», *N* – *numerus* – «число»). Но постепенно слова заменялись символами, и уже в 1631 г. англичанин Т. Гарриот записал бы это уравнение в виде

$aaa + 5 \cdot a = 12$.

В начале XVII в. вошли в употребление знак равенства и скобки: квадратные предложил итальянский математик Р. Бомбелли, круглые – итальянский математик Н. Тарталья, фигурные – Ф. Виет.

Важным шагом в развитии алгебраической символики оказалось введение Ф. Виетом математических знаков для произвольных постоянных величин. Он обозначал их прописными согласными буквами латинского алфавита, а неизвестные величины – гласными буквами. Виет создал и алгебраические формулы.

В 1637 г. Р. Декарт придал знакам алгебры современный вид. Он изображал неизвестные величины при помощи последних букв латинского алфавита x, y, z, а данные величины – начальными буквами a, b, c. Предложенные Декартом символы скоро стали употреблять повсеместно. Ему же принадлежит обозначение показателя степени.

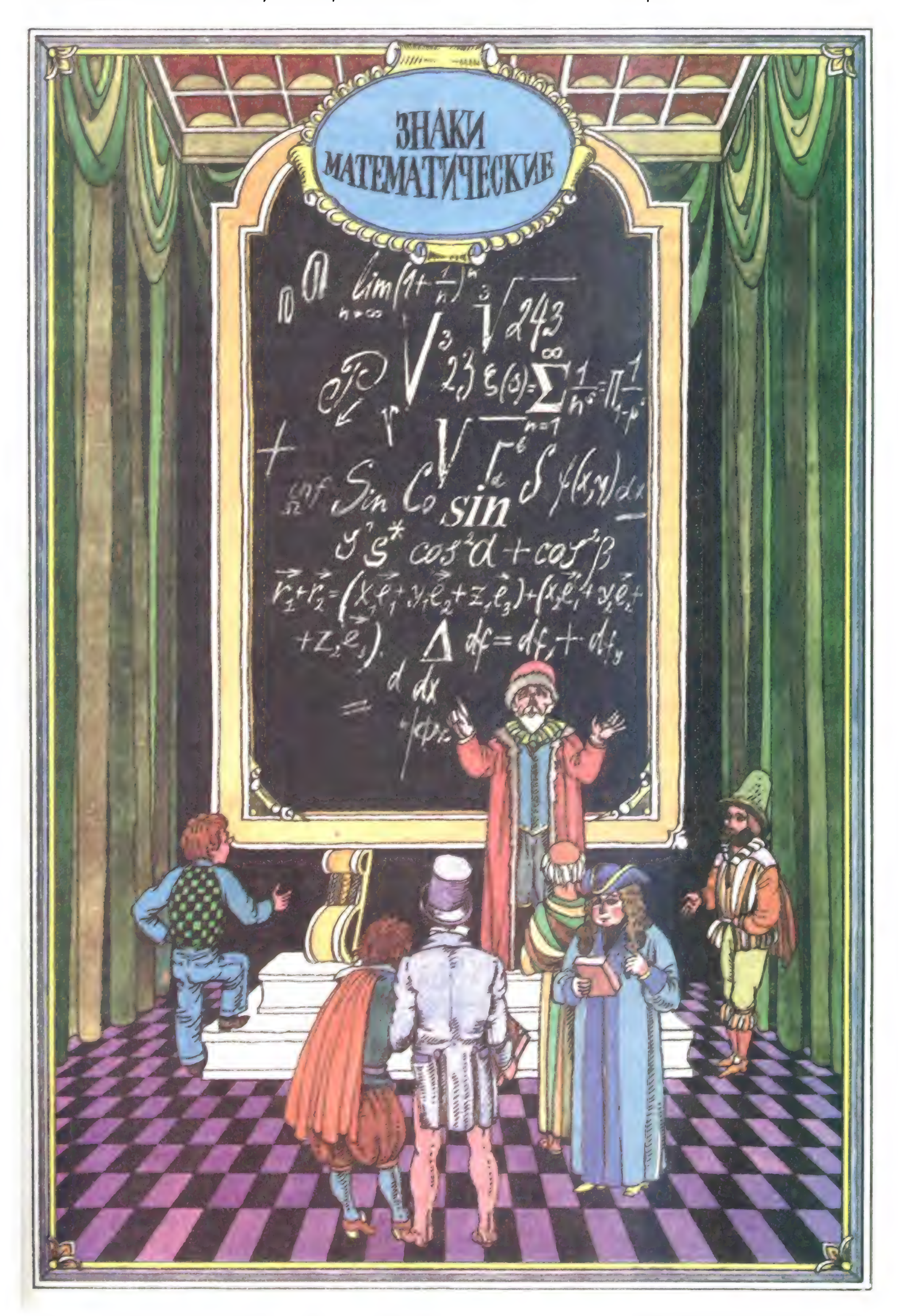
Более 500 лет длилась эволюция знака *радикала*. Современное обозначение $\sqrt{}$ состоит из двух частей – знака $\surd$ – модифицированной буквы *r* (от *radix* – «корень») и черты, заменявшей ранее скобки.

В конце XVII в. в связи с созданием дифференциального и интегрального исчислений Г. В. *Лейбниц* ввел знаки для обозначения производной, дифференциала и интеграла. Его символика оказалась наиболее удобной и вытеснила знаки, предложенные другим создателем математического анализа – И. *Ньютоном*. Например, знак $\int y dx$ отражает тот факт, что площадь криволинейной трапеции можно условно представлять как сумму бесконечно тонких полосок с основанием dx и высотой y ($\int$ – стилизованная буква s от латинского слова *summa* – «сумма»), знак же dx (от латинского *differentia* – «разность») отражает связь дифференциала функции и ее приращения.

Современная символика для обозначения функций была введена Л. *Эйлером*, который в 1734 г. использовал обозначение $f(x)$ для произвольной функции, ввел современные обозначения для тригонометрических, обратных тригонометрических, показательной, логарифмической и иных функций. В настоящее время в математике применяется множество специальных функций (функции Лежандра, Бесселя, эллиптические и т. д.), каждая из которых обозначается своим математическим

«Так называемые арабские цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – одно из прекраснейших открытий, состоящее в том, чтобы записывать, пользуясь ими, самые большие числа с помощью нуля и указания определенного места, пришло через арабов в Европу в 10-м или 11-м столетии».

К. Маркс



знаком. Эйлер ввел обозначение e для основания натуральных логарифмов (1736), π – для отношения длины окружности к длине ее диаметра (тогда же), i для $\sqrt{-1}$ и т. д. В XIX в. были введены обозначения $|x|$ для модуля (К. Вейерштрасс, 1841), $\vec{r}$ для вектора (О. Коши, 1853),

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$$

для определителя (А. Кэли, 1841) и многие иные.

Все математические знаки можно разделить на знаки объектов (например: π, i и т. д.), знаки операций (например: $+$, $:$ и т. д.), знаки отношений (например: $=$, $>$) и вспомогательные знаки, устанавливающие порядок сочетания основных знаков (скобки).

Только на основе разработанной системы математических знаков стало возможным выразить математические умозаключения по определенным формальным правилам.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Интегральное исчисление – это раздел *математического анализа*, в котором изучаются интегралы, их свойства, способы вычисления и приложения. Вместе с *дифференциальным*

Даты возникновения некоторых математических знаков

Знак	Значение	Кто ввел	Когда знак введен, год
	Знаки объектов		
∞	бесконечность	Дж. Валлис	1655
π	отношение длины окружности к диаметру	У. Джонс Л. Эйлер	1706 1736
i	корень квадратный из -1	Л. Эйлер	1777
x, y, z	неизвестные или переменные величины	Р. Декарт	1637
$\vec{r}$	вектор	О. Коши	1853
	Знаки операций		
$+$	сложение	немецкие математики	конец XV в.
$-$	вычитание	»	»
$\times$	умножение	У. Оутред	1631
$\cdot$	умножение	Г. Лейбниц	1698
$:$	деление	Г. Лейбниц	1684
a^2, a^3, ..., a^n	степени	Р. Декарт	1637
$\sqrt{\ }$ $\sqrt[3]{\ }$	корни	Х. Рудольф А. Жирар	1525 1629
Log, log	логарифм	И. Кеплер Б. Кавальери	1624 1632
sin	синус		
cos	косинус	Л. Эйлер	1748
tg	тангенс	Л. Эйлер	1753
arcsin	арксинус	Ж. Лагранж	1772
dx, ddx, ..., d^2x, d^3x	дифференциал	Г. Лейбниц	1675
$\int ydx$	интеграл	Г. Лейбниц	1675
$\frac{dy}{dx}$	производная	Г. Лейбниц	1675
$\int_a^b f(x)dx$	определенный интеграл	Ж. Фурье	1819–1822
$\sum$	сумма	Л. Эйлер	1755
$!$	факториал	Х. Крамп	1808
lim	предел	У. Гамильтон	1853
$\lim\limits_{n=\infty}$		многие математики	начало XX в.
$\lim\limits_{n\to\infty}$			
φx	функция	И. Бернулли	1718
$f(x)$		Л. Эйлер	1734
	Знаки отношений		
$=$	равенство	Р. Рекорд	1557
$>$ $<$	больше меньше	Т. Гарриот	1631
$\equiv$	сравнимость	К. Гаусс	1801
$\parallel$	параллельность	У. Оутред	1677
$\perp$	перпендикулярность	П. Эригон	1634

исчислением оно составляет основу аппарата математического анализа.

Интегральное исчисление возникло из рассмотрения большого числа задач естествознания и математики. Важнейшие из них – физическая задача определения пройденного за данное время пути по известной, но, быть может, переменной скорости движения и значительно более древняя задача вычисления площадей и объемов геометрических фигур (см. *Геометрические задачи на экстремум*).

Центральным в интегральном исчислении является понятие интеграла, которое, однако, имеет две различные трактовки, приводящие соответственно к понятиям неопределенного и определенного интегралов.

В дифференциальном исчислении была введена операция дифференцирования функций. Рассматриваемая в интегральном исчислении обратная к дифференцированию математическая операция называется интегрированием или, точнее, неопределенным интегрированием.

В чем же состоит эта обратная операция и в чем ее неопределенность?

Операция дифференцирования сопоставляет заданной функции $F(x)$ ее производную $F'(x)=f(x)$. Допустим, что мы хотим, исходя из заданной функции $f(x)$, найти такую функцию $F(x)$, производной которой является функция $f(x)$, т.е. $f(x)=F'(x)$. Такая функция называется первообразной функции $f(x)$.

Значит, обратная дифференцированию операция – неопределенное интегрирование – состоит в отыскании первообразной данной функции.

Заметим, что, наряду с функцией $F(x)$, первообразной для функции $f(x)$, очевидно, будет также любая функция $\mathcal{F}(x) = F(x) + C$, отличающаяся от $F(x)$ постоянным слагаемым C; ведь $\mathcal{F}'(x) = F'(x) = f(x)$.

Таким образом, в отличие от дифференцирования, сопоставлявшего функции единственную другую функцию – производную первой, неопределенное интегрирование приводит не к одной конкретной функции, а к целому набору функций, и в этом его неопределенность.

Однако степень этой неопределенности не так уж велика. Напомним, что если производная некоторой функции равна нулю во всех точках какого-то промежутка, то это функция, постоянная на рассматриваемом промежутке (на промежутках, где скорость изменения переменной величины везде равна нулю, она не меняется). Значит, если $\mathcal{F}'(x) = F'(x)$ на каком-то промежутке $a<x<b$, то функция $\mathcal{F}(x) - F(x)$ постоянна на этом промежутке, поскольку ее производная $\mathcal{F}'(x) - F'(x)$ равна нулю во всех точках промежутка.

Итак, две первообразные одной и той же функции могут отличаться на промежутке только постоянным слагаемым.

Первообразные функции $f(x)$ обозначают символом

$$\int f(x)\,dx,$$

где знак $\int$ читается: интеграл. Это так называемый неопределенный интеграл. По доказанному, неопределенный интеграл изображает на рассматриваемом промежутке не одну конкретную функцию, а любую функцию вида

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (1)$$

где $F(x)$ – какая-то первообразная функции $f(x)$ на данном промежутке, а C – произвольная постоянная.

Например, на всей числовой оси

$$\int 2x\,dx = x^2 + C; \quad \int \cos y\,dy = \sin y + C;$$
$$\int \sin z dz = -\cos z + C.$$

Мы здесь специально обозначили аргументы подынтегральных функций различными символами: x, y, z, чтобы обратить внимание на независимость первообразной как функции от выбора буквы, используемой для обозначения ее аргумента.

Проверка написанных равенств выполняется простым дифференцированием их правых частей, в результате которого получаются стоящие в левых частях под знаком интеграла функции $2x$, $\cos y$, $\sin z$ соответственно.

Полезно иметь в виду также следующие очевидные соотношения, непосредственно вытекающие из определений первообразной, производной, дифференциала и из соотношения (1) для неопределенного интеграла:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx,$$
$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Отыскание первообразной часто облегчают некоторые общие свойства неопределенного интеграла:

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

(вынесение постоянного множителя);

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(интегрирование суммы); если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

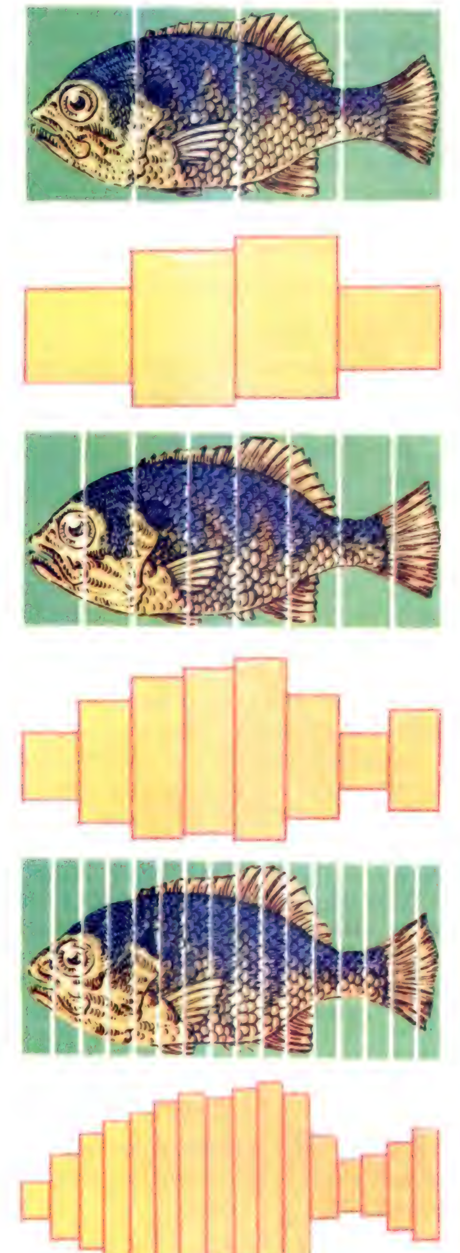
то

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$$

(замена переменной).

Эти соотношения также проверяются непосредственно с использованием соответствующих правил дифференцирования.

Найдем закон движения свободно падающего в пустоте тела, исходя из единственного факта, что при отсутствии воздуха ускорение g свободного падения вблизи поверхности Зе-



мли постоянно и не зависит от особенностей падающего тела. Фиксируем вертикальную координатную ось; направление на оси выберем в сторону к Земле. Пусть $s(t)$ – координата нашего тела в момент t. Нам известно, таким образом, что $s''(t) = g$ и g – постоянная. Требуется найти функцию $s(t)$ – закон движения.

Поскольку $g = v'(t)$, где $v(t) = s'(t)$, то, последовательно интегрируя, находим

$$v(t) = \int g\,dt = g\int 1\cdot dt = g\cdot t + C_1, \qquad (2)$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (g\cdot t + C_1)\,dt =$$

$$= \int g\cdot t\,dt + \int C_1\,dt = g\int t\,dt + C_1\int 1\cdot dt =$$

$$= gt^2/2 + C_1 t + C_2.$$

Итак, мы нашли, что

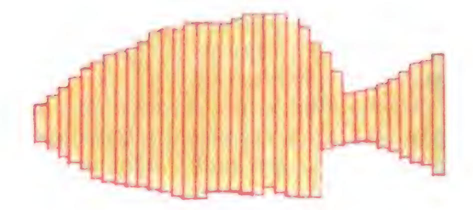
$$s(t) = gt^2/2 + C_1 t + C_2, \qquad (3)$$

где C_1 и C_2 – какие-то постоянные. Но падающее тело подчиняется все-таки одному конкретному закону движения, в котором уже нет никакого произвола. Значит, есть еще какие-то условия, которые мы пока не использовали; они позволяют среди всех «конкурирующих» законов (3) выбрать тот, который соответствует конкретному движению. Эти условия легко указать, если разобраться в физическом смысле постоянных C_1 и C_2. Если сравнить крайние члены соотношения (2) при $t = 0$, то выяснится, что $C_1 = v(0)$, а из (3) при $t = 0$ получается, что $C_2 = s(0)$. Таким образом, математика сама напомнила нам, что искомый закон движения

$$s(t) = gt^2/2 + v_0 t + s_0$$

вполне определится, если указать начальное положение $s_0 = s(0)$ и начальную скорость $v_0 = v(0)$ тела. В частности, если $v_0 = 0$ и $s_0 = 0$, получаем $s(t) = gt^2/2$.

Отметим теперь, что между операцией нахождения производной (дифференцированием) и операцией отыскания первообразной (неопределенным интегрированием) имеется, кроме указанного выше, еще целый ряд принципиальных отличий. В частности, следует иметь в виду, что если производная любой комбинации элементарных функций сама выражается через элементарные функции, т.е. является элементарной функцией, то первообразная элементарной функции уже не всегда является функцией элементарной. Например, первообразная



$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx$$

элементарной функции $\sin x/x$ (называемая интегральным синусом и обозначаемая специальным символом $\mathrm{si}(x)$), как можно доказать, не выражается в элементарных функциях. Таким образом, принципиальный математический вопрос о существовании первообразной у наперед заданной функции не надо смешивать с не всегда разрешимой задачей об отыскании этой первообразной среди элементарных функций. Интегрирование часто

является источником введения важных и широко используемых специальных функций, которые изучены ничуть не хуже таких «школьных» функций, как x^2 или $\sin x$, хотя и не входят в список элементарных функций.

Наконец, отметим, что отыскание первообразной, даже когда она выражается в элементарных функциях, скорее напоминает искусство, чем канонический алгоритм вычислений, подобный алгоритму дифференцирования. По этой причине найденные первообразные наиболее часто встречающихся функций собраны в виде справочных таблиц неопределенных интегралов. Следующая микротаблица такого рода, очевидно, равносильна микротаблице производных соответствующих основных элементарных функций:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \text{ при } n \neq -1;$$

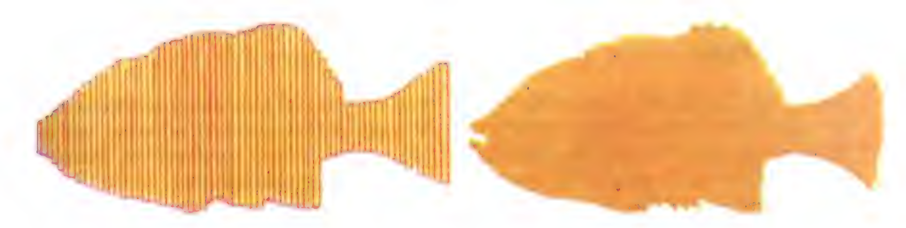
$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Мы, пока говорили об обращении операции дифференцирования, пришли в этой связи к понятиям первообразной, неопределенного интеграла и дали первоначальное определение этих понятий.

Теперь укажем иной, куда более древний подход к интегралу, который послужил основным первоначальным источником интегрального исчисления и привел к понятию определенного интеграла или интеграла в собственном смысле этого слова. Этот подход четко прослеживается уже у древнегреческого математика и астронома Евдокса Книдского (примерно 408–355 до н. э.) и *Архимеда*, т. е. он возник задолго до появления дифференциального исчисления и операции дифференцирования.



Вопрос, который рассматривали Евдокс и Архимед, создав при его решении «метод исчерпывания», предвосхитивший понятие интеграла,– это вопрос о вычислении площади криволинейной фигуры. Ниже мы рассмотрим этот вопрос, а пока поставим, вслед за И. *Ньютоном*, следующую задачу: по известной в любой момент t из промежутка времени $a \leqslant t \leqslant b$ скорости $v(t)$ тела найти величину перемещения тела за этот промежуток времени.

Если бы был известен закон движения, т. е. зависимость координаты тела от времени, то ответ, очевидно, выражался бы разностью $s(b) - s(a)$. Более того, если бы мы знали какую-либо первообразную $\tilde{s}(t)$ функции $v(t)$ на промежутке $[a; b]$, то, поскольку $\tilde{s}(t) = s(t) + C$, где C – постоянная, можно было бы найти искомую величину перемещения в виде разности $\tilde{s}(b) - \tilde{s}(a)$, которая совпадает с разностью $s(b) - s(a)$. Это очень полезное наблюдение, однако если первообразную данной функции $v(t)$ указать не удается, то действовать приходится совсем иначе.

Будем рассуждать следующим образом.

Если промежуток $[a; b]$ отдельными моментами $t_0, t_1, \ldots, t_n$, такими, что $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, разбить на очень мелкие временны́е промежутки $[t_{i-1}; t_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то на каждом из этих коротких промежутков скорость $v(t)$ тела не успевает заметно измениться. Фиксировав произвольно момент $\tau_i \in [t_{i-1}; t_i]$, можно таким образом приближенно считать, что на промежутке времени $[t_{i-1}; t_i]$ движение происходит с постоянной скоростью $v(\tau_i)$. В таком случае для величины пути, пройденного за промежуток времени $[t_{i-1}; t_i]$, получаем приближенное значение $v(\tau_i) \cdot \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Складывая эти величины, получаем приближенное значение

$$v(\tau_1) \cdot \Delta t_1 + v(\tau_2) \cdot \Delta t_2 + \ldots + v(\tau_n) \cdot \Delta t_n \quad (4)$$

для всего перемещения на промежутке $[a; b]$.

Найденное приближенное значение тем точнее, чем более мелкое разбиение промежутка $[a; b]$ мы произведем, т. е. чем меньше будет величина Δ наибольшего из промежутков $[t_{i-1}; t_i]$, на которые разбит промежуток $[a; b]$.

Значит, искомая нами величина перемещения есть *предел*

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i) \cdot \Delta t_i \quad (5)$$

сумм вида (4), когда величина Δ стремится к нулю.

Суммы специального вида (4) называются интегральными суммами для функции $v(t)$ на промежутке $[a; b]$, а их предел (5), полу-

чаемый при неограниченном мельчании разбиений, называется интегралом (или определенным интегралом) от функции $v(t)$ на промежутке $[a;b]$. Интеграл обозначается символом

$$\int_a^b v(t)\,dt,$$

в котором числа a, b называются пределами интегрирования, причем a – нижним, а b – верхним пределом интегрирования; функция $v(t)$, стоящая под знаком $\int$ интеграла, называется подынтегральной функцией; $v(t)\,dt$ – подынтегральным выражением; t – переменной интегрирования.

Итак, по определению,

$$\int_a^b v(t)\,dt = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\cdot\Delta t_i. \qquad (6)$$

Значит, искомая величина перемещения тела за временной промежуток $[a;b]$ при известной скорости $v(t)$ движения выражается интегралом (6) от функции $v(t)$ по промежутку $[a;b]$.

Сопоставляя этот результат с тем, который на языке первообразной был указан в начале рассмотрения этого примера, приходим к знаменитому соотношению:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a), \qquad (7)$$

если $v(t) = s'(t)$. Равенство (7) называется формулой Ньютона – Лейбница. В левой его части стоит понимаемый как предел (6) интеграл, а в правой – разность значений (в концах b и a промежутка интегрирования) функции $s(t)$, первообразной подынтегральной функции $v(t)$. Таким образом, формула Ньютона – Лейбница связывает интеграл (6) и первообразную. Этой формулой можно, следовательно, пользоваться в двух противоположных направлениях: вычислять интеграл, найдя первообразную, или получать приращение первообразной, найдя из соотношения (6) интеграл. Мы увидим ниже, что оба эти направления использования формулы Ньютона – Лейбница весьма важны.

Интеграл (6) и формула (7) в принципе решают поставленную в нашем примере задачу. Так, если $v(t) = gt$ (как это имеет место в случае свободного падения, начинающегося из состояния покоя, т. е. с $v(0) = 0$), то, найдя первообразную $s(t) = gt^2/2 + C$ функции $v(t) = g\cdot t$ по формуле (7), получаем величину

$$\int_a^b gt\,dt = gb^2/2 - ga^2/2$$

перемещения за время, прошедшее от момента a до момента b.

На основе разобранной только что физической задачи, приведшей нас к интегралу и формуле Ньютона – Лейбница, обобщая сделанные наблюдения, можно теперь сказать, что если на некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ задана функция $f(x)$, то, разбивая промежуток $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, составляя интегральные суммы

$$f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\cdot\Delta x_n, \qquad (4')$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, и переходя

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (1707–1783)



Эйлер, крупнейший математик XVIII в., родился в Швейцарии. В 1727 г. по приглашению Петербургской академии наук он приехал в Россию. В Петербурге Эйлер попал в круг выдающихся ученых: математиков, физиков, астрономов, получил большие возможности для создания и издания своих трудов. Он работал с увлечением и вскоре стал, по единодушному признанию современников, первым математиком мира.

Научное наследие Эйлера поражает своим объемом и разносторонностью. В списке его трудов более 800 названий. Полное собрание сочинений ученого занимает 72 тома. Среди его работ – первые учебники по дифференциальному и интегральному исчислению.

В теории чисел Эйлер продолжил деятельность французского математика *П. Ферма* и доказал ряд утверждений: малую теорему Ферма, великую теорему Ферма для показателей 3 и 4 (см. *Ферма великая теорема*). Он сформулировал проблемы, которые определили горизонты теории чисел на десятилетия.

Эйлер предложил применить в теории чисел средства математического анализа и сделал первые шаги по этому пути. Он понимал, что, двигаясь дальше, можно оценить число простых чисел, не превосходящих n, и наметил утверждение, которое затем докажут в XIX в. математики П. Л. Чебышев и Ж. Адамар.

Эйлер много работает в области математического анализа. Здесь он постоянно пользуется *комплексными числами*. Его имя носит формула $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, устанавливающая связь тригонометрических и показательной функций, возникающую при использовании комплексных чисел.

Ученый впервые разработал общее учение о логарифмической функции, согласно которому все комплексные числа, кроме нуля, имеют логариф-

к пределу при $\Delta \to 0$, где $\Delta = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$, мы получаем по определению интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i \qquad (6')$$

от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$. Если при этом $F'(x) = f(x)$ на $[a;b]$, т.е. $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, то имеет место формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (7')$$

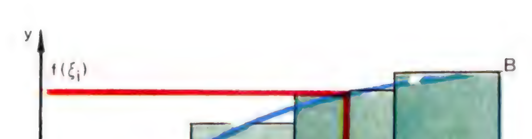
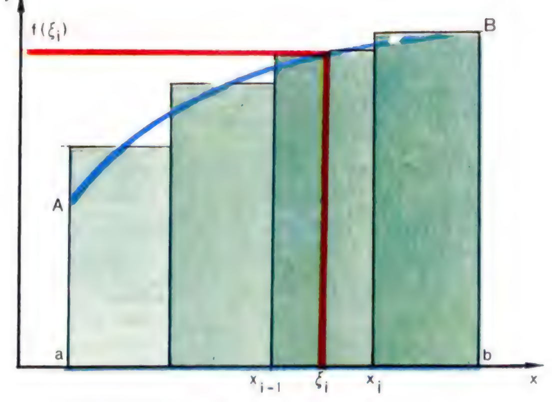
Итак, определены важнейшие понятия интегрального исчисления и получена формула Ньютона – Лейбница, связывающая интегрирование и дифференцирование.

Подобно тому как в дифференциальном исчислении к понятию производной вела не только задача определения мгновенной скорости движения, но и задача проведения касательной, так в интегральном исчислении к понятию интеграла приводит не только физическая задача определения пройденного пути по заданной скорости движения, но и многие другие задачи, и в их числе древние геометрические задачи о вычислении площадей и объемов.

Пусть требуется найти площадь S изображенной на рис. 1 фигуры $aABb$ (называемой криволинейной трапецией), верхняя «сторона» AB которой есть график заданной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$. Точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ разобьем отрезок $[a;b]$ на мелкие отрезки $[x_{i-1}; x_i]$, в каждом из которых фиксируем некоторую точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Площадь узкой криволинейной трапеции, лежащей над отрезком $[x_{i-1}; x_i]$, заменим приближенно площадью $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ соответствующего прямоугольника с основанием $[x_{i-1}; x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$. В таком случае приближенное значение площади S всей фигуры $aABb$ даст знакомая нам интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, а точное значение искомой площади S получится как предел таких сумм, когда длина Δ наибольшего из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ разбиения стремится к нулю. Таким образом, получаем:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (8)$$

Рис. 1

Попробуем теперь вслед за Архимедом выяснить, в каком отношении парабола $y = x^2$ делит площадь изображенного на рис. 2 единичного квадрата. Для этого попросту вычислим, исходя из формулы (8), площадь S ниж-

мы, причем каждому числу соответствует бесчисленное множество значений логарифма.

В геометрии Эйлер положил начало совершенно новой области исследований, выросшей впоследствии в самостоятельную науку – *топологию*.

Имя Эйлера носит формула, связывающая число вершин (В), ребер (Р) и граней (Г) выпуклого многогранника: В – Р + Г = 2.

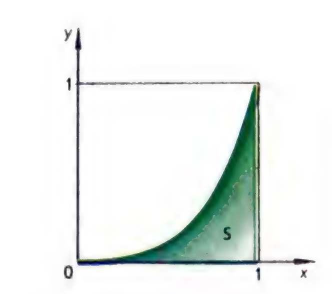
Даже основные результаты научной деятельности Эйлера трудно перечислить. Здесь и геометрия кривых и поверхностей, и первое изложение вариационного исчисления с многочисленными новыми конкретными результатами. У него были труды по гидравлике, кораблестроению, артиллерии, геометрической оптике и даже по теории музыки. Он впервые дает аналитическое изложение механики вместо геометрического изложения Ньютона, строит механику твердой точки или твердой пластины.

Одно из самых замечательных достижений Эйлера связано с астрономией и небесной механикой. Он построил точную теорию движения Луны с учетом притяжения не только Земли, но и Солнца. Это пример решения очень трудной задачи.

Последние 17 лет жизни Эйлера были омрачены почти полной потерей зрения. Но он продолжал творить так же интенсивно, как в молодые годы. Только теперь он уже не писал сам, а диктовал ученикам, которые проводили за него наиболее громоздкие вычисления.

Для многих поколений математиков Эйлер был учителем. По его математическим руководствам, книгам по механике и физике училось несколько поколений. Основное содержание этих книг вошло и в современные учебники.

Рис. 2



него параболического треугольника. В нашем случае $[a;b]=[0;1]$ и $f(x)=x^2$. Нам известна первообразная $F(x)=x^3/3$ функции $f(x)=x^2$, значит, можно воспользоваться формулой (7′) Ньютона – Лейбница и без труда получить

$$S=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, парабола делит площадь квадрата в отношении 2 : 1.

При обращении с интегралами, особенно применяя формулу Ньютона – Лейбница, можно пользоваться общими свойствами неопределенного интеграла, которые названы в начале статьи. В частности, правило замены переменной в неопределенном интеграле при условии, что $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, с учетом формулы Ньютона – Лейбница позволяет заключить, что

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=$$
$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

и таким образом, получается очень полезная формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (9)$$

С помощью интегралов вычисляют также объемы тел. Если изображенную на рис. 1 криволинейную трапецию $aABb$ вращать вокруг оси Ox, то получится тело вращения, которое приближенно можно считать составленным из узких цилиндров (рис. 3), полученных при вращении соответствующих прямоугольников. Сохраняя прежние обозначения, записываем объем каждого из этих цилиндров в виде $\pi f^2(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ (произведение площади $\pi f^2(\xi_i)$ основания на высоту Δx_i). Сумма $\pi f^2(\xi_1)\cdot\Delta x_1+\pi f^2(\xi_2)\cdot\Delta x_2+\ldots+\pi f^2(\xi_n)\cdot\Delta x_n$ дает приближенное значение объема V рассматриваемого тела вращения. Точное значение V получится как предел таких сумм при $\Delta\to 0$. Значит,

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (10)$$

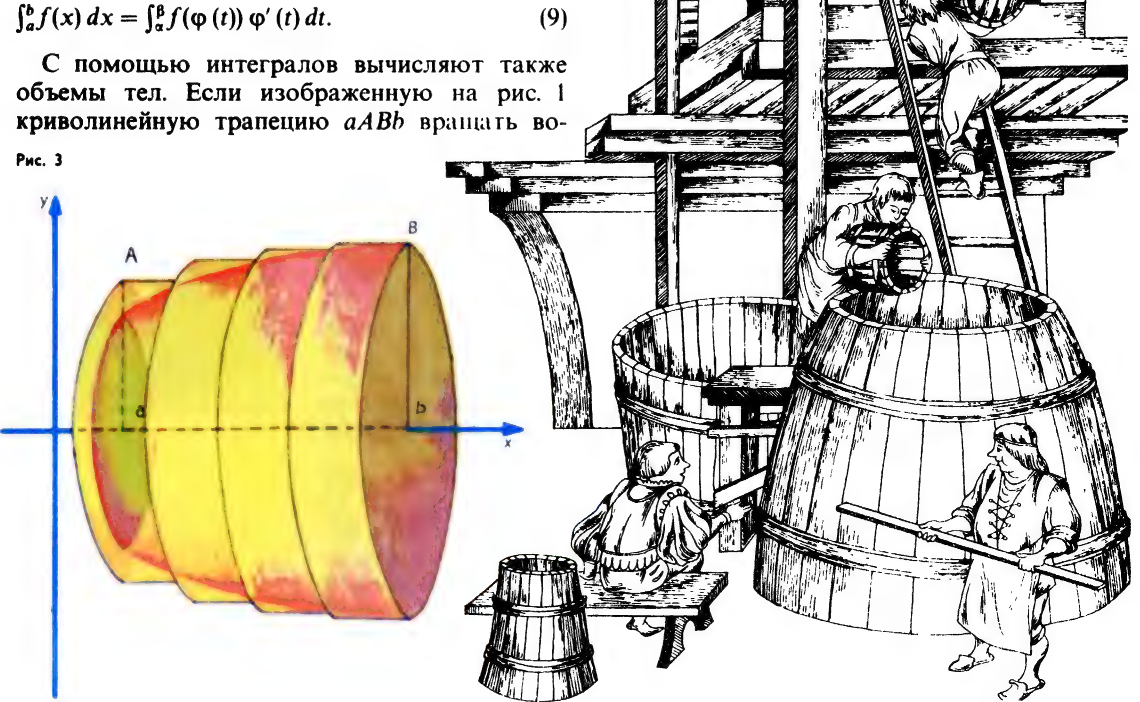
В частности, чтобы вычислить объем изображенного на рис. 4 конуса, достаточно положить в формуле (10) $a=0$, $b=h$ и $f(x)=kx$, где k – угловой коэффициент вращаемой прямой. Найдя первообразную $k^2x^3/3$ функции $f^2(x)=k^2x^2$ и воспользовавшись формулой Ньютона – Лейбница, получаем

$$V=\pi\int_0^h k^2x^2dx=\pi(k^2h^3/3-k^2 0^3/3)=$$
$$=\pi(kh)^2\,h/3=Sh/3,$$

где $S=\pi(kh)^2$ – площадь круга, лежащего в основании конуса.

В разобранных примерах мы исчерпывали

Рис. 3



«Поскольку бочки связаны с кругом, конусом и цилиндром – фигурами правильными, тем самым они поддаются геометрическим изменениям».

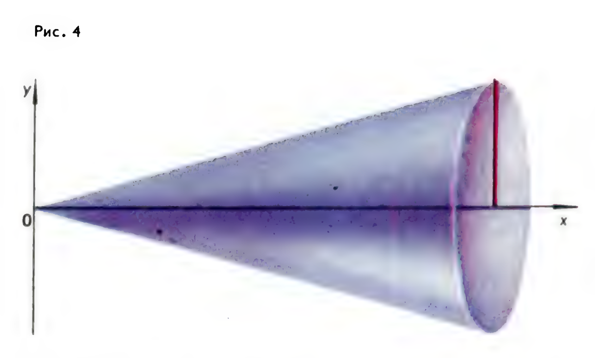
И. Кеплер

Смысл – там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!

В. Я. Брюсов



Рис. 4



геометрическую фигуру такими фигурами, площади или объемы которых могли вычислить, а затем делали предельный переход. Этот прием, идущий от Евдокса и развитый Архимедом, называется методом исчерпывания. Это наиболее распространенный метод рассуждений в большинстве применений интеграла.

В качестве еще одного примера рассмотрим вполне конкретный «космический» вопрос.

Мы хотим вычислить скорость v, до которой нужно разогнать тело (ракету), чтобы затем оно, удаляясь по инерции от планеты вдоль радиуса, уже никогда не было возвращено притяжением планеты назад. Эта скорость называется второй космической, в отличие от первой космической, которую должен иметь спутник, выходящий на орбиту у поверхности планеты.

Пусть m – масса тела, M – масса планеты. Кинетической энергии $mv^2/2$, которой следует наделить тело для выхода из поля притяжения планеты, должно хватить, чтобы совершить работу против силы тяготения. Величина этой силы на расстоянии r от центра планеты по открытому Ньютоном закону всемирного тяготения равна

$$G\frac{mM}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная. Таким образом, эта сила меняется, причем ослабевает по мере удаления от планеты.

Вычислим работу $A_{R_0}^R$, которую нужно совершить, чтобы тело, находящееся на высоте R_0 (считая от центра планеты), поднять на высоту R.

Если бы сила была постоянна, то мы просто умножили бы ее величину на длину $R - R_0$ пройденного вдоль направления ее действия пути и нашли бы совершенную работу. Но сила меняется, поэтому мы разобьем весь промежуток $[R_0; R]$ точками $R_0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_n = R$ на маленькие промежутки, в пределах которых изменением силы можно пренебречь; найдем приближенно элементарные работы

$$G\cdot\frac{mM}{r_i^2}\cdot(r_i - r_{i-1}) = G\cdot\frac{mM}{r_i^2}\cdot\Delta r_i$$

на каждом из промежутков $[r_{i-1}; r_i]$; сложив элементарные работы

$$G\cdot\frac{mM}{r_1^2}\cdot\Delta r_1 + G\cdot\frac{mM}{r_2^2}\Delta r_2 + \ldots + G\frac{mM}{r_n^2}\cdot\Delta r_n,$$

получим приближенное значение искомой работы $A_{R_0}^R$ на промежутке $[R_0; R]$, а точнее значение $A_{R_0}^R$ выражается, таким образом, сле-

МИХАИЛ ВАСИЛЬЕВИЧ ОСТРОГРАДСКИЙ (1801–1862)



М. В. Остроградский – русский математик, один из основателей петербургской математической школы, академик Петербургской академии наук (1830).

Остроградский учился в Харьковском университете, но не получил свидетельства об его окончании из-за своих антирелигиозных взглядов. Для совершенствования математических знаний ему пришлось уехать во Францию, где под влиянием П. Лапласа, Ж. Фурье, О. Коши и других видных французских математиков он начал исследования в области математической физики.

Основополагающие работы И. Ньютона и Г. В. Лейбница дали математический аппарат для исследования тех проблем механики и астрономии, которые сводились к функциям одного аргумента (времени). Но целый ряд вопросов физики приводил к рассмотрению функций, зависящих от многих переменных. Необходимость решать задачи, касающиеся функций многих переменных, привела к созданию новой области математики, получившей название теории уравнений математической физики. Развивая методы решения таких уравнений, предложенные в частном случае еще в XVIII в., Ж. Фурье свел их решение к разложению функций в ряды по тригонометрическим функциям. Остроградский рассмотрел подобные задачи для тел, имевших более сложную форму, чем изученные Фурье. Еще в своей первой работе, посвященной распространению волн в сосуде цилиндрической формы, он решил задачу, на которую объявила конкурс Парижская академия наук. А в 1828 г.

дующим интегралом:

$$A_{R_0}^{R} = \int_{R_0}^{R} G \frac{mM}{r^2} dr,$$

в котором роль переменной интегрирования играет r. Величины G, m, M постоянны, а функция r^{-2} имеет первообразную $-r^{-1}$, зная которую по формуле Ньютона–Лейбница находим

$$A_{R_0}^{R} = GmM\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right).$$

Если R увеличивать неограниченно, т. е., как говорят, удалять тело на бесконечность, то, переходя к пределу при $R \to \infty$, получаем

$$A_{R_0}^{\infty} = G\frac{mM}{R_0},$$

где ∞ – символ, читаемый «бесконечность». Если в последней формуле считать, что R_0 – радиус планеты, то $A_{R_0}^{\infty}$ будет работой, которую надо совершить против сил тяготения, чтобы тело с поверхности планеты ушло в бесконечность.

Полученное для $A_{R_0}^{\infty}$ выражение можно упростить, если вспомнить другой закон Ньютона $F = ma$, связывающий силу F и вызванное ею ускорение a тела массы m. Свободно падающее на планету тело у ее поверхности имеет ускорение $a = g$, вызванное силой притяжения

$$F = G\frac{mM}{R_0^2},$$

где R_0 – радиус планеты. Значит,

$$G\frac{mM}{R_0^2} = mg,$$

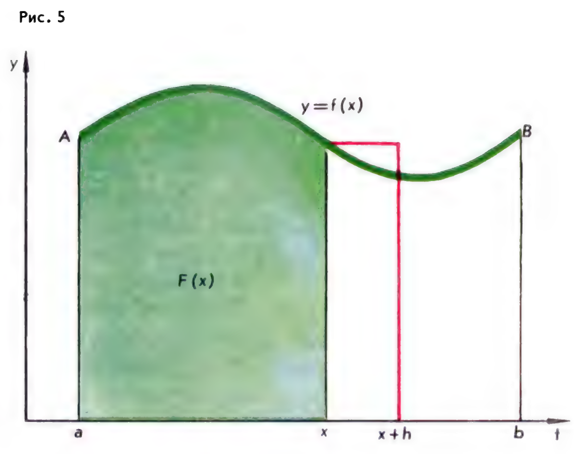


Рис. 5

откуда следует, что

$$G\frac{M}{R_0^2} = g \text{ и, значит, } A_{R_0}^{\infty} = mgR_0.$$

Это и есть формула для подсчета работы, необходимой для выхода из поля притяжения планеты. Для «ухода» с планеты по инерции нужно иметь вертикальную скорость v, при которой кинетическая энергия $mv^2/2$ тела не меньше или, по крайней мере, равна работе $A_{R_0}^{\infty}$, затрачиваемой на преодоление притяжения планеты.

Таким образом, вторая космическая скорость, получаемая из равенства $mv^2/2 = mgR_0$, выражается в виде

$$v = \sqrt{2gR_0}.$$

В частности, для Земли $g \approx 10$ м/с^2, $R_0 \approx 6\,400\,000$ м, поэтому $v \approx 8000 \cdot \sqrt{2}$ м/с, или $v \approx 11{,}2$ км/с.

Во всех разобранных до сих пор примерах мы использовали первообразную, чтобы по

ученый дал общую формулировку метода Фурье и изучил с его помощью колебания газа, упругих пластинок и т. д. М. В. Остроградскому удалось обобщить формулу интегрального исчисления, выведенную в одном частном случае К. Ф. Гауссом.

Физический смысл формулы Гаусса–Остроградского состоит в том, что поток жидкости через замкнутую поверхность тела равен суммарной производительности находящихся внутри нее источников и стоков.

Плодотворно занимался Остроградский теоретической механикой, математическим анализом и т. д. Многие его работы имели прикладную направленность: ученый занимался внешней баллистикой, статистическими методами браковки изделий, участвовал в комиссиях по реформе календаря, по водоснабжению Петербурга. Он был основателем научной школы русских ученых, работавших в области механики и прикладной математики и воспринявших от своего учителя принцип сознательного сочетания теории с практикой.

Много внимания М. В. Остроградский уделял проблемам преподавания математики. Он считал, что главная задача обучения – заинтересовать ребенка, а элементы наук должны излагаться в наиболее доступной и приспособленной к уму ученика форме. Абстрактное же изложение математики отвращает учеников от изучаемой науки. Эти идеи Остроградского легли в основу движения за реформу математического образования в России, начавшегося во второй половине XIX в.

формуле (7') Ньютона–Лейбница вычислить интересовавший нас интеграл. Но та же формула Ньютона–Лейбница наводит на мысль использовать сам интеграл для нахождения первообразной или, по крайней мере, для выяснения принципиального вопроса о ее существовании. Этого вопроса мы уже коснулись в разделе, посвященном первообразной и неопределенному интегралу. Теперь мы рассмотрим его несколько внимательнее.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция f, график которой изображен линией AB на рис. 5. Мы знаем, что площадь всей криволинейной трапеции $aABb$ выражается интегралом (8). Обозначим через $\mathscr{F}(x)$ площадь той ее части, которая лежит над отрезком $[a;x]$. Тогда

$$\mathscr{F}(x)=\int_a^x f(t)\,dt. \qquad (11)$$

Здесь мы обозначили переменную интегрирования через t, чтобы не путать ее с x, являющимся в нашем случае верхним пределом интегрирования.

Величина $\mathscr{F}(x)$, очевидно, зависит от точки $x\in[a;b]$.

Покажем, что $\mathscr{F}(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, т.е. $\mathscr{F}'(x)=f(x)$ при $x\in[a;b]$. В самом деле, как видно из рис. 5,

$$\mathscr{F}(x+h)-\mathscr{F}(x)\approx f(x)\cdot h,$$

что равносильно приближенному равенству

$$\frac{\mathscr{F}(x+h)-\mathscr{F}(x)}{h}\approx f(x).$$

При уменьшении величины h точность этого соотношения только улучшается, поэтому

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathscr{F}(x+h)-\mathscr{F}(x)}{h}=f(x)$$

и, значит,

$$\mathscr{F}'(x)=f(x).$$

Таким образом, интеграл (11) с переменным верхним пределом x дает нам первообразную функции $f(x)$. Среди всех прочих первообразных функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ эта первообразная выделяется очевидным условием $\mathscr{F}(a)=0$. Поскольку интеграл, согласно его определению (6'), можно вычислить с любой наперед заданной точностью, то и значение $\mathscr{F}(x)$ первообразной (11) функции $f(x)$ в любой точке $x\in[a;b]$ можно найти сколь угодно точно, даже не интересуясь при этом аналитической записью $\mathscr{F}(x)$ или вопросом о том, является ли $\mathscr{F}(x)$ элементарной функцией.

Существуют простые и очень эффективные численные методы интегрирования – это так называемые квадратурные формулы. Они позволяют на электронных вычислительных машинах за доли секунды получать значения определенных интегралов. Это обстоятельство делает формулу (11) средством отыскания первообразной. Например, современные подводные лодки порой месяцами находятся на большой глубине и перемещаются на огромные расстояния; не имея никакой связи с внешним миром, они тем не менее выходят в точно заданный квадрат. Навигационное оборудование, которое позволяет определять координаты лодки в любой момент, является технической реализацией формулы (11) и основано на таком физическом принципе. Находясь в закрытом движущемся помещении (хорошо звукоизолированном мягком вагоне, самолете и т.д.), мы не ощущаем скорости движения, но зато определенно чувствуем изменение скорости – ускорение. Оно положительно при увеличении скорости, когда масса вдавливает вас в самолетное кресло, и отрицательно при торможении, когда вам могут пригодиться даже пристяжные ремни. Поскольку между ускорением a массы m и вызывающей его силой F имеется прямая пропорциональная зависимость $F=ma$, величину a укорения можно объективно измерять, закрепив массу m на свободном конце пружинки, расположенной вдоль направления движения, и соединив жестко второй ее конец, например, с задней стенкой движущегося помещения. Если растяжение и сжатие пружины пропорционально действующей на нее силе, то по величине отклонения массы m от положения равновесия можно узнавать величину $a(t)$ ускорения, происходящего в данном направлении в любой момент времени t.

Если движение начиналось с нулевой начальной скоростью, то, зная $a(t)$, можно по формуле (11) найти сначала скорость $v(t)$ движения, а зная $v(t)$, найти и перемещение $s(t)$ в этом направлении к моменту t, поскольку

$$v(t)=\int_0^t a(u)\,du, \quad \text{а} \quad s(t)=\int_0^t v(u)\,du.$$

Обработка показаний приборов и вычисление этих интегралов выполняется электронной вычислительной машиной. Если есть три датчика ускорения, удерживаемых (например, гироскопами) в трех взаимно перпендикулярных направлениях, то вы можете в любой момент знать ваше перемещение по каждому из указанных направлений и тем самым определить все три ваши координаты в некоторой системе координат, началом которой является точка старта – база, аэродром, космодром.

К

КАВАЛЬЕРИ ПРИНЦИП

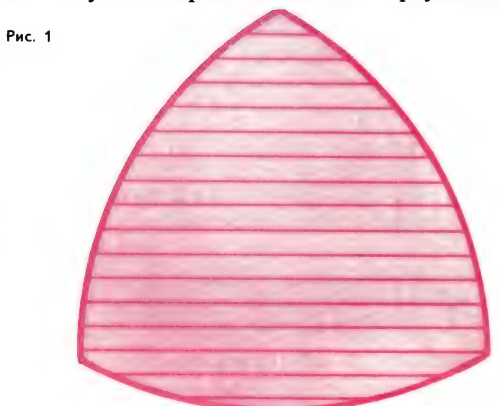
В XVII в. началась эпоха *интегрального исчисления.* Математики возвращались к задачам о вычислении площадей криволинейных фигур и объемов «кривых» тел, которыми так успешно занимался в древности *Архимед.*

Интересовался этим вопросом и итальянский монах Бонавентура Кавальери (1598–1647). Он занимал кафедру математики в Болонском университете. В переписке с астрономом и математиком Г. Галилеем они обсуждали разнообразные механические и математические проблемы, и в частности метод «неделимых». Галилей собирался, но так и не написал книгу об этом методе. В 1635 г. вышла книга Кавальери «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых частей непрерывных величин».

При вычислении площадей многоугольников бывает полезно преобразовывать фигуры, не меняя их площадей, например разрезать на части и составлять новые (см. *Равносоставленные и равновеликие фигуры*). Так можно преобразовать друг в друга треугольники с равными основаниями и высотами.

Можно ли аналогичным образом преобразовывать криволинейные фигуры? Кавальери представляет их себе состоящими из бесконечно тонких параллельных плоских слоев – «неделимых» или «нитей» (рис. 1) и утверждает, что площадь не меняется при сдвигах этих слоев друг относительно друга. Иначе, принцип Кавальери состоит в том, что если пересечь фигуру семейством всех прямых, параллельных заданной, то длины пересечений полностью определят площадь фигуры. В частности, если у двух фигур эти длины совпадают, то они равновелики. Строгого обоснования своего принципа Кавальери не дал, но рассмотрел его многочисленные применения. Например, на основе этого принципа легко получается равновеликость треугольников

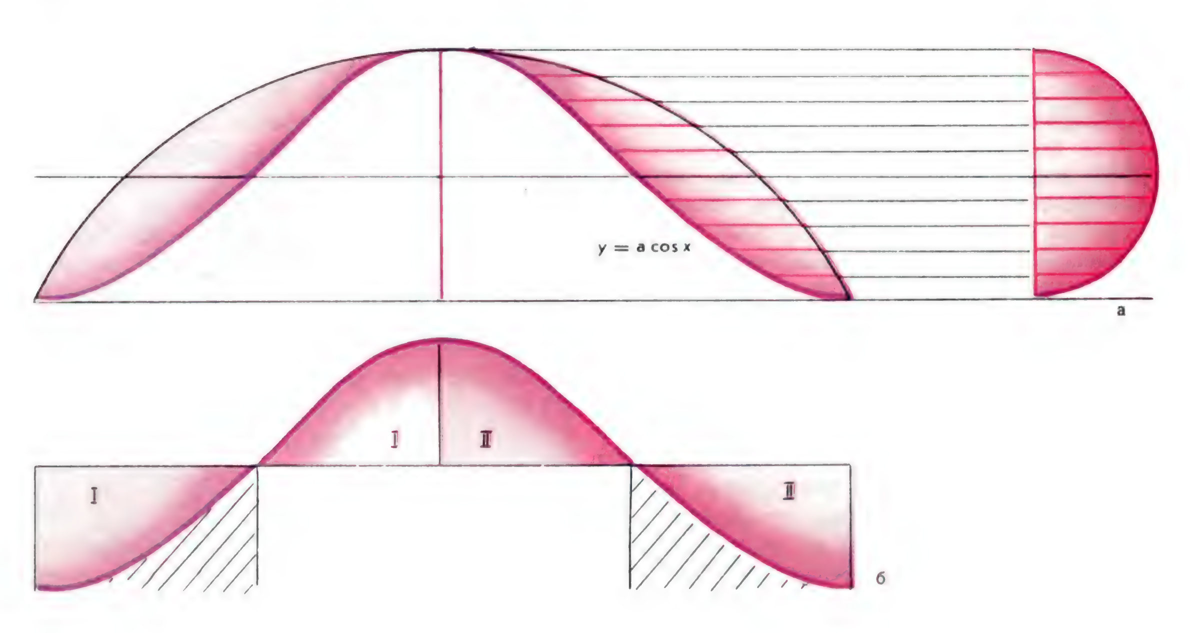
Рис. 1



с равными основаниями и высотами. Одно из самых удивительных применений принципа Кавальери принадлежит французскому математику Ж. Робервалю (1602–1675), который нашел площадь сегмента, ограниченного одной аркой циклоиды (см. *Циклоида*). В каждый момент времени Роберваль проектировал точку, двигающуюся по циклоиде, на вертикальный диаметр катящегося круга. Получалась новая кривая, которую Роберваль назвал спутницей циклоиды (рис. 2, *а*). Но потом выяснилось, что это *синусоида*, и это было первое (1634) появление ее в математике!



Рис. 2



Площадь под аркой синусоиды легко вычисляется при помощи перехода к равносоставленному с ней прямоугольнику площадью 2π (рис. 2, *б*). Каждая из оставшихся двух фигур, которые называли лепестками Роберваля, по принципу Кавальери равновелика вертикальному полукругу, т.е. общая площадь равна 3π.

Еще более эффективен принцип Кавальери при нахождении объемов тел. Он состоит в том, что объем тела определяется площадями его пересечений «всеми плоскостями», параллельными некоторой заданной. Отсюда следует теорема о равновеликости пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами, а эти пирамиды, как правило, не равносоставлены (см. *Равносоставленные и равновеликие фигуры*). На этой теореме основывается формула для объема пирамиды. Очень удобен принцип Кавальери и для получения формул объемов круглых тел, скажем шара. Впишем в круговой цилиндр радиусом r и высотой $2r$ шар. Тело, являющееся дополнением шара до цилиндра, по принципу Кавальери равновелико телу, составленному из двух конусов, построенных на верхнем и нижнем основаниях цилиндра с вершиной в центре шара. Отсюда следует, что $V = 4/3\pi r^3$.

Интегральное исчисление содержит общие методы для вычисления площадей и объемов, причем там, где применение принципа Кавальери требовало нестандартных построений, к успеху приводят стандартные вычисления, и постепенно принцип Кавальери отошел в область истории. Однако, поскольку по принципу Кавальери легко вычисляются все «школьные» объемы и площади, неоднократно предлагалось принять принцип Кавальери в школьной геометрии за *аксиому*. Этот материал можно найти в школьных учебниках.

КАЛЕНДАРЬ

Исчисление времени, казалось бы, не таит в себе никаких проблем. Сутки следуют за сутками, год за годом. Но что такое год? Это время, за которое Земля совершает по своей орбите полный оборот вокруг Солнца. Астрономы подсчитали, что год составляет 365 сут 5 ч 48 мин 46 с или 365,242199 сут. Но пользоваться таким сложным числом очень неудобно. Хотелось бы, чтобы в году было целое число суток. Предположим, что продолжительность года равна 365 дням. Но тогда окончание каждого года приходилось бы всякий раз на новую точку на орбите, отстоящую от предыдущей на величину, которую Земля проходит примерно за 6 ч. Какой же из этого выход? Древнеримские жрецы, ведавшие исчислением времени, произвольно удлиняли некоторые года, чтобы согласовать календарные даты с сезонными явлениями природы. Впервые порядок в счете времени навел в I в. до н.э. римский император Юлий Цезарь. Он постановил считать одни годы по 365 суток, а другие по 366, чередуя их по правилу: три года подряд коротких, четвертый – длинный. Такую систему предложил ему александрийский астроном Созиген, которого Юлий Цезарь пригласил в Рим специально для создания календаря. Гораздо позже, с введением христианского летосчисления, високосным стали считать каждый год, порядковый номер которого делится на 4.

Этот календарь в честь Юлия Цезаря называется юлианским. По нему средняя продолжительность года составляет 365 сут 6 ч, что больше истинной лишь на 11 мин 14 с. Однако и это решение оказалось неудовлетворительным. К XVI в. ошибка, накапливаясь, составила уже около 10 сут.

Следующую реформу календаря провел Григорий XIII – папа римский. Он создал специальную комиссию для разработки системы, по которой весеннее равноденствие выпадало бы на 21 марта и впредь больше не отставало от этой даты. Решение папы Григория XIII было вызвано трудностями использования юлианского календаря при расчетах дат церковных праздников. Решение комиссии, утвержденное Григорием XIII в 1582 г., было достаточно простым: сдвинуть числа на 10 дней, оставить чередование простых и високосных лет, при этом решили, что если порядковый номер года оканчивается двумя нулями, но число сотен не делится на 4, то этот год простой. Например, по этому правилу 1900 год – простой, а 2000 – високосный. В настоящее время расхождение между юлианским и новым, григорианским календарями составляет 13 дней, поскольку с тех пор накопилось еще три дня (в 1700, 1800 и 1900 гг.). Григорианский календарь был введен в Европе в XVI–XVII вв., в России же до Великой Октябрьской революции продолжали пользоваться юлианским календарем, или как сейчас говорят, исчислением «по старому стилю». Григорианский календарь был введен в 1918 г. декретом Советского правительства, причем 1 февраля стали считать 14 февраля. Из 400 лет по юлианскому календарю 100 високосных, а по григорианскому – 97, поэтому продолжительность григорианского года составляет

$$365\frac{97}{400}, \quad \text{или } 365{,}2425 \text{ сут},$$

т.е. 365 сут 5 ч 49 мин 12 с, т.е. она больше истинной лишь на 26 с. Полученная точность

Голландский календарь (Лейден. 1516)



Астроном и математик XVII в Христоф Клавий, член комиссии по созданию григорианского календаря.



очень велика и вполне достаточна для практических нужд.

Интересная система календаря была предложена среднеазиатским математиком и поэтом Омаром Хайямом (ок. 1048–1122), по ней високосными годами должны были считаться 8 лет из каждых 33. Продолжительность года по О. Хайяму составляет

$$365\frac{8}{33} \text{ сут},$$

его погрешность всего 19 с в год. В 1864 г. русский астроном И. Медлер предложил с XX столетия ввести в России следующую поправку к юлианскому календарю: через каждые 128 лет пропускать один високосный год из 32, которые выпадают на этот период. Этот календарь самый точный из всех перечисленных.

Средняя продолжительность года по этому календарю составляет $365\frac{31}{128}$ сут, или 365 сут 5 ч 48 мин 45 с. Здесь погрешность сокращается всего до 1 с. Однако календарь И. Медлера не был принят, видимо, из-за того, что период в 128 лет не является «круглым» числом.

Рассмотренные выше системы календаря оказываются связанными с записью продолжительности астрономического года в виде цепной дроби:

$$365{,}242199 = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{12}}}}}}}}$$

Год продолжительностью 365 сут – это нулевая подходящая дробь этой цепной дроби, $365\frac{1}{4}$ – юлианский год – первая подходящая дробь, $365\frac{7}{29}$, $365\frac{8}{33}$ и $365\frac{31}{128}$ – вторая, третья и четвертая подходящие дроби, а именно:

$$365\frac{7}{29} = 365 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{7}}$$

$$365\frac{8}{33} = 365 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{7 + 1}}$$

$$365\frac{31}{128} = 365 \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

Системой, соответствующей второй подходящей дроби: семь високосных лет из 29, никто не предложил воспользоваться, видимо, потому, что третья подходящая дробь не намного сложнее, а точность ее гораздо больше (вспомним, что это система О. Хайяма), а четвертой подходящей дроби соответствует система И. Медлера.

Кроме смены времен года и времени суток на Земле есть еще один постоянный периодический процесс – смена фаз Луны, который породил разбиение года на 12 месяцев. Мусульманский лунный календарь, действующий до настоящего времени во многих арабских странах, основан на этом явлении. Количество дней в месяце выбирается так, чтобы первое число месяца совпадало с новолунием, поэтому в лунном календаре год состоит из 12 лунных месяцев по 29 или 30 дней, а продолжительность года составляет 354 или 355 сут, что на 10 сут короче астрономического года. Заметим, что смена фаз Луны происходит через 29,5306 сут, что плохо связывается не только с продолжительностью года, но и продолжительностью суток.

Еще одна единица времени – неделя (в ней, по определению, 7 сут). Приведем формулу, позволяющую вычислить день недели для произвольной даты:

$$\left(d + \left[\frac{1}{5}(13m - 1)\right] + Y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] - 2c\right) \bmod 7.$$

Здесь d – число месяца, m – номер месяца, если начинать счет с марта, как это делали в Древнем Риме (март – 1, апрель – 2, ..., январь – 11, февраль – 12), Y – номер года в столетии, c – количество столетий.

Число, заключенное в квадратные скобки $[x]$, читается «целая часть от x» и означает наибольшее целое число, не превосходящее числа x. Так, $[2{,}57] = 2$, $[3] = 3$. Значок mod7 означает, что от числа, стоящего перед ним, нужно взять его остаток от деления на 7 (см. *Сравнения*). Если в результате получилось число 1, то соответствующий день – понедельник, 2 – вторник, 3 – среда, 4 – четверг, 5 – пятница, 6 – суббота и 0 – воскресенье.

В последнее время было много различных предложений по реформе календаря с изменением длительности недель и месяцев, при которых в каждом месяце было бы одинаковое количество недель, но по разным причинам они не были приняты.

КАЛЬКУЛЯТОРЫ ЭЛЕКТРОННЫЕ

Бурное развитие *вычислительной техники* в последние десятилетия привело к появлению небольших вычислительных машин – микрокалькуляторов. Их создание стало возможным после появления микросхем, способных заменить сотни полупроводниковых элементов ЭВМ.

Эти изящные машинки сделали ненужными логарифмические линейки, бухгалтерские счеты, толстые тома таблиц разнообразных функций.

В нашей стране выпускаются десятки модификаций микрокалькуляторов. Классифицировать их можно по разным признакам: по назначению – для школьников, продавцов, инженеров, научных работников; по функциональному устройству – без регистров памяти, с небольшим их количеством, программируемые; по логической структуре – с арифметической логикой, с алгебраической логикой, с алгебраической логикой и иерархией операций, с алгебраической логикой и скобками, с обратной бесскобочной (польской) записью операций.

У микрокалькулятора с арифметической логикой отсутствует клавиша со знаком $\boxed{=}$, она совмещена с клавишей $\boxed{+}$, а также с клавишей – $\boxed{\overset{+}{=}}$ $\boxed{\overset{-}{=}}$

Операция 8–3 на калькуляторе с арифметической логикой производится в следующем порядке: $\boxed{8}$ $\boxed{\overset{+}{=}}$ $\boxed{3}$, а в микрокалькуляторе с алгебраической логикой так: $\boxed{8}$ $\boxed{-}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$. Клавиша $\boxed{=}$ в нем обязательно присутствует.

В калькуляторах с иерархией операций в первую очередь производятся операции умно-

В школах на уроках информатики ребята приобретают навыки работы с компьютерами



жения и деления, а потом уже сложения и вычитания. Так, если вы последовательно нажимаете клавиши со знаками $1 \times 9 + 8 \times 9 =$, то в калькуляторах без иерархии операций получите $(1 \cdot 9 + 8) \cdot 9 = 153$, а в тех, которые имеют эту иерархию,– $(1 \cdot 9) + (8 \cdot 9) = 81$.

Калькуляторы с клавишами для расстановки скобок позволяют производить операции в заданной последовательности. Пар скобок может быть одна или несколько.

Калькуляторы, предназначенные для инженеров и научных работников, имеют клавиши для вычисления различных функций.

Причем, чтобы сильно не увеличивать количество клавиш, каждую клавишу используют для выполнения двух, а иногда и трех, операций. В таком случае имеется специальная клавиша [F] для перехода от одной функции к другой. Как правило, для вычисления функции от заданного аргумента сначала набирают аргумент, а потом нажимают клавишу нужной функции. Так, для вычисления $\sqrt{1989}$ клавиши нажимают в таком порядке: 1 9 8 9 $\sqrt{\ }$. Любопытно, что, набрав произвольный аргумент в радианах и затем многократно нажимая клавишу для функции косинус, мы в конце концов придем к числу 0,7390851..., которое потом будет повторяться при дальнейших нажатиях на эту клавишу. Что это за число? Оказывается, что оно является решением уравнения $\cos x = x$, а мы его получили методом последовательных приближений.

Во всех калькуляторах, независимо от логической структуры, имеется по крайней мере два регистра: регистр ввода (и индексации) X и операционный регистр Y. При выполнении арифметических операций происходит следующая процедура. Первое набираемое число попадает в регистр ввода и одновременно появляется на индикаторе. При нажатии на операционную клавишу оно переносится и в регистр Y. В результате в обоих разрядах находится одно и то же число. Если теперь ввести второе число, то оно появится в регистре X (и на индикаторе), а в регистре Y останется первое число. Если теперь нажать одну из клавиш со знаками +, −, ×, ÷, =, то в регистре X (и на индикаторе) появится результат первой операции, а в регистре Y окажется второе число, и т. д.

Если же вычисляется функция одного переменного ($\sqrt{\ }$, sin, ln и т. д.), то она вычисляется для аргумента, находящегося в регистре X (и на индикаторе), а содержание регистра Y при этом не меняется. Если же вычисляется функция y^x, то число y вводится первым и при вычислении будет находиться в регистре Y, а число x – в регистре Y.

Кроме этих регистров в микрокалькуляторах часто бывают дополнительные ячейки – регистры памяти, в которых можно запоминать результаты промежуточных вычислений или необходимые константы.

Дальнейшее увеличение количества ячеек памяти дает возможность вводить в микрокалькулятор целые программы вычислений, как в больших ЭВМ. Такие калькуляторы называются программируемыми. В ряде моделей такие программы записываются на специальном языке, и в таких калькуляторах можно программировать уже на обычном для ЭВМ алгоритмическом языке «Бейсик», правда несколько урезанном. Программируемые калькуляторы можно подключать к дисплеям (или телевизорам) и печатающим устройствам.

КАСАТЕЛЬНАЯ

Понятие касательной – одно из важнейших в математическом анализе. Изучение прямых, касательных к кривым *линиям*, во многом определило пути развития математики.

С помощью циркуля и линейки нетрудно построить касательную к окружности в данной ее точке. Несколько труднее провести общую касательную к двум окружностям. В Древней Греции умели строить с помощью циркуля и линейки касательные ко всем *коническим сечениям: эллипсам, гиперболам и параболам*, что свидетельствует о высоком уровне развития геометрии в то время.

Интерес к касательным не ослабевал и у математиков последующих поколений. В XVII в. французские ученые *Р. Декарт* и *П. Ферма* исследовали касательные к *спиралям* и *циклоиде*. (Заметим, что модель касательной к циклоиде можно наблюдать в дождливую погоду: циклоида – кривая, являющаяся траекторией точки на ободе катящегося колеса (рис. 1). По такой траектории движутся и капли воды, находящиеся на колесе, а оторвавшись от колеса, они продолжают двигаться уже по касательной к циклоиде (а не к окружности – ободу колеса). Такие капли образуют грязную полосу на спине велосипедиста-гонщика, мчащегося по шоссе в сырую погоду).

Р. Декарт на задаче построения касательных к кривым отрабатывал свой аналитический метод в геометрии. Продолжая исследования Декарта, связанные с построением касательных с помощью аналитического метода, Г. В. *Лейбниц* одновременно с И. *Ньютоном* пришел к открытию *дифференциального исчисления*, явившемуся революцией в развитии математики. Понятие производной функции тесно связано с построением касательной к графику этой функции: значение производной в некоторой точке есть тангенс угла наклона касательной в этой точке к оси абсцисс.

Как все основные понятия дифференциального исчисления, понятие касательной строго определяется лишь с помощью предельного перехода (см. *Предел*). Касательная к кривой в точке M определяется как предельное положение секущей MN при приближении точки

Рис. 1



Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

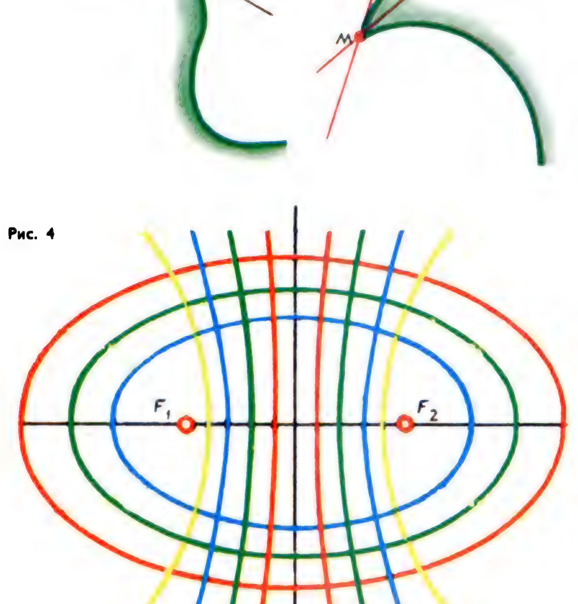
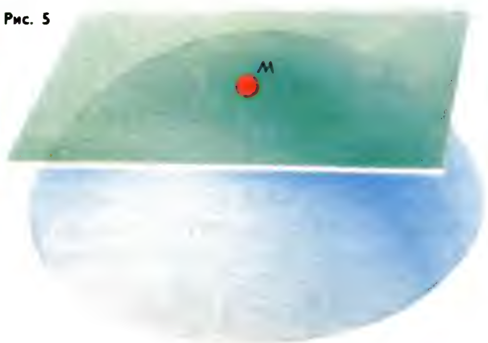


Рис. 5



N по кривой к точке M (рис. 2). Нетрудно понять, что у непрерывных кривых могут быть точки, в которых касательная отсутствует (рис. 3), но чрезвычайно трудно представить себе, что существуют такие непрерывные кривые, которые не имеют касательных ни в одной своей точке.

Первые примеры таких функций были указаны чешским ученым Б. Больцано (1830 г., опубликовано в 1930 г.) и немецким математиком К. Вейерштрассом (1860 г., опубликовано в 1872 г.). Естественно, что функции, графиками которых являются кривые без касательных, не имеют производных ни в одной из своих точек, так как у функции $f(x)$, имеющей в точке x_0 производную, касательная к ее графику в этой точке существует и записывается уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Понятие касательной применяется и для определения угла между кривыми в точке их пересечения. За такой угол принимается угол между касательными к кривым в этой точке. На рис. 4 изображено два семейства кривых – эллипсы и гиперболы, фокусы которых находятся в заданных точках F_1 и F_2. Любые две кривые разных семейств здесь пересекаются под прямым углом. Такая картина часто встречается в физике, в частности эти кривые являются линиями равной напряженности и равного потенциала, если в точках F_1 и F_2 находятся заряды разного знака.

Аналогично касательной к кривой определяется касательная плоскость к поверхности (рис. 5), она играет по отношению к поверхности ту же роль, что и касательная к кривой.

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Квадратным называют алгебраическое уравнение 2-й степени, т.е. уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0. \quad (1)$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом *квадратного трехчлена* $ax^2 + bx + c$.

Уравнение (1) имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При этом если $D > 0$, то корни действительные и различные, при $D = 0$ корни совпадают (говорят, что уравнение имеет корень кратности два), при $D < 0$ корни комплексные (комплексно сопряженные).

Для приведенного квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

формула корней имеет вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

а для уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ (с четным коэффициентом при x) – вид

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Для коэффициентов и корней квадратного уравнения (1) выполняются соотношения:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a. \end{array}\right\}$$

Эти соотношения называют теоремой Виета, по имени французского математика Ф. Виета (1540–1603).

Особенно удобна эта теорема для приведенного квадратного уравнения:

$$x_1 + x_2 = -p, \ x_1 x_2 = q.$$

Уравнения 2-й степени умели решать еще в Древнем Вавилоне во II тысячелетии до н. э. Математики Древней Греции решали квадратные уравнения геометрически; например, Евклид – при помощи деления отрезка в среднем и крайнем отношениях. Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, рассматриваются во многих древних математических рукописях и трактатах. Приведем задачу из китайского трактата «Математика в девяти книгах» (приблизительно II в. до н. э.).

«Имеется город с границей в виде квадрата со стороной неизвестного размера, в центре каждой стороны находятся ворота. На расстоянии 20 бу (1 бу = 1,6 м) от северных ворот (вне города) стоит столб. Если пройти от южных ворот 14 бу прямо, затем повернуть на запад и пройти еще 1 775 бу, то можно увидеть столб. Спрашивается: какова сторона границы города?» Обозначим сторону квадрата через x. Из подобия треугольников BED и ABC (рис. 1) получим

$$\frac{k}{0{,}5x} = \frac{k + x + l}{d}.$$

Поэтому, чтобы определить неизвестную

Рис. 1

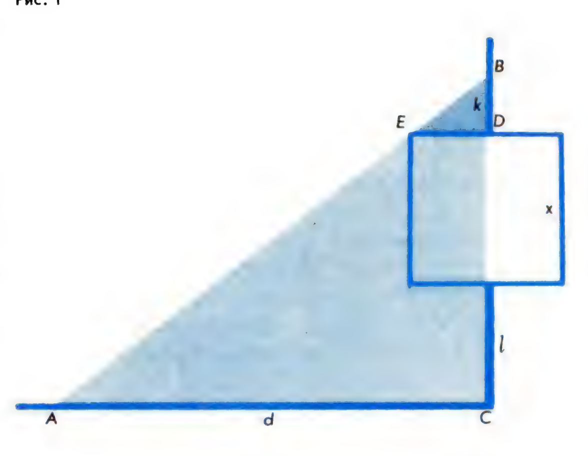
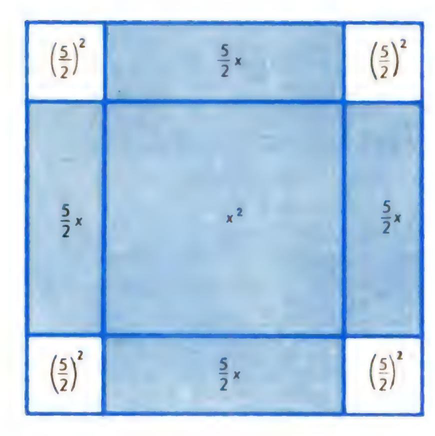


Рис. 2



сторону квадрата, получаем квадратное уравнение

$$x^2 + (k + l)x - 2kd = 0.$$

В данном случае уравнение имеет вид

$$x^2 + 34x - 71\,000 = 0,$$

откуда $x = 250$ (бу).

Отрицательных корней (в данном случае $x = -284$) китайские математики не рассматривали, хотя в этом же трактате содержатся операции с отрицательными числами.

Формула корней квадратного уравнения «переоткрывалась» неоднократно. Один из первых дошедших до наших дней выводов этой формулы принадлежит индийскому математику Брахмагупте (около 598 г.). Среднеазиатский ученый ал-Хорезми (IX в.) в трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» получил эту формулу методом выделения полного квадрата с помощью геометрической иллюстрации. Суть его рассуждений видна из рис. 2 (он рассматривает уравнение $x^2 + 10x = 39$). Площадь большого квадрата равна $(x + 5)^2$. Она складывается из площади $x^2 + 10x$ фигуры, закрашенной голубым цветом, равной левой части рассматриваемого уравнения, и площади четырех квадратов со стороной 5/2, равной 25. Таким образом,

$$(x + 5)^2 = 39 + 25;\ x + 5 = \pm 8;$$

$$x_1 = 3;\ x_2 = -13.$$

К квадратным уравнениям сводятся многие уравнения путем замены переменной.

Приведем некоторые примеры.

1. Биквадратное уравнение

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

сводится к квадратному заменой x^2 переменной y.

2. Уравнение $(x + 1)^2 - 6/(x^2 + 2x) = -4$ заменой $y = x^2 + 2x$ сводится к квадратному уравнению $y^2 + 5y - 6 = 0$, корни которого $y_1 = 1$, $y_2 = -6$. Из двух уравнений $x^2 + 2x = 1$ и $x^2 + 2x = -6$ действительные решения имеет только первое: $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

3. Уравнения

$$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0,\ \cos 2x = \sin x + 1,$$
$$lg^2(x^2) + lg\, x = 1$$

сводятся к квадратным заменами соответственно $y = 2^x$, $y = \sin x$ и $y = lg\, x$.

4. Уравнение

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)$$

сводится к квадратному уравнению заменой $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{x}$ (здесь $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 3\left(\frac{x}{3} + \frac{4}{x}\right)^2 - 8 = 3y^2 - 8$; $3y^2 - 10y - 8 = 0$; $y_1 = -\frac{2}{3}$, $y_2 = 4$).

Из получаемых уравнений

$$\frac{x}{3} + \frac{4}{x} = -\frac{2}{3} \text{ и } \frac{x}{3} + \frac{4}{x} = 4$$

корни имеет только второе: $x = 2(3 \pm \sqrt{6})$. Вообще, замена $y = x + k/x$ – одна из наиболее часто встречающихся замен. Например, с помощью такой замены к квадратному уравнению (после деления обеих частей уравнения на x^2) сводится уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) обычно называют возвратным или обобщенно-симметрическим.

5. Однородные уравнения

$$9^x = 6^x + 2 \cdot 4^x \text{ и } 2\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$$

сводятся к квадратным уравнениям относительно y заменами соответственно $y = (3/2)^x$ и $y = \operatorname{tg} x$ после деления обеих частей первого уравнения на 4^x, второго – на $\cos^2 x$. Для второго уравнения предварительно проверяется, удовлетворяют ли уравнению те значения x, для которых $\cos x = 0$.

6. Уравнение

$$x^4 + (x + 2)^4 = 82,$$

«симметричное» относительно $x + 1$, сводится к биквадратному уравнению $y^4 + 6y^2 = 40$ заменой $y = x + 1$; аналогично уравнение $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40$, «симметричное» относительно $x + 3$, сводится к биквадратному уравнению $(y^2 - 1)(y^2 - 4) = 40$ заменой $y = x + 3$. Отметим, что для второго уравнения годится и замена $y = x^2 + 6x$, тогда $(x + 1)(x + 5) = y + 5$; $(x + 2)(x + 4) = y + 8$.

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Так называют *многочлен*, определяемый формулой $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Числа a, b и c – коэффициенты квадратного трехчлена, они обычно называются: a – старший, b – второй или средний коэффициент, c – свободный



Рис. 1

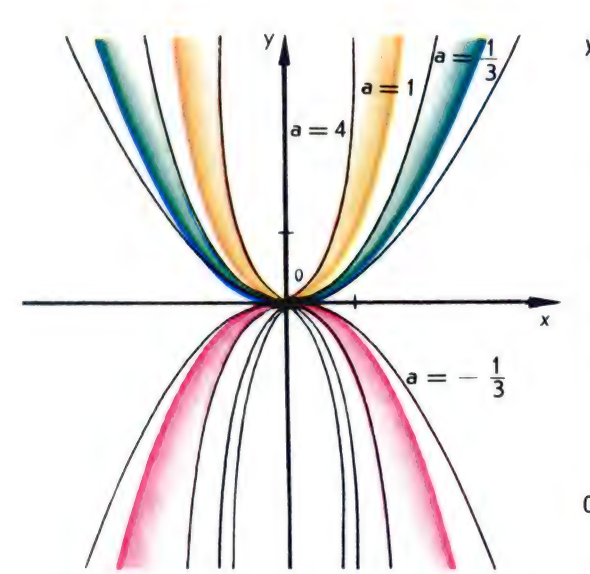


Рис. 2

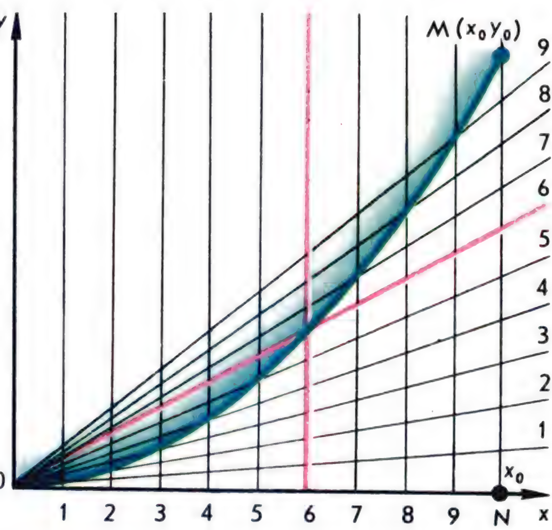
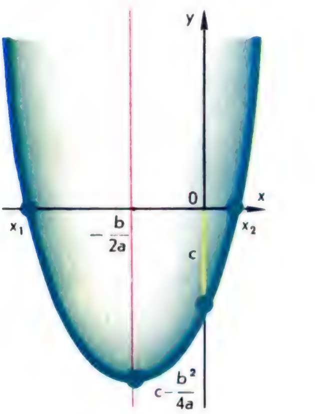


Рис. 3



член. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$ называется квадратичной функцией.

После *линейной функции* квадратичная функция – простейшая и важнейшая *элементарная функция.* Многие физические зависимости выражаются квадратичной функцией; например, камень, брошенный вверх со скоростью v_0, находится в момент времени t на расстоянии

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t$$

от земной поверхности (здесь g – ускорение силы тяжести); количество тепла Q, выделяемого при прохождении тока в проводнике с сопротивлением R, выражается через силу тока I формулой $Q = RI^2$.

Простейший частный случай квадратичной функции есть функция $y = ax^2$. На рис. 1 изображены графики функций $y = ax^2$ при разных значениях a. График функции $y = ax^2$ называется *параболой.*

У всех этих парабол вершина находится в начале координат; при $a > 0$ это наинизшая точка графика (наименьшее значение функции), а при $a < 0$, наоборот, наивысшая точка (наибольшее значение функции). Ось Oy есть ось симметрии каждой из таких парабол.

Как видно, при $a > 0$ парабола направлена вверх, при $a < 0$ – вниз.

Существует простой и удобный графический способ, позволяющий строить любое число точек параболы $y = ax^2$ без вычислений, если известна точка параболы, отличная от вершины. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на параболе $y = ax^2$ (рис. 2). Если мы хотим построить между точками O и M дополнительно еще n точек, то делим отрезок ON оси абсцисс на $n + 1$ равных частей и в точках деления проводим перпендикуляры к оси Ox. На столько же равных частей делим отрезок NM и точки деления соединяем лучами с началом координат. Искомые точки параболы лежат на пересечении перпендикуляров и лучей с одинаковыми номерами (на рис. 2 число точек деления равно 9).

График фукции $y = ax^2 + bx + c$ отличается от графика $y = ax^2$ лишь своим положением и может быть получен просто перемещением кривой на чертеже. Это следует из представления квадратного трехчлена в виде

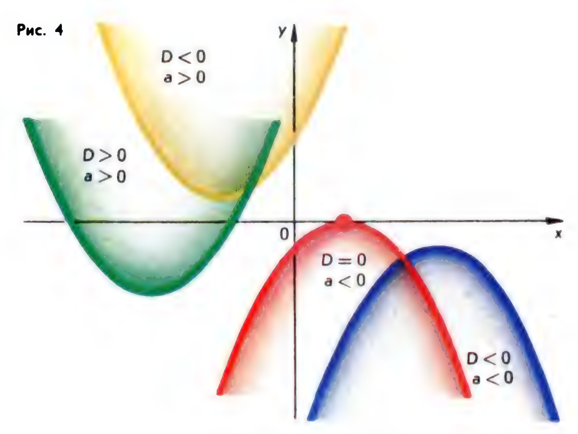
$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

откуда легко заключить, что график функции $y = ax^2 + bx + c$ есть парабола $y = ax^2$, вершина которой перенесена в точку

$$Q\left(-\frac{b}{2a}, \quad -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right),$$

а ось ее симметрии осталась параллельной оси Oy (рис. 3). Из полученного выражения для квадратного трехчлена легко следуют все

Рис. 4



его основные свойства. Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и дискриминантом связанного с ним квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. От знака дискриминанта зависит, пересекает ли график квадратного трехчлена ось абсцисс или лежит по одну сторону от нее. Именно, если $D < 0$, то парабола не имеет общих точек с осью Ox, при этом: если $a > 0$, то парабола лежит выше оси Ox, а если $a < 0$, то ниже этой оси (рис. 4). В случае $D > 0$ график квадратного трехчлена пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2, которые являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и равны соответственно

$$x_1 = \frac{1}{2a}(-b - \sqrt{D}),\ x_2 = \frac{1}{2a}(-b + \sqrt{D}).$$

При $D = 0$ парабола касается оси Ox в точке $x = -\frac{b}{2a}$.

Свойства квадратного трехчлена лежат в основе решения квадратных неравенств. Поясним это на примере. Пусть требуется найти все решения неравенства $3x^2 - 2x - 1 < 0$. Найдем дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства: $D = 16$. Так как $D > 0$, то соответствующее квадратное уравнение $3x^2 - 2x - 1 = 0$ имеет два различных корня, они определяются по формулам, приведенным ранее:

$$x_1 = -\frac{1}{3} \text{ и } x_2 = 1.$$

В рассматриваемом квадратном трехчлене $a = 3 > 0$, значит, ветви его графика направлены вверх и значения квадратного трехчлена отрицательны лишь в интервале между корнями. Итак, все решения неравенства удовлетворяют условию

$$-\frac{1}{3} < x < 1.$$

К квадратным неравенствам могут быть сведены разнообразные неравенства теми же самыми заменами, какими различные уравнения сводятся к квадратному.

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ

Древнегреческие математики достигли чрезвычайно большого искусства в *геометрических построениях* с помощью циркуля и линейки. Однако три задачи не поддавались их усилиям. Прошли тысячелетия, и только в наше время, наконец, были получены их решения.

Вот эти задачи: построение квадрата, равновеликого данному кругу (или, сокращенно, квадратура круга); деление произвольно заданного угла или дуги на три равновеликие части (или трисекция угла), и построение куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба (или удвоение куба).

История нахождения квадратуры круга длилась четыре тысячелетия, а сам термин стал синонимом неразрешимых задач. Как следует из подобия кругов, отношение длины окружности к ее диаметру есть величина постоянная, не зависящая от радиуса круга, она обозначается буквой π. Таким образом, длина окружности круга радиуса r равна $2\pi r$, а так как площадь круга равна $S = \pi r^2$ (см. *Окружность и круг*), то задача о квадратуре круга сводится к задаче построения треугольника с основанием $2\pi r$ и высотой r. Для него потом уже без труда может быть построен равновеликий квадрат (см. *Равновеликие и равносоставленные фигуры*).

Итак, задача сводилась к построению отрезка, длина которого равна длине окружности данного круга. Это было показано еще Архимедом в сочинении «Измерение круга», где он доказывает, что число π меньше чем $3\frac{1}{7}$, но больше чем $3\frac{10}{71}$,

т.е. $3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$.

В наши дни с помощью ЭВМ число π вычислено с точностью до миллиона знаков, что представляет скорее технический, чем научный интерес, потому что такая точность никому не нужна. Десяти знаков числа π ($\pi = 3{,}141592653\ldots$) вполне достаточно для всех практических целей. Долгое время в качестве приближенного значения π использовали число 22/7, хотя уже в V в. в Китае было найдено приближение $355/113 = 3{,}1415929\ldots$, которое было открыто вновь в Европе лишь в XVI в. В Древней Индии π считали равным $\sqrt{10} = 3{,}1622\ldots$. Французский математик Ф. Виет вычислил в 1579 г. π с 9 знаками. Голландский математик Лудольф Ван Цейлен в 1596 г. публикует результат своего десятилетнего труда – число π, вычисленное с 32 знаками.

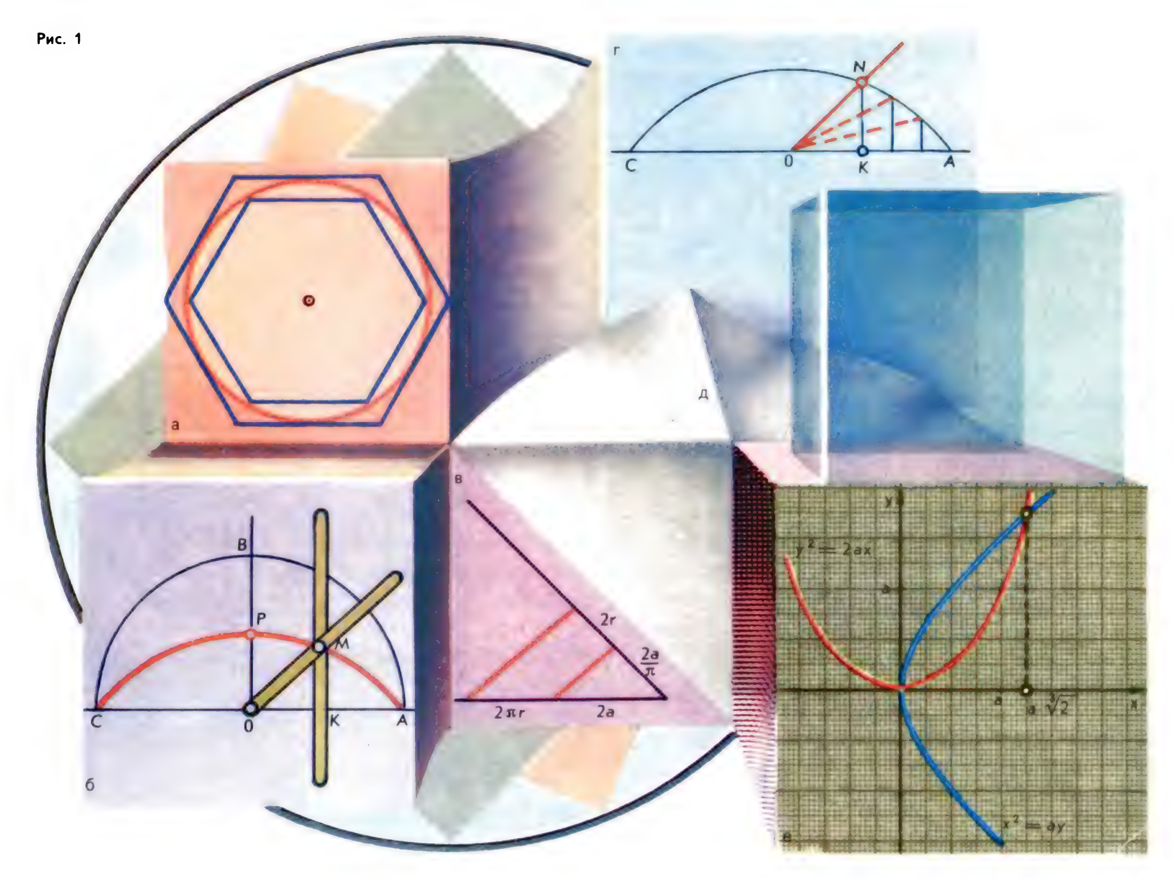
Но все эти уточнения значения числа π производились методами, указанными еще Архи-

«Возьму линейку, проведу прямую,
И мигом круг
квадратом обернется».

Аристофан



Рис. 1



медом: окружность заменялась многоугольником со все бо́льшим числом сторон (рис. 1,а). Периметр вписанного многоугольника при этом был меньше длины окружности, а периметр описанного многоугольника — больше. Но при этом оставалось неясным, является ли число π рациональным, т.е. отношением двух целых чисел, или иррациональным. Лишь в 1767 г. немецкий математик И. Г. Ламберт доказал, что число π иррационально, а еще через сто с лишним лет в 1882 г. другой немецкий математик — Ф. Линдеман доказал его трансцендентность (см. *Число*), что означало и невозможность построения при помощи циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу.

Конечно, способов приближенного решения квадратуры круга с помощью циркуля и линейки было придумано великое множество. Так, в Древнем Египте было распространено правило: площадь круга равна площади квадрата со стороной, равной 8/9; $\pi = 256/81 = 3{,}1604...$.

Были найдены и другие пути определения квадратуры круга: кроме циркуля и линейки использовали другие инструменты или специально построенные кривые. Так, в V в. до н.э. греческий математик Гиппий из Элиды изобрел кривую, впоследствии получившую название квадратрисы Динострата (ее назвали по имени другого древнегреческого математика, жившего несколько позже и указавшего способ построения квадратуры круга при помощи этой кривой).

Квадратриса Динострата получается следующим образом. Пусть дана окружность радиуса a (рис. 1,б). Начнем вращать радиус OA с угловой скоростью $\pi/2$ вокруг точки O – центра окружности – и одновременно равномерно перемещать влево со скоростью a вертикальную прямую от точки A к точке C. Точка M их пересечения и будет описывать квадратрису. Если взять за оси координат прямую OA и прямую OB, то в момент времени t точка M будет иметь координаты

$$a(1-t) \text{ и } a(1-t)\operatorname{tg}\frac{\pi t}{2}.$$

При стремлении t к 1 точка M стремится к точке P, при этом абсцисса точки M стремится к нулю, а у ординаты один множитель стремится к нулю, а другой – к бесконечности. Их произведение будет стремиться к числу $2a/\pi$, поэтому длина отрезка OP равна $2a/\pi$. Следовательно, имеет место соотношение $AC/OP = \pi$.

Пусть теперь дана окружность радиуса r. Тогда имеем соотношение $2\pi r/2r = AC/OP$, в котором известны AC, OP и $2r$ – диаметр данной окружности. По ним мы можем построить отрезок, равный $2\pi r$ – длине окружности, это будет четвертый пропорциональный отрезок к известным трем (рис. 1,в).

Чрезвычайно любопытно, что квадратриса Динострата решает и вторую из знаменитых задач древности – задачу о трисекции угла. Для этого нужно отложить данный угол так, чтобы его вершина находилась в точке O, а одна из сторон совпала с лучом OA (рис. 1, г). Из точки N пересечения квадратрисы со вторым лучом угла опускаем перпендикуляр NK на OA, а затем делим отрезок KA на три равные части. Если восставить в точках деления перпендикуляры к прямой OA до пересечения с квадратрисой , а затем соединить полученные точки пересечения с точкой O, то полученные углы окажутся равными. Это следует из метода построения квадратрисы. Аналогичным образом можно делить любой угол на произвольное количество равных частей.

Напомним, что в классической постановке задачи о трисекции угла такое построение требовалось произвести лишь с помощью циркуля и линейки! В 1837 г. французский математик П. Ванцель доказал, что в общем виде задача не имеет решения, а возможно такое деление лишь в нескольких исключительных случаях, в частности для угла $\alpha = \pi/2$ и всех углов вида $\pi/2^n$.

Как известно, имеет место тождество $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$. Если обозначим $2\cos\alpha = a$, $2\cos\frac{\alpha}{3} = x$, то получим такое кубическое уравнение: $x^3 - 3x - a = 0$. Оказалось, что трисекция угла возможна для тех углов α, для которых корни этого уравнения выражаются через параметр a и целые числа лишь с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня. В частности, если $\alpha = \pi/2$, т. е. $a = 0$, то получаем уравнение $x^3 - 3x = 0$, имеющее корни 0, $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$.

К кубическому уравнению сводится и знаменитая «делосская задача» удвоения куба. Свое название она получила от острова Делос в Эгейском море, где, по легенде, чтобы избавить жителей от эпидемии, оракул повелел удвоить алтарь, имевший форму куба. Но в действительности она, наверное, возникла в умах математиков как обобщение задачи об удвоении квадрата. Для того чтобы построить квадрат вдвое большей площади, чем данный, достаточно провести у данного квадрата диагональ (рис. 1,д) и принять ее за сторону нового квадрата.

Задача об удвоении куба оказалась существенно более трудной. Если обозначить через a длину стороны исходного куба, а через x – длину стороны вдвое большего куба, то получим соотношение $x^3 = 2a^3$ – снова кубическое уравнение. В 1837 г. тот же П. Ванцель доказал, что невозможно построить с помощью только циркуля и линейки отрезок, в $\sqrt[3]{2}$ раз больший данного, т. е. подтвердил неразрешимость задачи удвоения куба.

Естественно, что существовали способы приближенного решения этой задачи и решения ее с помощью других инструментов и кривых. Так, уже в IV в. до н. э. древнегреческие математики умели находить корень уравнения $x^3 = 2a^3$ как абсциссу точки пересечения двух парабол $x^2 = ay$ и $y^2 = 2ax$ (рис. 1,е), а также других *конических сечений*.

На протяжении многих веков три знаменитые задачи древности привлекали внимание выдающихся математиков. В процессе их решения рождались и совершенствовались многие математические методы.

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение сельскохозяйственных культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.

С аналогичными задачами, получившими название комбинаторных, люди столкнулись в глубокой древности. Уже несколько тысячелетий назад в Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов (см. *Магические и латинские квадраты*), в которых заданные числа располагали так, что их сумма по всем горизонталям, вертикалям и главным диагоналям была одной и той же. В Древней Греции подсчитывали число различных комбинаций длинных и коротких слогов в стихотворных размерах, занимались теорией *фигурных чисел*, изучали фигуры, которые можно составить из частей особым образом разрезанного квадрата, и т. д.

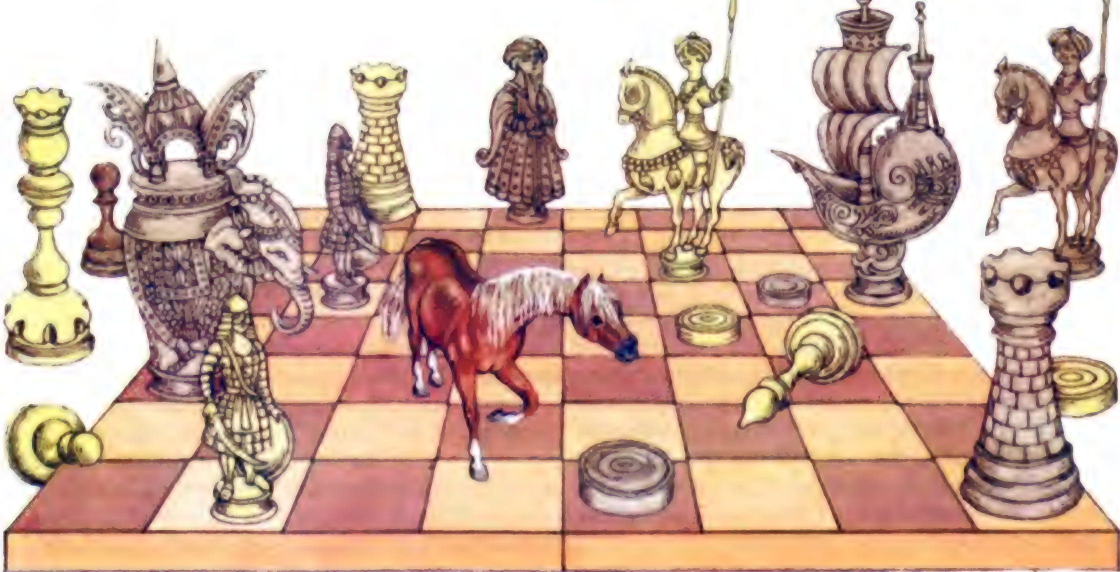
Комбинаторные задачи возникали и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т. д. (Например, задача о расстановке восьми ферзей на шахматной доске так, чтобы ни один из них не оказался под боем, об обходе всех полей доски шахматным конем и т. д. (см. *Математика на шахматной доске*).

Комбинаторика становится наукой лишь в XVII в. – в период, когда возникла теория вероятностей. Чтобы решать теоретико-вероят-

ностные задачи, нужно было уметь подсчитывать число различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям. После первых работ, выполненных в XVI в. итальянскими учеными Дж. Кардано, Н. Тартальей и Г. Галилеем, такие задачи изучали французские математики Б. Паскаль и П. *Ферма*. Первым рассматривал комбинаторику как самостоятельную ветвь науки немецкий философ и математик Г. *Лейбниц*, опубликовавший в 1666 г. работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появляется сам термин «комбинаторный». Замечательные достижения в области комбинаторики принадлежат Л. *Эйлеру*. Комбинаторными задачами интересовались и математики, занимавшиеся составлением и разгадыванием шифров, изучением древних письменностей. Теперь комбинаторика находит приложения во многих областях науки: в биологии, где она применяется для изучения состава белков и ДНК, в химии, механике сложных сооружений и т. д.

Игра в шахматы есть как бы насвистывание математических мелодий.

Г. Харди



По мере развития комбинаторики выяснилось, что, несмотря на внешнее различие изучаемых ею вопросов, многие из них имеют одно и то же математическое содержание и сводятся к задачам о конечных множествах и их подмножествах. Постепенно выявилось несколько основных типов задач, к которым сводится большинство комбинаторных проблем. Важную область комбинаторики составляет теория перечислений. С ее помощью можно подсчитать число решений различных комбинаторных задач. В основе этой теории лежат «правило суммы» и «правило произведения». Они гласят: «если множество A состоит из m элементов, а множество B – из n элементов, причем эти множества не имеют общих элементов, то их объединение $A \cup B$, т. е. совокупность всех элементов из A и B, содержит $m+n$ элементов; множество $A \times B$, состоящее из всевозможных пар (a, b), где элемент a принадлежит множеству A, а элемент b принадлежит множеству B, содержит mn элементов».

С помощью правила суммы легко сосчитать и число элементов в $A \cup B$, когда A и B имеют общие элементы. Если обозначить через $A \cap B$ множество всех общих элементов у множеств A и B, то оно равно $n(A)+n(B)-n(A \cap B)$, где $n(A)$ – число элементов в множестве А. Это утверждение – частный случай так называемой формулы перекрытий.

Часто приходится считать число последовательностей длины m, составленных из элементов некоторого множества A, состоящего из n элементов, как в случае, когда среди элементов последовательности могут быть повторяющиеся, так и в случае, когда все эти элементы должны быть различными. В первом

«Число, место и комбинация — три взаимно перекрещивающиеся, но отличные сферы мышления, к которым можно отнести все математические идеи».

Дж. Сильвестр

аабаб

ИКС
КИС
ИСК
СКИ
КСИ
СИК

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

4	9	2
8	1	6
3	5	7

случае последовательности называют размещениями с повторениями из n элементов по m и их число обозначают $\bar{A}_n^m$, а во втором — размещениями без повторений, их число обозначают A_n^m. Формулы для $\bar{A}_n^m$ и A_n^m таковы:

$$\bar{A}_n^m = n^m, \quad A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1).$$

Рассмотрим различные размещения без повторений из n элементов по n, очевидно, что они отличаются друг от друга лишь порядком элементов; их называют перестановками из n элементов. Число P_n таких перестановок равно $n!$ (см. *Факториал*):

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Если отвлечься от порядка элементов, то возникает задача: сколько подмножеств, содержащих m элементов и отличающихся одно

от другого хотя бы одним элементом, можно извлечь из множества A, содержащего n элементов. В комбинаторике такие подмножества называют сочетаниями из n элементов по m, их число обозначают C_n^m. Можно доказать, что

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Целый ряд комбинаторных задач возникает при разбиении множеств на части: найти число таких разбиений, если число частей равно k; найти, сколькими способами можно число n записать в виде суммы k слагаемых; найти, сколькими способами можно разложить n предметов по k ящикам, и т.д. Обычно задачи теории разбиений и раскладок сводятся к формуле перекрытий и разобранным выше основным задачам комбинаторики. Такими же способами решаются комбинаторные задачи с ограничениями, например подсчет числа размещений с повторениями, в которых ни один элемент не стоит два раза подряд, и т.д.

В решении комбинаторных задач часто используют графические методы – изображение разбиений числа на слагаемые в виде точечных диаграмм, так называемые *графы* (геометрические фигуры, состоящие из точек и соединяющих их отрезков) и т.д. Теория графов стала в наши дни одной из наиболее бурно развивающихся частей комбинаторики. Многие общие теоремы этого раздела математики формулируются на языке графов.

Комбинаторика не сводится только к подсчету количества тех или иных подмножеств или последовательностей. При решении комбинаторных проблем иногда нужно лишь доказать, что данная проблема имеет решение, или убедиться в отсутствии его. Например, доказано следующее утверждение: для любых чисел m и n найдется такое число N, что лю-

ВЕНГЕРСКИЙ ШАРНИРНЫЙ КУБИК



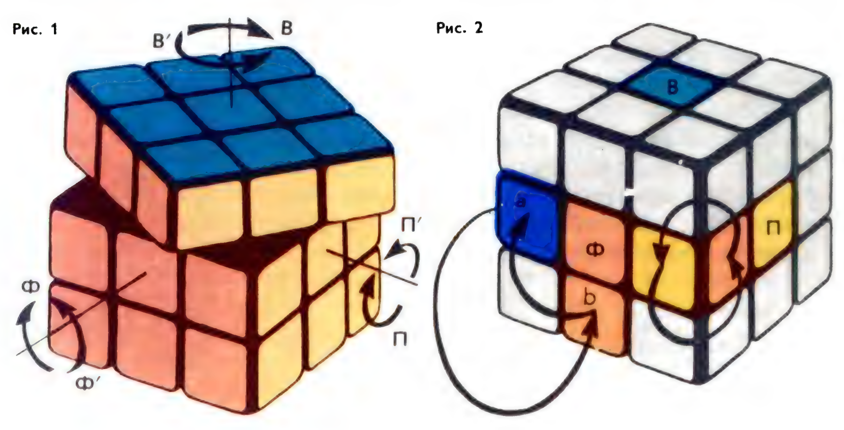
Необыкновенно популярной головоломкой стал кубик Рубика (рис. 1), изобретенный в 1975 г. преподавателем архитектуры из Будапешта Эрне Рубиком для развития пространственного воображения у студентов. Кубик Рубика – это куб, как бы разрезанный на 27 одинаковых кубичков. В исходном положении каждая грань куба окрашена в один из 6 цветов. Остроумный механизм позволяет поворачивать любой слой из 9 кубичков, примыкающих к одной грани куба, вокруг ее центра (на рис. 1 слегка повернут верхний слой); при этом цвета граней смешиваются. Задача состоит в том, чтобы вернуть разноцветные грани кубика в исходное положение.

Приведем один из многочисленных алгоритмов решения этой задачи. Он включает два этапа: на первом собираются кубички, располагающиеся в серединах ребер куба (реберные), на втором – угловые. Каждый кубичек может находиться на одном и том же месте в нескольких положениях (реберный – в двух, угловой – в трех). В соответствии с этим каждый этап делится на два шага: на первом кубички только расставляются на нужные места, а на втором они, если это необходимо, разворачиваются на своих местах так, чтобы их цвета совпали с «правильными» цветами граней. Ориентирами при определении правильных положений реберных и угловых кубичков служат квадраты в центрах граней: их взаимное расположение не меняется при вращении граней, а их цвета задают будущие цвета граней куба.

Записывать последовательности ходов (операции) будем, пользуясь обозначениями рис. 1; например, *ФП'* – это последовательность из двух поворотов: фасадной (передней) грани на 90° по часовой стрелке и правой – на 90° против часовой стрелки. Весь процесс сборки основан на операции $F = ПВФВ'Ф'П'Ф$ и обратной к ней операции $F' = Ф'ПФВФ'В'П'$.

1-й этап. Сборка реберных кубичков.

1. Для расстановки реберных кубичков применяется операция F (или



бой граф, состоящий из N точек и всех соединяющих эти точки отрезков (они раскрашены в m цветов), содержит часть, состоящую из n точек и соединяющих их отрезков, такую, что все отрезки имеют один и тот же цвет (теорема Рамсея).

Если заданным условиям удовлетворяют несколько конфигураций, т.е. если комбинаторная задача имеет несколько решений, то может возникнуть вопрос о выборе из них решения, оптимального по тем или иным параметрам. Например, если имеется несколько городов, каждые два из которых соединены авиалинией, то возникает задача о том, как путешественнику побывать по одному разу в каждом городе, налетав наименьшее расстояние.

Комбинаторные задачи физики, химии, биологии, экономики и других наук, которые не поддавались ранее решению из-за трудоемкости вычислений, стали успешно решаться на ЭВМ. В результате этого комбинаторные методы исследования все глубже проникают во многие разделы науки и техники.

В 1970–1980 гг. комбинаторика добилась новых успехов. В частности, с помощью ЭВМ решена проблема четырех красок: доказано, что любую карту можно раскрасить в четыре цвета так, чтобы никакие две страны, имеющие общую границу, не были окрашены в один и тот же цвет.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Так называют числа вида $a+bi$, где a и b – действительные числа, а i – число особого рода, квадрат которого равен −1, т.е. $i^2 = -1$. Действия над комплексными числами выполняются по таким же правилам, что и над

F'), меняющая местами ровно два из них. (Действие операции на реберных кубичках показано на рис. 2.)

2. Для разворачивания применяется операция $F^2 = F \cdot F$; в результате на своих местах поворачиваются два кубичка (a и b на рис. 2).

2-й этап. Сборка угловых кубичков.

1. Для расстановки угловых кубичков применяется операция $FB'F'B$, действие которой показано стрелками на рис. 3, и обратная операция $B'FBF'$, переставляющая те же кубички в обратном порядке.

2. Для разворачивания угловых кубичков применяется операция F^4, действие которой показано на рис. 4, и обратная к ней операция $(F')^4$, поворачивающая те же три кубичка в противоположном направлении.

Указанные операции можно использовать и в рамках других общих схем. Например, нетрудно правильно собрать все реберные кубички, кроме четырех, лежащих в одной грани, после чего можно перейти к выполнению первого этапа алгоритма. Общее число ходов при этом заметно сокращается, но остается все еще большим. Дальнейшее сокращение можно получить, в частности, за счет расширения набора стандартных операций. Имеются и принципиально другие схемы сборки. Лучшие из них позволяют обойтись примерно 50 ходами-поворотами, но теоретически из любого состояния кубика можно вернуться в исходное не более чем за 23 хода. Лучшее время, показанное на чемпионате мира 1982 г. по скоростной сборке кубика Рубика, составило всего 22,95 с.

Задача поиска оптимального (по числу ходов) алгоритма является самой сложной и не решенной пока математической задачей, связанной с кубиком Рубика. Представляет интерес также изучение *группы*, порожденной поворотами граней, и др. Кубик Рубика служит не только развлечением, но и прекрасным наглядным пособием по алгебре, *комбинаторике*, программированию.

Рис. 3

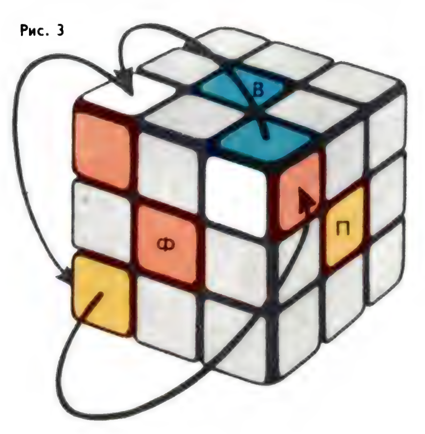
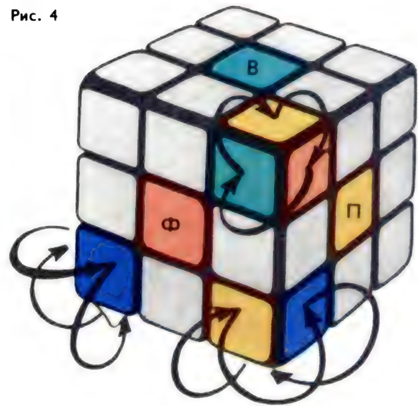


Рис. 4



многочленами, при этом i^2 заменяют на -1. Например: $(2+3i)+(4-8i)=6-5i$; $(2+3i)(4-8i)=8-16i+12i-24i^2=32-4i$;

$$\frac{2+3i}{4-8i}=\frac{(2+3i)(4+8i)}{(4-8i)(4+8i)}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{20}i;$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i;$$

$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=1.$$

Равенство $a+bi=c+di$ означает, что $a=c$ и $b=d$.

Древнегреческие математики считали «настоящими» только натуральные числа, но в практических расчетах за два тысячелетия до н. э. в Древнем Египте и Древнем Вавилоне уже применялись дроби. Следующим важным этапом в развитии понятия о *числе* было введение отрицательных чисел – это было сделано китайскими математиками за два века до н. э. Отрицательные числа применял в III в. н. э. древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действий над ними, а в VII в. н. э. эти числа подробно изучили индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII в. н. э. было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения – положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратные корни извлечь нельзя: нет такого числа x, чтобы $x^2=-9$.

«Помимо и даже против воли того или другого математика, мнимые числа снова и снова появляются на выкладках, и лишь постепенно, по мере того как обнаруживается польза от их употребления, они получают все более и более широкое распространение».

Ф. Клейн

В XVI в. в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений (см. *Алгебраическое уравнение*) содержатся кубические и квадратные корни. Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень (например, для уравнения $x^3+3x-4=0$), а если оно имело три действительных корня (например, $x^3-7x+6=0$), то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим трем корням уравнения ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа.



Чтобы объяснить получившийся парадокс, итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений $x + y = 10$, $xy = 40$, не имеющая решений в множестве действительных чисел, имеет решения вида $x = 5 \pm \sqrt{-15}$, $y = 5 \mp \sqrt{-15}$, нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать, что $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a} = -a$. Кардано называл такие величины «чисто отрицательными» и даже «софистически отрицательными», считал их бесполезными и стремился не применять их. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение этой величины. Но уже в 1572 г. вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название «мнимые числа» ввел в 1637 г. французский математик и философ Р. *Декарт*, а в 1777 г. один из крупнейших математиков XVIII в.– Л. *Эйлер* предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ («мнимой» единицы); этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. *Гауссу* (1831).

В течение XVII в. продолжалось обсуждение арифметической природы мнимостей, возможности дать им геометрическое истолкование.

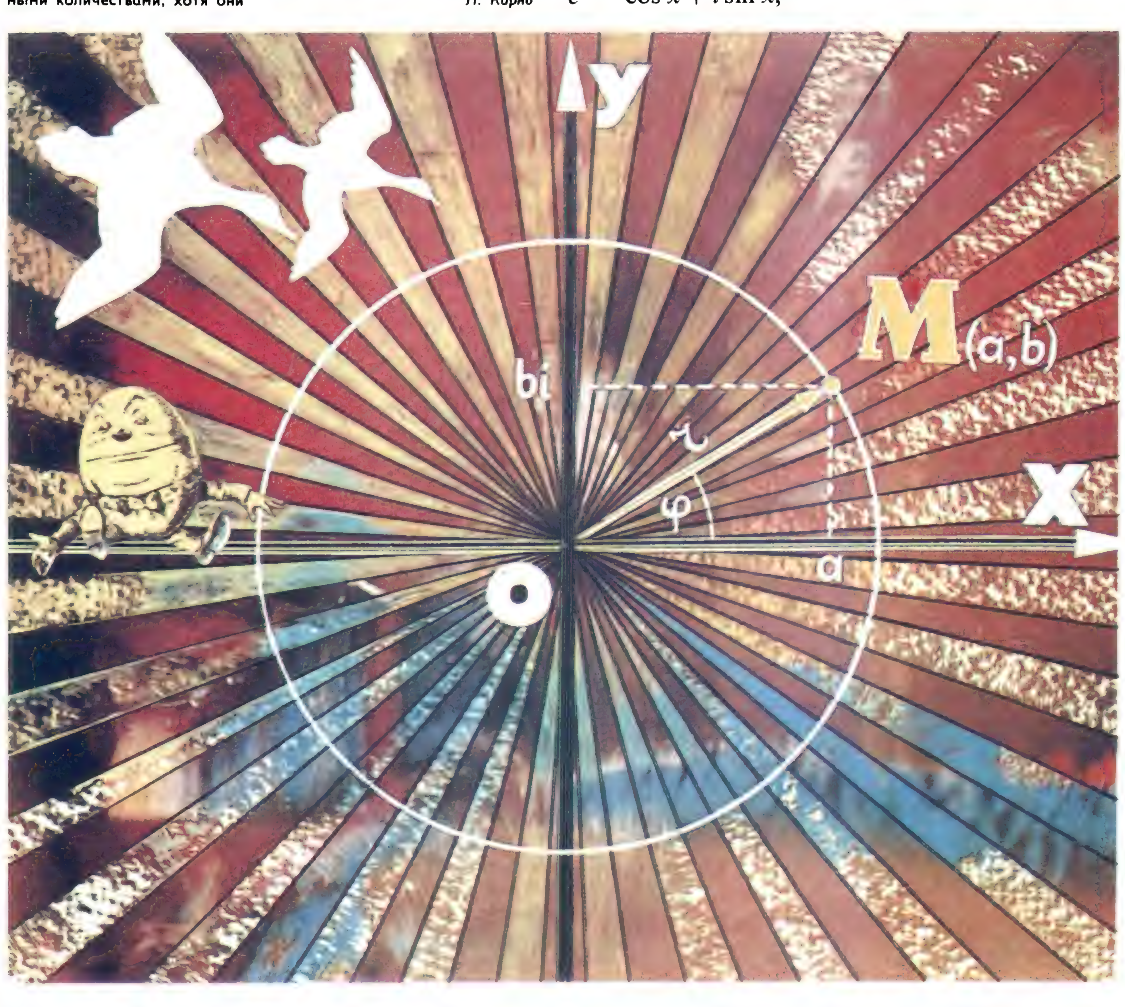
Постепенно развивалась техника операций над комплексными числами. На рубеже XVII и XVIII вв. была построена общая теория корней n-й степени сначала из отрицательных, а потом из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

С помощью этой формулы можно также вывести равенства для косинусов и синусов кратных дуг. Л. Эйлер вывел в 1748 г. замечательную формулу

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

«Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы и иероглифы нелепых количеств».
Л. Карно



которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрическими. С помощью формулы Эйлера можно возводить число e в любую комплексную степень. Любопытно, например, что $e^{i\pi} = -1$. Можно находить синусы и косинусы от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, т. е. строить теорию функций комплексного переменного.

В конце XVIII в. французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью комплексных чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Еще ранее швейцарский математик Я. Бернулли применил комплексные числа для вычисления интегралов.

Хотя в течение XVIII в. с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т.д., однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. Поэтому французский ученый П. Лаплас считал, что результаты, получаемые с помощью мнимых

КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС (1777–1855)



Математические вычисления заменили Гауссу обычные детские игры. Он делил единицу на все простые числа p из первой тысячи подряд, подмечая, что десятичные знаки рано или поздно начинают повторяться. Рассмотрев большое количество примеров, Гаусс доказал, что число цифр в периоде не превосходит $p-1$ и всегда является делителем $p-1$. Он интересовался случаями, когда период в точности равен $p-1$, и это постепенно привело его к первому открытию.

Ученый доказал, что правильный n-угольник, где n – число простое, может быть построен циркулем и линейкой в том, и только в том, случае, когда n имеет вид $2^{2^k}+1$. Например, если $k = 0$, 1, 2, 3, то правильные трех-, пяти-, семнадцати- и 257-угольники можно построить циркулем и линейкой, а семиугольник – нельзя. Еще древние математики (в их числе Архимед) умели строить циркулем и линейкой правильные n-угольники при $n = 3$, 4, 5, 6 и вообще при $n = 2^k$; $2^k \cdot 3$; $2^k \cdot 5$; $2^k \cdot 15$, и только такие. Ученые безуспешно пытались построить правильный семиугольник, девятиугольник. А Гаусс дал полное решение проблемы, над которой трудились ученые в течение 2 тыс. лет.

С этого момента девятнадцатилетний Гаусс окончательно решил заниматься математикой (до этого он не мог сделать выбор между математикой и филологией). И всего через 9 дней в его дневнике появляется запись о втором открытии. Гаусс доказал так называемый квадратичный закон взаимности – один из основных в теории чисел. Этот закон открыл еще *Л. Эйлер*, но доказать его не смог.

С именем К.Ф. Гаусса связаны многие замечательные страницы в истории математики. Он дал доказательство основной теоремы алгебры (всякое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет корень). Гаусс создал теорию поверхностей. До него были изучены геометрии только на двух поверхностях: на плоскости (планиметрия Евклида) и на сфере (сферическая геометрия). Гаусс нашел способ построения геометрии на любой поверхности, определил, какие линии играют на поверхности роль прямых, как мерить расстояния между точками на поверхности и т.д. Теория Гаусса получила название внутренней геометрии. Он не опубликовал своих работ по неевклидовой геометрии и теории эллиптических функций. Эти результаты были открыты заново его младшими современниками: русским математиком *Н.И. Лобачевским* и венгерским математиком Я. Больяй – в первом случае и норвежским математиком *Г.Х. Абелем* и немецким математиком К.Г. Якоби – во втором.

Гаусс занимался также астрономией, электромагнетизмом. Ему удалось вычислить орбиту малой планеты (астероида) Цереры. Решение этой сложной задачи принесло ученому известность, и он был приглашен заведовать кафедрой математики и астрономии, с которой была связана должность директора Геттингенской обсерватории. Этот пост Гаусс не покидал до конца жизни. Результаты своих исследований по астрономии Гаусс объединил в фундаментальном труде «Теория движения небесных тел».

чисел,– только наведения, приобретающие характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами.

В конце XVIII – начале XIX в. было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин Г. Вессель, француз Ж. Арган и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изображать комплексное число $z = a + bi$ точкой $M(a, b)$ на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой M, а вектором $\overrightarrow{OM}$, идущим в эту точку из начала координат. При таком истолковании сложению и вычитанию комплексных чисел соответствуют эти же операции над векторами. Вектор $\overrightarrow{OM}$ можно задавать не только его координатами a и b, но также длиной r и углом φ, который он образует с положительным направлением оси абсцисс. При этом $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ и число z принимает вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, который называется тригонометрической формой комплексного числа. Число r называют модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$. Число φ называют аргументом z и обозначают $\operatorname{Arg} z$. Заметим, что если $z = 0$, значение $\operatorname{Arg} z$ не определено, а при $z \neq 0$ оно определено с точностью до кратного 2π. Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число z в виде $z = re^{i\varphi}$ (показательная форма комплексного числа).

Очень удобно выполнять умножение комплексных чисел в показательной форме. Оно производится по формуле $r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, т.е. при умножении модули перемножаются, а аргументы складываются.

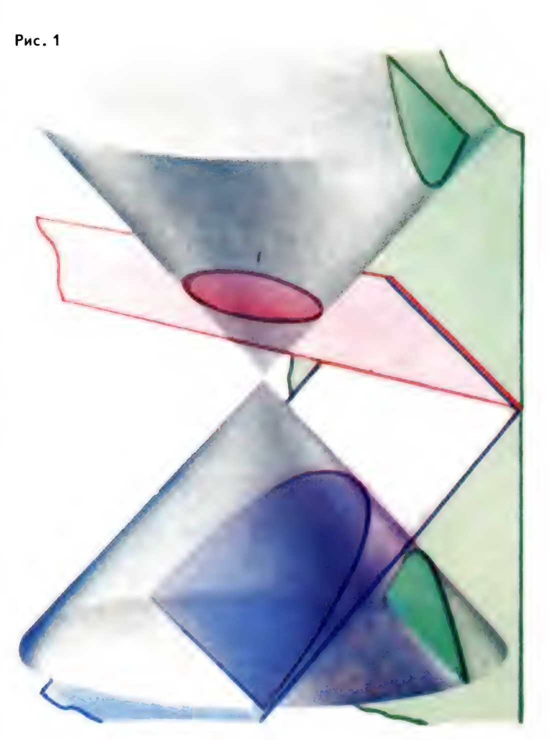
Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функциями комплексного переменного, расширило область их применения. Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости: при изучении течения жидкости, задач теории упругости.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые. Н. И. Мусхелишвили занимался ее приложениями к теории упругости, М. В. *Келдыш* и М. А. *Лаврентьев* – к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Боголюбов и В. С. Владимиров – к проблемам квантовой теории поля.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Конические сечения – кривые, получающиеся при сечении кругового конуса (точнее – конической поверхности) плоскостью, не проходящей через его вершину.

Рис. 1

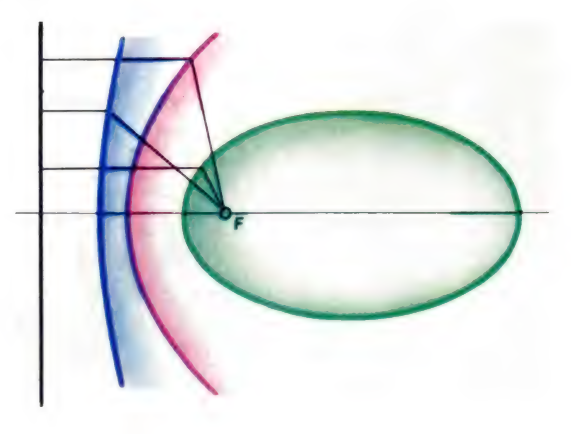


Получающиеся при этом ограниченные фигуры (рис. 1) оказываются *эллипсами*, а неограниченные – *гиперболами* (если секущая плоскость пересекает обе полости конуса) или *параболами* (если секущая плоскость пересекается лишь с одной из его полостей). Все виды конических сечений легко получить с помощью карманного фонарика, направляя его под разными углами на ровную площадку. Правда, при этом у гиперболы мы увидим лишь одну ветвь. Для того чтобы увидеть вторую, нужно ось фонарика повернуть на 180°.

Одинаковый способ получения различных конических сечений влечет и сходство уравнений, описывающих эти кривые. В секущей плоскости можно так выбрать систему координат, чтобы уравнение конического сечения имело вид $y^2 = 2px + \lambda x^2$, где p и λ – по-



Рис. 2



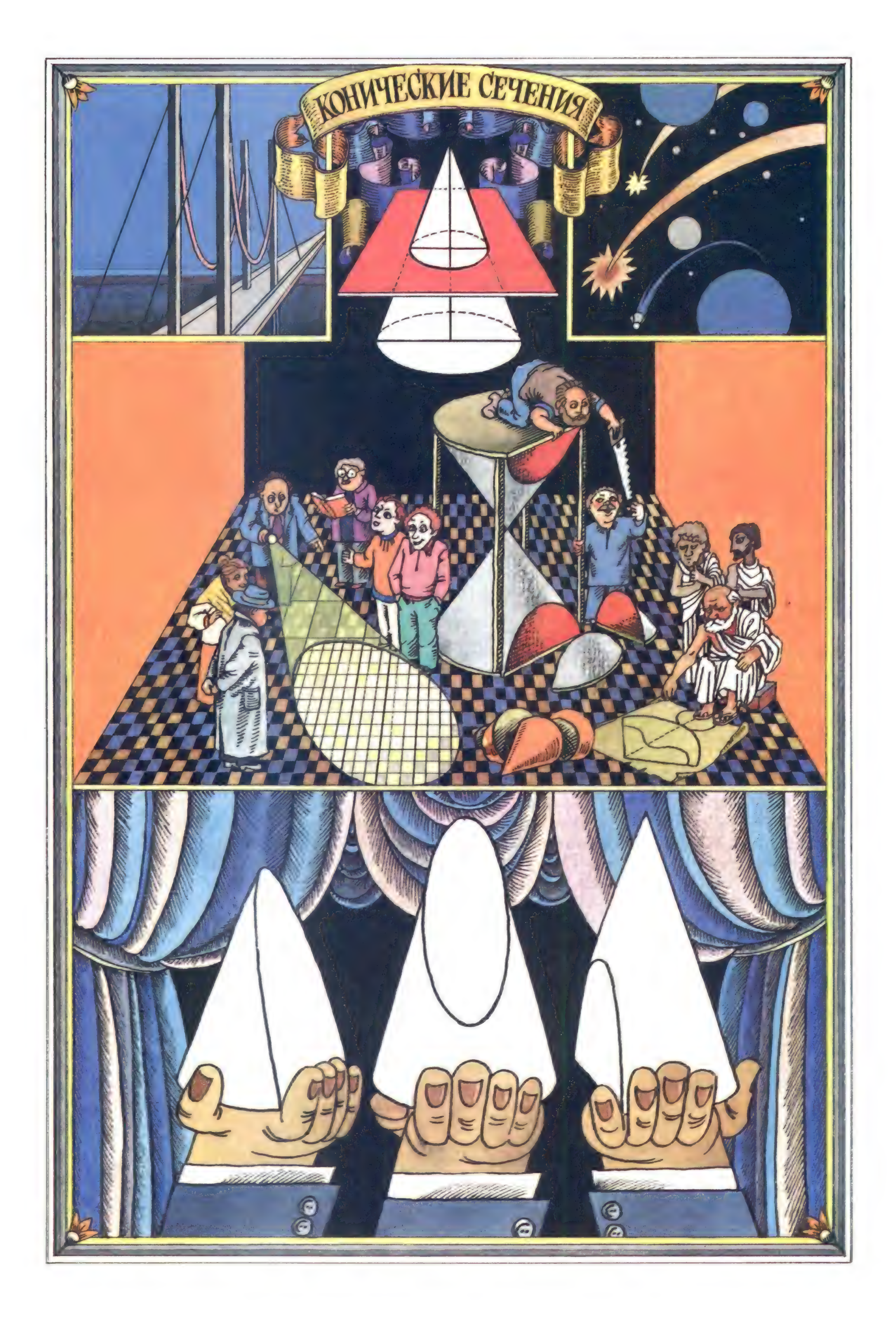

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Рис. 3



стоянные. Если $p \neq 0$, то это уравнение определяет параболу при $\lambda = 0$, эллипс – при $\lambda < 0$, гиперболу – при $\lambda > 0$. Геометрическое свойство конических сечений, содержащееся в приведенном уравнении, было известно древнегреческим ученым и послужило для Аполлония Пергского (примерно II в. до н.э.) поводом присвоить отдельным типам конических сечений названия, сохранившиеся до наших дней: греческое слово «парабола» означает «приложение» (так как в греческой геометрии превращение прямоугольника данной площади y^2 в равновеликий ему прямоугольник с данным основанием $2p$ называлось приложением данного прямоугольника к этому основанию); слово «эллипс» означает «недостаток» (приложение с недостатком), слово «гипербола» – «избыток» (приложение с избытком).

Очень похожи уравнения конических сечений в полярных координатах. Если за полюс взять фокус кривой, а за полярную ось – ось кривой, проходящую через фокус, то получим уравнение

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Оно будет уравнением эллипса при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ (при $\varepsilon = 0$ получим окружность). Парабола будет описываться этим уравнением при $\varepsilon = 1$, а гипербола при $\varepsilon > 1$. Число ε называется эксцентриситетом конического сечения, а p – его фокальным параметром.

Математики Древней Греции рассматривали только сечения, перпендикулярные какой-либо образующей конуса, а различные типы кривых получали путем изменения угла раствора конуса. В частности, они обнаружили, что для любого конического сечения, кроме окружности, в его плоскости существует такая прямая, для которой отношение расстояний точек на кривой до фокуса к расстоянию до этой прямой равняется эксцентриситету этого конического сечения (рис. 2). Такая прямая была названа директрисой этой кривой.

Математический интерес к коническим сечениям во многом обусловлен тем, что если записать уравнение такого сечения в произвольной декартовой системе координат на секущей плоскости, то оно всегда будет алгебраическим уравнением второго порядка, т.е. будет иметь вид:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

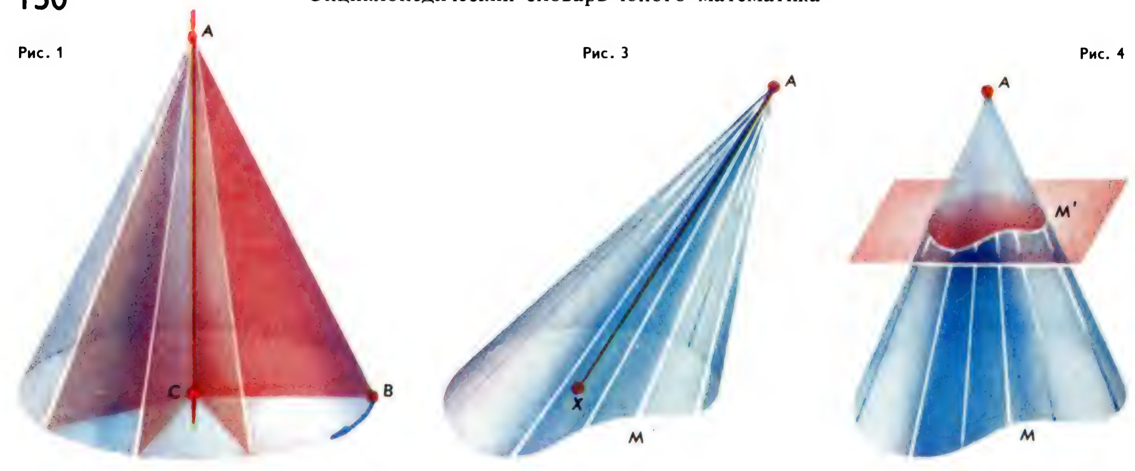
И наоборот, кривая, описываемая таким уравнением, является коническим сечением, за исключением случаев, когда коэффициенты этого уравнения связаны определенными соотношениями.

Все тела Солнечной системы движутся вокруг Солнца по эллипсам. Небесные тела, попадающие в Солнечную систему из других звездных систем, движутся вокруг Солнца по гиперболической орбите и, если на их движение не оказывают существенного влияния планеты Солнечной системы, покидают ее по этой же орбите. По эллипсам движутся вокруг Земли ее искусственные спутники и естественный спутник – Луна, а космические корабли, запущенные к другим планетам, движутся по окончании работы двигателей по параболам или гиперболам (в зависимости от скорости) до тех пор, пока притяжение других планет или Солнца не станет сравнимо с земным притяжением (рис. 3).

КОНУС

Прямой круговой конус (от греческого слова *konos* – «сосновая шишка») – это фигура, получающаяся при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рис. 1 треугольник ABC вращается около катета AC; точка A называется вершиной конуса, прямая AC – его осью, отрезок AC (и его длина) – высотой конуса. Конус ограничен боковой поверхностью, образующейся при вращении гипотенузы AB, и основанием – кругом, получающимся при вращении второго катета BC.

С глубокой древности рассматриваются также конические поверхности, составленные из всех прямых пространства, пересекающих данную прямую (ось) в одной точке (вершине), и образующие с осью данный, отличный от прямого, угол. Составляющие коническую поверхность прямые называются ее образующими – они получаются из одной образующей вращением около оси, и поэтому такую коническую поверхность часто называют конусом вращения (рис. 2). Вершина A разделяет конус вращения на две полости. Прямой круговой





конус можно определить как часть пространства, ограниченную одной полостью конической поверхности и пересекающей эту полость плоскостью, перпендикулярной оси (рис. 2, вверху). Часть пространства, ограниченная полостью конуса и двумя такими плоскостями, называют усеченным (прямым круговым) конусом (рис. 2, внизу). В пересечении конической поверхности с плоскостью, кроме окружности, могут получиться *эллипс*, *парабола*, *гипербола* (см. *Конические сечения*). Плоскость, проходящая через вершину конуса A, в сечении может дать пару образующих или единственную образующую (в этом случае плоскость называется касательной к конусу), или же единственную точку A.

Обобщенный конус с основанием – произвольной плоской фигурой M – и вершиной – не лежащей в плоскости M точкой A – это фигура, которую заполняют отрезки AX, соединяющие вершину со всеми точками X на основании M (рис. 3). Если M – круг, то получается круговой конус, а если к тому же вершина A проецируется в центр круга M, то мы приходим как раз к прямому круговому конусу. Другой частный случай обобщенного конуса – пирамида, получающаяся в том случае, если M – многоугольник. Сечение обобщенного конуса параллельной основанию M плоскостью – фигура M' – разбивает конус на меньший конус и обобщенный усеченный конус с основаниями M и M' (рис. 4). Объем любого конуса (в том числе прямого кругового и пирамиды) вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

где S – площадь основания, а H – высота конуса, т.е. расстояние от вершины A до плоскости основания. Объем любого усеченного конуса равен

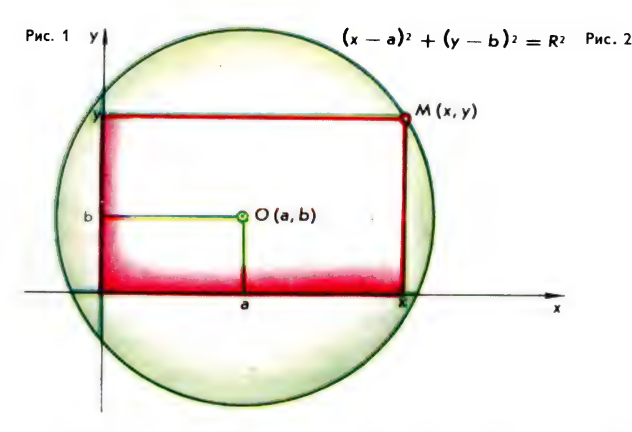
$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

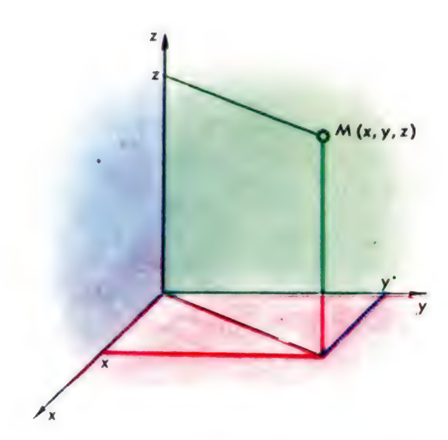
где S_1 и S_2 – площади оснований M и M', а высота H определяется как расстояние между плоскостями оснований.

Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса вычисляется по формуле $S_б = \pi R l$, где R – радиус основания, l – длина образующей конуса. Для усеченного (прямого кругового) конуса $S_б = \pi (R + r) l$, где R и r – радиусы оснований, l – длина его образующей.

КООРДИНАТЫ

Более чем за 100 лет до н.э. греческий ученый Гиппарх предложил опоясать на карте земной шар параллелями и меридианами и ввести хорошо теперь известные географические координаты: широту и долготу – и обозначить их числами.





В XIV в. французский математик Н. Оресм ввел, по аналогии с географическими, координаты на плоскости. Он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и называть широтой и долготой то, что мы теперь называем абсциссой и ординатой.

Это нововведение оказалось чрезвычайно продуктивным. На его основе возник метод координат, связавший геометрию с алгеброй. Основная заслуга в создании метода координат принадлежит французскому математику *Р. Декарту*. Такую систему координат стали называть декартовой. Точку O пересечения прямых называют началом, а сами направленные прямые – осями координат, ось Ox – осью абсцисс, а ось Oy – осью ординат. Числа x, y называют декартовыми координатами точки $(x; y)$. Точка плоскости – геометрический объект – заменяется парой чисел $(x; y)$, т. е. алгебраическим объектом. Принадлежность точки заданной кривой теперь соответствует тому, что числа x и y удовлетворяют некоторому уравнению. Так, координаты точки окружности с центром в заданной точке $(a; b)$ удовлетворяют уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ (рис. 1).

Для определения положения точки в пространстве требуется введение третьей оси – оси аппликат (рис. 2). Таким образом, положение точки в пространстве будет уже задаваться тремя числами.

Особенно просто описываются в декартовых координатах прямые и плоскости. Так, уравнение любой прямой на плоскости в декартовой системе координат записывается в виде: $Ax+By+C=0$, и наоборот, всякому такому уравнению, у которого числа A и B одновременно не являются нулями, удовлетворяют точки некоторой прямой.

Числа A и B имеют важный геометрический смысл: вектор с координатами $\{A, B\}$ перпендикулярен соответствующей прямой (рис. 3). Следует, что если у двух прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ коэффициенты при переменных пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

то эти прямые параллельны, поскольку параллельны перпендикулярные им векторы $\{A_1, B_1\}$ и $\{A_2, B_2\}$. А если эти прямые перпендикулярны, то соответствующие им векторы также будут перпендикулярны, а следовательно, их скалярное произведение будет равно нулю:

$$A_1A_2+B_1B_2=0.$$

В пространстве уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ описывает плоскость, если не все коэффициенты A, B и C равны нулю. Аналогично вектор $\{A, B, C\}$ перпендикулярен этой плоскости. Отсюда получаем условия параллельности двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

и условие их перпендикулярности: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Прямая в пространстве может быть представлена как линия пересечения двух плоскостей и, следовательно, может описываться парой уравнений плоскостей, и, наоборот, точки, удовлетворяющие одновременно двум уравнениям:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

лежат на прямой, если коэффициенты при неизвестных не пропорциональны, т. е. эти плоскости не параллельны.

Существует и другой способ описания прямой в декартовых координатах. Для этого выбираются точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на этой прямой, и вектор $\bar{a}=(\alpha, \beta, \gamma)$, параллельный данной прямой (он называется направляющим вектором прямой). Тогда все точки этой прямой удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{cases} x=x_0+\alpha t \\ y=y_0+\beta t \\ z=z_0+\gamma t \end{cases}$$

Каждому значению числа t (оно называется параметром, а поэтому и запись называется параметрическим заданием прямой) соответствует некоторая точка этой прямой. Если

вектор $\bar{a}$ имеет единичную длину, то модуль числа t равняется расстоянию соответствующей точки до начальной точки M_0.

В соответствии с геометрическим смыслом чисел α, β и γ и здесь можно аналогично написать алгебраические условия перпендикулярности и условия параллельности прямых через координаты их направляющих векторов.

Трудно переоценить значение декартовой системы координат в развитии математики и ее приложений.

Кривые и поверхности, определяемые ранее геометрически, получили описание в виде формул. Более того, рассматривая различные уравнения и изображая соответствующие линии и поверхности, математики получили новые геометрические образы, оказавшиеся очень полезными в приложениях, например *гиперболические функции.*

Существуют на плоскости и другие системы координат, например полярная система координат. Чтобы ее ввести, выбирают начальную точку O, называемую полюсом, поэтому система и называется полярной. Из этой точки проводят луч, называющийся полярной осью. Чтобы определить координаты точки на плоскости, ее соединяют отрезком с полюсом и вычисляют длину этого отрезка и угол между ним и полярной осью (рис. 4).

Таким образом, каждой точке M плоскости сопоставляется пара чисел (ρ, φ). Но если в декартовой системе координат эта пара определялась однозначно, то в полярной системе число φ определено уже неоднозначно: парам чисел $(\rho,\ \varphi + 2n\pi)$ соответствует одна и та же точка при любом целом числе n. Направление полярной оси можно выбирать произвольно. Так, географы предпочитают направление полярной оси на север и соответ-

РЕНЕ ДЕКАРТ (1596–1650)



Декарт далеко не сразу нашел свое место в жизни. Дворянин по происхождению, окончив коллеж в Ла-Флеше, он с головой окунается в светскую жизнь Парижа, затем бросает все ради занятий наукой.

Декарт неторопливо продумывает контуры своего будущего учения – аналитического метода познания мира. Он накапливает жизненный опыт, несколько лет проводит в путешествиях. Декарт стремился и в философии и в любой другой науке найти математические законы, свести каждый вопрос или каждую задачу к математической. Он хотел создать такой универсальный математический метод, который позволил бы всякому овладевшему им решить любую задачу. В 1637 г. в Лейдене выходит 4 тома его «Философских опытов». Последний том назывался «Геометрия».

Декарт отводил математике особое место в своей системе, он считал ее принципы установления истины образцом для других наук.

Главное достижение Декарта – построение аналитической геометрии (термин предложил *И. Ньютон*, см. *Геометрия*), в которой геометрические задачи переводились на язык алгебры при помощи метода координат. Нужно отметить, что у Декарта в точном виде еще не было того, что сегодня называется декартовой системой координат. Декарт начал с того, что перевел на алгебраический язык задачи на построение циркулем и линейкой (см. *Геометрические построения*), затем обнаружил, что любимые древними конические сечения – это то же самое, что кривые второго порядка, т.е. с алгебраической точки зрения следующий по сложности за прямыми (кривыми первого порядка) класс кривых. При переходе на алгебраический язык многие трудные геометрические задачи становятся почти тривиальными.

Немалой заслугой Декарта было введение удобных обозначений, сохранившихся до наших дней: латинских букв x, y, z – для неизвестных; a, b, c – для коэффициентов, x^2, y^5, a^7 – для степеней.

Он сформулировал основную теорему алгебры: «число корней алгебраического уравнения равно его степени», доказательство которой было получено лишь в конце XVIII в. К. Ф. Гауссом.

Интересы Декарта не ограничиваются математикой, а включают механику, оптику, биологию.

В 1649 г. Декарт после долгих колебаний переезжает в Швецию. Это решение оказалось для его здоровья роковым. Через полгода Декарт умер от пневмонии.

Рис. 3

Рис. 4

ствующий полярный угол называют азимутом, а артиллеристы отсчитывают азимут от направления на юг.

Существуют также координаты, задаваемые одним числом. Это координаты на прямой. Достаточно задать одно число – расстояние от точки до начала отсчета, чтобы указать на прямой положение этой точки.

А сколько координат зададут положение точки в пространстве? Естественно, три. Эти три числа можно получить, например, так. Соединим мысленно лучом центр Земли и нашу точку и рассмотрим широту и долготу пересечения луча с поверхностью Земли и расстояние от точки до центра Земли. Такая система координат называется сферической. Можно поступить по-другому. Выберем некоторую плоскость и введем на ней полярную систему координат, а нашей точке сопоставим полярные координаты ее проекции на эту плоскость и расстояние от нее до плоскости, взятое со знаком «плюс» для одной половины пространства и со знаком «минус» – для другой; так мы получим цилиндрическую систему координат.

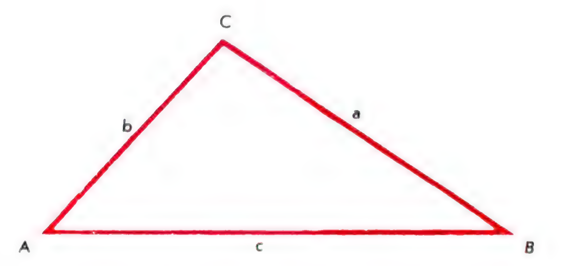
Сферической системой координат обычно пользуются на аэродромах. Рядом с аэродромом ставят радиолокатор. Этот прибор определяет расстояние до самолета, угол, под которым самолет виден над горизонтом, и угол между направлением на самолет и направлением на север, т. е. определяет его сферические координаты.

КОСИНУСОВ ТЕОРЕМА

Косинусов теорема – теорема *тригонометрии*, выражающая зависимость между сторонами и углами треугольника. Она утверждает, что во всяком треугольнике квадрат длины стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон без удвоенного произведения длин этих сторон на косинус угла между ними, т. е. в треугольнике ABC (см. рис.) имеет место соотношение

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

где a, b, c – длины сторон треугольника, а C – величина угла, противолежащего стороне c. Если угол C прямой, то теорема косинусов переходит в *Пифагора теорему*, так как



косинус прямого угла равен нулю. Теорема косинусов чаще всего применяется в двух случаях: 1) если нужно узнать длину одной из сторон при известных длинах двух других сторон и величине угла между ними; 2) если нужно узнать величины углов треугольника, длины сторон которого известны.

Теорему знали еще древние греки, ее доказательство содержится во II книге «Начал» Евклида (см. *Евклид и его «Начала»*).

КУБ

Куб, или гексаэдр (шестигранник), – прямоугольный параллелепипед с равными измерениями, один из видов правильных *многогранников*. Его легко склеить из *развертки* (рис. 1). Куб – единственный из правильных многогранников, которым можно замостить пространство, прикладывая один кубик к другому. Именно поэтому объем куба с единичным ребром принят за единицу *объема*. Удивительным образом куб связан с четырьмя другими видами правильных многогранников. Так, центры граней куба являются вершинами октаэдра и, наоборот, центры граней октаэдра суть вершины куба (рис. 2).

В куб можно вписать правильный тетраэдр – его вершинами являются концы скрещивающихся диагоналей двух параллельных граней куба (рис. 3). Остальные четыре вершины

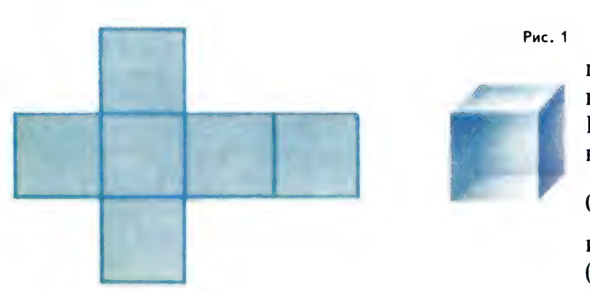


Рис. 1

Куб – пространственный аналог квадрата на плоскости. Особую четкость эта аналогия приобретает, если привлечь координаты. Квадрат на плоскости Oxy можно задать неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

и его вершины будут иметь координаты (0; 0), (0; 1), (1; 0) и (1; 1). В координатном пространстве $Oxyz$ куб задается неравенствами

Рис. 2

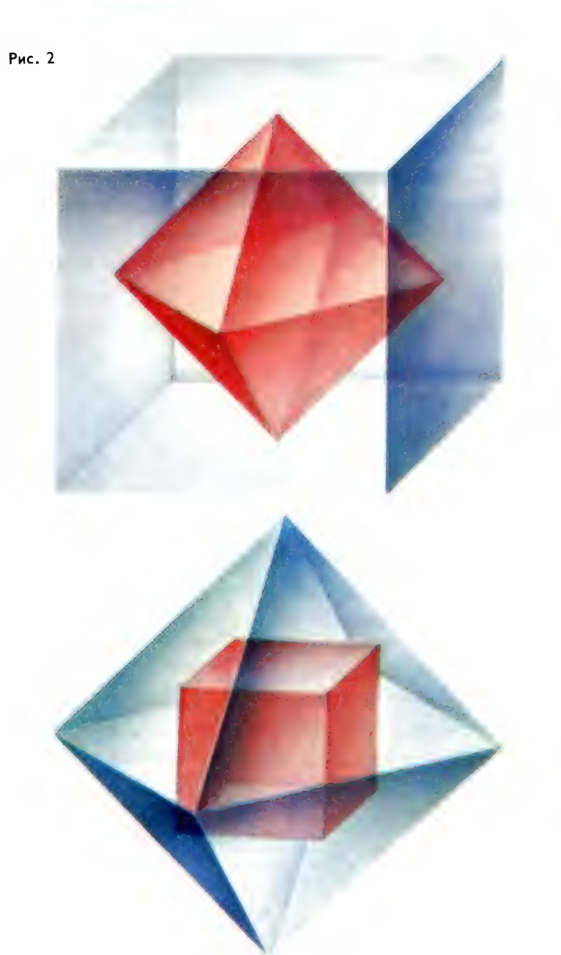
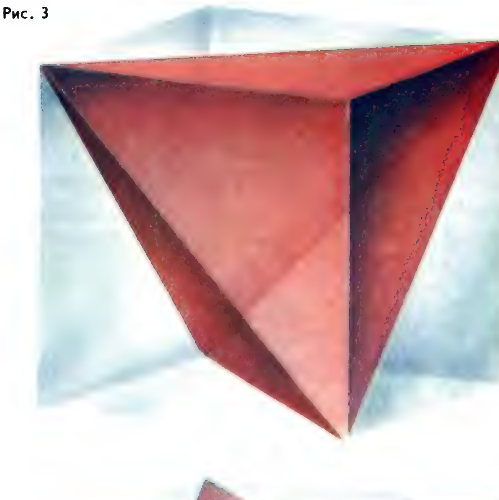


Рис. 3





куба служат вершинами второго вписанного тетраэдра.

Куб можно вписать в додекаэдр так, что ребра куба будут диагоналями граней додекаэдра (рис. 4). Ребром вписанного в додекаэдр куба может быть любая из пяти диагоналей какой-нибудь грани додекаэдра, так что в додекаэдр указанным образом можно вписать 5 одинаковых кубов. Наконец, на каждой из шести граней куба можно выбрать по паре точек так, что 12 выбранных точек будут вершинами икосаэдра,– рис. 5 (выделенные отрезки лежат на гранях куба).

Среди прочих примечательных свойств куба отметим, что в точности четыре его сечения являются правильными шестиугольниками – эти сечения проходят через центр куба перпендикулярно четырем его диагоналям (рис. 6).

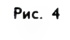


Рис. 4



Рис. 5



Рис. 6

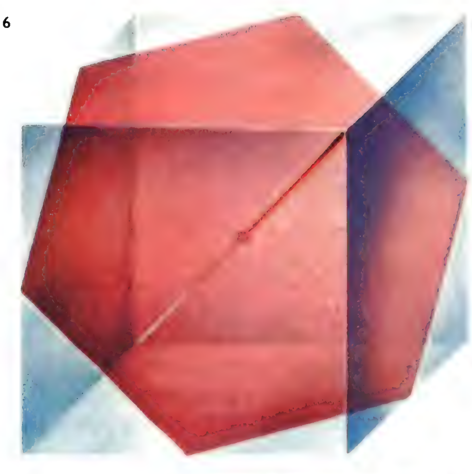
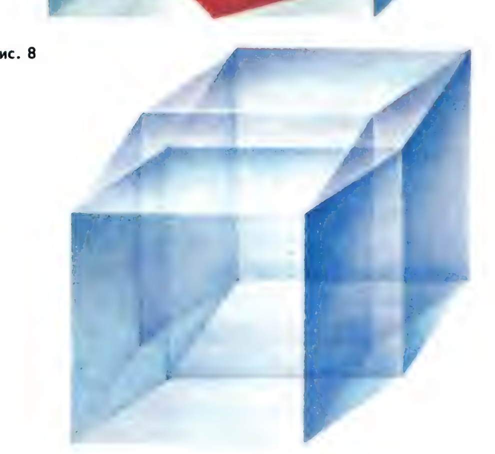
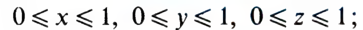


Рис. 7



Рис. 8





$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1;$

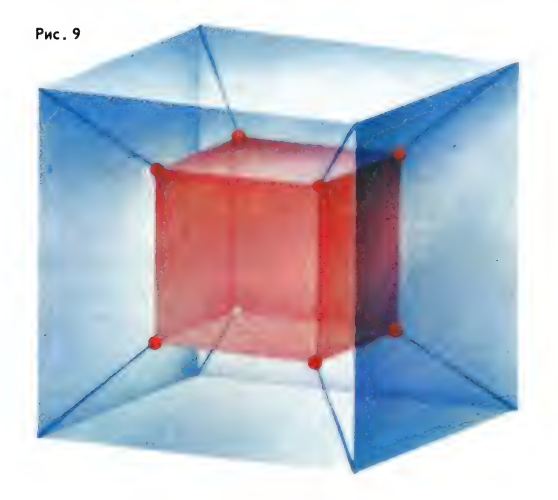
его 8 вершин имеют координаты (0; 0; 0), (0; 0; 1), (0; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 0), (1; 0; 1), (1; 1; 0) и (1; 1; 1). Квадрат имеет 4 стороны, лежащие на прямых $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ и $y = 1$. Куб имеет 6 (плоских, или двумерных) граней, лежащих в плоскостях, задаваемых уравнениями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$ и $z = 1$. Эту аналогию можно продолжить в две стороны.

Одномерный аналог куба и квадрата – это, конечно, отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ оси Ox. Четырехмерный же куб в четырехмерном пространстве, точки которого понимают как всевозможные (упорядоченные) четверки чисел (x; y; z; t), задается системой неравенств

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Четырехмерный куб, или гиперкуб, имеет уже 16 вершин (точек с координатами (x; y; z; t), где x, y, z и t могут равняться 0 или 1) и 8 трехмерных граней, каждая из которых представляет собой обычный (трехмерный) куб, все 8 вершин которого удовлетворяют одному из уравнений: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ и $t = 1$. Двумерных граней у гиперкуба 24 – это квадраты, у вершин которых зафиксированы (равны 0 или 1) уже две координаты (из четырех). Наконец, ребер, одномерных граней, у гиперкуба 32.

Рис. 9



Аналогично тому, как обычный куб имеет плоскую – двумерную – развертку (рис. 1), гиперкуб может быть «развернут» в трехмерном пространстве. Эта развертка будет состоять из 8 трехмерных граней – обычных кубов – и может быть изображена так, как показано на рис. 7. В четырехмерном пространстве каждый из кубов развертки граничит с шестью другими. На рис. 8 дан плоский чертеж трехмерного «изображения» гиперкуба (само это изображение легко соорудить из спичек и пластилина). Пространственную проекцию гиперкуба можно представить и изготовить по плоскому чертежу на рис. 9.

Л

ЛЕТНИЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

Во время летних каникул тысячи старшеклассников в разных краях и областях нашей страны вновь садятся за парты в летних физико-математических школах. Эти школы создаются при высших учебных заведениях и научно-исследовательских институтах. Ребята, которые интересуются физикой и математикой, могут углубить и расширить свои знания, познакомиться с единомышленниками – ровесниками, студентами, учеными.

В большинстве летних школ учебный процесс строится из лекций и семинаров, но иногда (например, в школах при Ленинградском и Красноярском университетах) организуются математические кружки и факультативы. Обычно в летних школах изучают традиционные разделы математики, не нашедшие достаточного отражения в программе общеобразовательной школы. А в Малой Академии наук в Крыму и Всесоюзной летней школе юных программистов при Вычислительном центре АН Сибирского отделения АН СССР впервые начато обучение программированию и вычислительной математике. В программе летних школ важное место занимает не только решение задач на семинарах и в кружках, но и подготовка к олимпиадам, специальным практикумам. Популярны «математические бои», конкурсы по решению задач.

Поскольку летние школы организуются крупными научными центрами и высшими учебными заведениями, то к преподаванию привлекаются ведущие специалисты. Здесь школьники могут поговорить в непринужденной атмосфере с учеными, знакомыми по книгам и телепередачам. Ученики летних физико-математических школ часто бывают на экскурсиях в научных центрах и высших учебных заведениях. Близость крупных научных центров позволяет ребятам быть в курсе современных направлений научного прогресса. Летние физико-математические школы различны и по содержанию занятий, и по принципам организации, однако во всех школах создается высокоинтеллектуальная, творческая атмосфера, осуществляется программа обучения, в которой органично соединены и занятия, и культурный досуг, и отдых, и общение. Особенно полезно общение сотрудников и учеников школы. Обычно преподаватели школ – молодые ученые, студенты – совмещают учебные и воспитательные обязанности. Они легко находят общий язык с воспитанниками, и общение в учебе не отделено от дружеских взаимоотношений. В круг интересов входят поэтому не только наука, но и вопросы общественной жизни, культуры.



В Красноярской летней школе старшеклассники занимаются математикой, физикой, химией.

Юность неразлучна со спортом, и спортивные соревнования, секции, туристские походы и, конечно, утренняя зарядка обеспечивают ребятам здоровье.

Во многих летних школах установились свои традиции: например, знаменитый «симпозиум фантастических проектов» в летней школе при Новосибирском государственном университете, спортивно-математические состязания и празднование Дня математика в Красноярской летней школе, математический КВН в летней школе города Батуми, общий сбор Малой Академии наук «Искатель» в Крыму.

Своим успехом летние школы во многом обязаны самостоятельности и увлеченности школьников. Деятельное участие ребят в жизни всего коллектива, дружба с молодыми сотрудниками приводят часто к тому, что недавние выпускники школ, а затем студенты и аспиранты вузов физико-математического профиля возвращаются в свою летнюю школу уже в качестве преподавателей и воспитателей.

Летние школы тесно связаны с другими формами внеклассной работы по математике – с научными обществами учащихся, заочными математическими школами. И для многих старшеклассников учеба в летней школе становится первым шагом на пути к овладению будущей профессией.

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Линейная функция – двучлен первой степени, т.е. функция вида $y = ax + b$. Линейная функция определена на всей числовой прямой. Функция называется линейной потому, что ее график есть прямая линия.

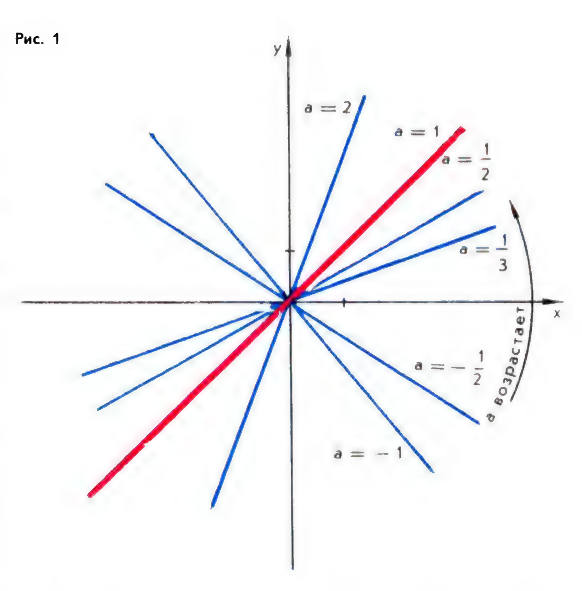
Рассмотрим два значения аргумента x_1 и x_2, им соответствуют значения линейной функции $y_1 = ax_1 + b$ и $y_2 = ax_2 + b$. Изменение аргумента на величину $x_2 - x_1$ вызывает изменение функции на величину $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, при этом отношение изменения функции к изменению аргумента равно a:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Таким образом, у линейной функции изменение функции пропорционально изменению аргумента, и это есть характеристическое свойство линейной функции. Поэтому с помощью линейной функции описываются пропорциональные зависимости.

Например, цена p купленного отреза ткани пропорциональна его длине l, а именно $p = kl$ (здесь k – цена одного метра ткани); при равномерном движении с постоянной скоростью v пройденный путь s пропорционален времени t и выражается формулой $s = vt$, т.е. s – линейная функция t.

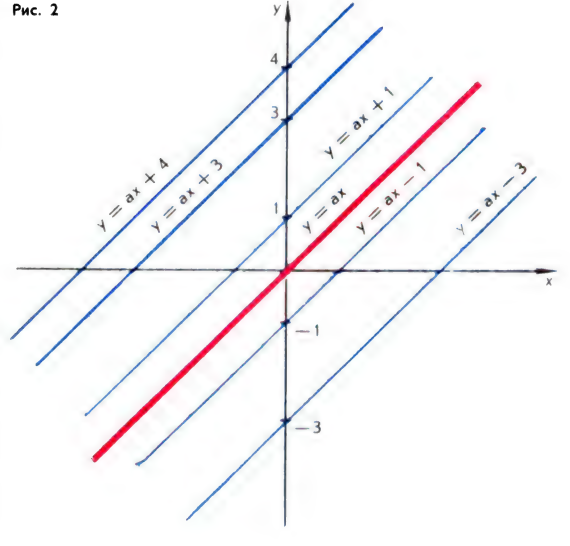
Рис. 1



Пример линейной функции дает зависимость между различными шкалами температур. Абсолютная температура $t_к$ (по Кельвину) связана с температурой $t_с$ на шкале Цельсия формулой $t_с = t_к + 273°$, а переход от температуры по Фаренгейту (шкале, принятой до сих пор в Англии и США) $t_ф$ к температуре на шкале Цельсия $t_с$ выражается такой линейной функцией: $t_ф = 1{,}8 t_с + 32°$ (на шкале Цельсия промежуток между точкой замерзания и точкой кипения разделен на 100 частей, а на шкале Фаренгейта – на 180, и 0°С соответствует 32°Ф).

Частный случай линейной функции – прямая пропорциональная зависимость $y = ax$, т.е. линейная функция при $b = 0$. График этой функции есть прямая, проходящая через начало координат (рис. 1). Число a называется

Рис. 2



угловым коэффициентом прямой и равен тангенсу угла α, образованного прямой с положительным направлением оси Ox.

График линейной функции $y = ax + b$ $(b \neq 0)$ получается из графика функции $y = ax$ параллельным переносом на b единиц вверх при $b > 0$ и на b единиц вниз при $b < 0$ (рис. 2). Поскольку прямая определяется своими двумя точками, то для построения графика линейной функции достаточно найти координаты лишь двух ее точек.

Линейная функция простейшая и, можно сказать, важнейшая среди всех функций. Многие физические законы выражаются с помощью линейной функции (мы уже говорили о пройденном пути при постоянной скорости), но важно то, что целый ряд сложных нелинейных зависимостей «в малом» можно считать линейными. Например, по закону Гука при небольших удлинениях (и только при них) сила упругости F пропорциональна величине x – удлинению пружины: $F = -kx$. Другой пример: напряжение V по закону Ома линейно зависит от силы тока J, именно $V = RJ$ (здесь R – сопротивление), однако этот закон также справедлив лишь при не очень больших изменениях силы тока.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

Линейным уравнением с неизвестными x_1, x_2, ..., x_n называют уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b; \qquad (1)$$

числа a_1, a_2, ..., a_n называют коэффициентами при неизвестных, число b – свободным членом уравнения.

Линейные уравнения с одним неизвестным умели решать еще в Древнем Вавилоне и в Египте более чем 4 тыс. лет назад. Приведем, например, задачу из папируса Ринда (его называют также папирусом Ахмеса) , хранящегося в Британском музее и относящегося к периоду 2000–1700 гг. до н. э.: «Найти число, если известно, что от прибавления к нему 2/3 его и вычитания от полученной суммы ее трети получается число 10». Решение этой задачи сводится к решению линейного уравнения

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10, \text{ откуда } x = 9.$$

Приведем также задачу Метродора, о жизни которого ничего не известно, кроме того, что он автор интересных задач, составленных в стихах.

Здесь погребен Диофант, и камень могильный
При счете искусном расскажет нам,
Сколь долог был его век.
Велением бога он мальчиком был шестую часть своей жизни;
В двенадцатой части затем прошла его светлая юность.
Седьмую часть жизни прибавим – перед нами очаг Гименея.
Пять лет протекли; и прислал Гименей ему сына.
Но горе ребенку! Едва половину он прожил
Тех лет, что отец, как скончался несчастный.
Четыре года страдал Диофант от утраты такой тяжелой
И умер, прожив для науки. Скажи мне,
Скольких лет достигнув, смерть восприял Диофант?

Решая линейное уравнение

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

находим, что $x = 84$ – столько лет прожил Диофант.

Сам Диофант много внимания уделял неопределенным уравнениям (так называют алгебраические уравнения или системы таких уравнений с двумя и большим числом неизвестных с целыми коэффициентами, для которых разыскиваются целые или рациональные решения; число неизвестных должно быть больше числа уравнений). Эти уравнения называются *диофантовыми уравнениями*. Правда, Диофант, живший на рубеже II – III вв., в основном занимался неопределенными уравнениями более высоких степеней.

Систему алгебраических уравнений, каждое из которых имеет вид (1), называют линейной системой. Коэффициенты уравнений, входящих в систему, нумеруют обычно двумя индексами, первый из которых – номер уравнения, а второй (как и в (1)) – номер неизвестного. Например, систему m уравнений с n неизвестными записывают в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

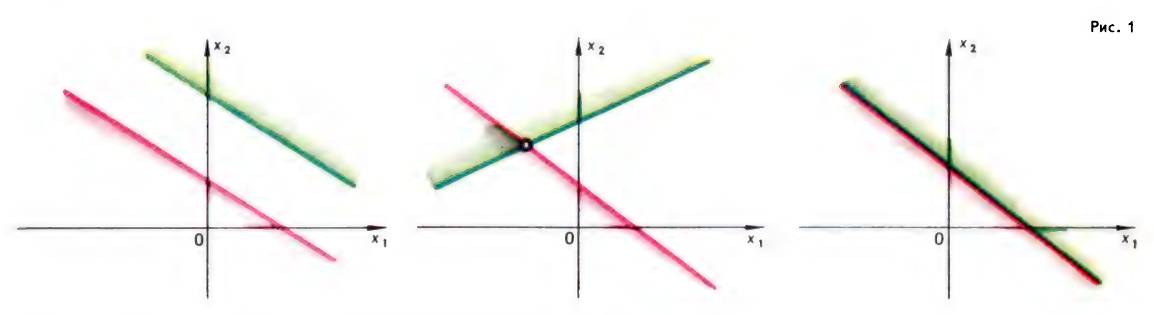
Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Умножим первое уравнение системы (3) на a_{22} и вычтем из полученного уравнения второе, умноженное на a_{12}; аналогично умножим второе уравнение системы (3) на a_{11} и вычтем из полученного уравнения первое, умноженное на a_{21}. После этого получится система:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 &= a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= b_1a_{22} - a_{12}b_2, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Рис. 1



которая есть следствие системы (3). Систему (4) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\Delta\cdot x_1=\Delta_1,\\ \Delta\cdot x_2=\Delta_2,\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где Δ – определитель *матрицы*, составленной из коэффициентов системы (см. *Определитель*), Δ_i – определители матриц, получаемых из предыдущей заменой i-го столбца на столбец из свободных членов, $i=1,2$. Далее, если $\Delta \neq 0$, то система (5) имеет единственное решение:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что эта пара чисел является также и решением системы (3). По такому же правилу ищут решение системы n линейных уравнений с n неизвестными: если определитель системы Δ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, причем

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы, составленной из коэффициентов системы, заменой в ней i-го столбца на столбец из свободных членов. Описанное правило решения линейных систем носит название правила Крамера. (Г. Крамер – швейцарский математик, 1704–1752).

Если $\Delta=0$, то должны обращаться в нуль и Δ_1, и Δ_2 (иначе (5), а тем более (3) не имеет решений). При выполнении условия $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$, если соответственные коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнения системы (3) пропорциональны, то система будет иметь бесконечно много решений; если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля (например, если $a_{12}\neq 0$), то x_1 можно взять любым, тогда

$$x_2=\frac{b_1}{a_{12}}-\frac{a_{11}x_1}{a_{12}}.$$

Осталось разобрать случай, когда система имеет вид

$$\left.\begin{aligned}0\cdot x_1+0\cdot x_2=b_1,\\ 0\cdot x_1+0\cdot x_2=b_2,\end{aligned}\right\}$$

для которого ответ очевиден: если $b_1=b_2=0$, то решением является любая пара чисел, в противном случае решений нет.

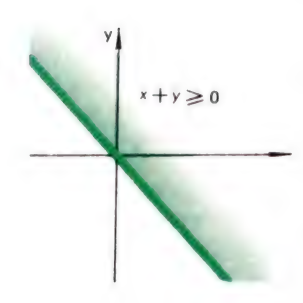
В общем случае для системы из n уравнений с n неизвестными при $\Delta\neq 0$ система имеет единственное решение, которое, как уже говорилось, можно найти по правилу Крамера. Если $\Delta=0$ и хотя бы один из определителей Δ_i отличен от нуля, система несовместна (т.е. не имеет решений). В случае, когда $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\ldots=\Delta_n=0$, система может либо быть несовместной, либо иметь бесконечно много решений. Установить, какой из этих двух случаев реализуется с помощью определителей, довольно сложно, и мы этим заниматься не будем. На практике для решения линейных систем правилом Крамера обычно не пользуются. Чаще всего для этих целей применяют метод Гаусса (см. *Неизвестных исключение*).

Как известно, линейное уравнение $a_1x_1+a_2x_2=b$ определяет прямую на плоскости $(x_1;x_2)$ в случае, когда хотя бы один из коэффициентов a_1 и a_2 отличен от нуля. Если мы возьмем на плоскости две прямые то возможны следующие случаи (рис. 1): 1) прямые параллельны и не имеют общих точек, и тогда система не имеет решений; 2) прямые пересекаются, и тогда система имеет одно решение; 3) прямые совпадают, и тогда система имеет бесконечно много решений. Но две «случайно» взятые прямые, «как правило», будут пересекаться, т.е., как правило, система двух линейных уравнений с двумя переменными будет иметь одно решение. Любая точка некоторой прямой на плоскости соответствует решению «системы» (состоящей из одного уравнения), т.е., как правило, имеет место случай 3 (случай 2 невозможен, а случай 1 реализуется, если мы возьмем уравнение $0\cdot x_1+0\cdot x_2=b$, где $b\neq 0$, не определяющее прямой на плоскости). Если же на плоскости взять 3 или больше прямых, то, вообще говоря, они могут все совпадать или проходить через одну точку, но, как правило, имеет место первый случай – у прямых нет общей точки.

ЛИНИЯ

Первые линии, с которыми мы знакомимся, изучая математику, – это прямая и окружность. Затем изучаем *гиперболу, параболу*, различные *спирали* и другие кривые. У каждой из них есть какие-то интересные математические свойства.

Рис. 1



Что же такое линия? Оказывается, дать строгое определение этого понятия совсем не просто. В «Началах» Евклида линия определялась как «длина без толщины». Однако такое определение не могло устроить математиков более позднего времени. После введения Р. Декартом системы координат появилась возможность дать представление о линии как о траектории движущейся точки. Приведем это определение. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две непрерывные функции $x = f(t)$ и $y = g(t)$. Сопоставим каждому значению t из отрезка $[a, b]$ точку на координатной плоскости с координатами $[f(t), g(t)]$. Совокупность всех таких точек и будем называть линией. Такой способ задания кривой называется параметрическим. Легко заметить связь параметрического задания линии с представлением о линии как о траектории движущейся точки; если считать параметр t временем, то $f(t)$ и $g(t)$ будут координатами движущейся точки в момент времени t.

Параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \alpha t, \\ y &= b + \beta t, \end{aligned}\right\}$$

а параметрическое уравнение окружности с центром в точке O с координатами (a, b) и радиусом R запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= a + R\cos t, \\ y &= b + R\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Но прямую на плоскости можно описать и одним уравнением:

$$Ax + By + C = 0,$$

как и окружность, уравнение которой имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

Может быть, можно считать линией совокупность всех точек плоскости, удовлетворяющих некоторому уравнению $F(x, y) = 0$?

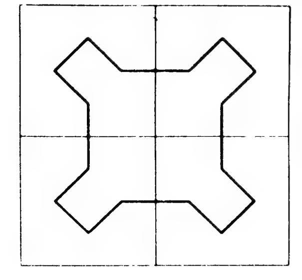
Да, можно, но с осторожностью. Не всякое уравнение такого вида определяет линию. Скажем, уравнению $x^2 + y^2 + 25 = 0$ не удовлетворяет ни одна точка плоскости, а уравнению $x + y - |x + y| = 0$ удовлетворяют все точки полуплоскости $x + y \geqslant 0$ (рис. 1).

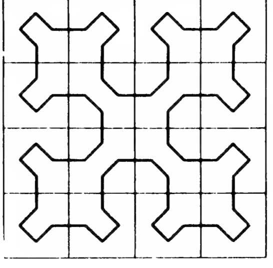
Подобные казусы бывают и при параметрическом задании линии. Хотя для каждого значения t из отрезка $[a, b]$ определена точка на плоскости, но совокупность этих точек может совершенно не соответствовать нашим интуитивным представлениям о линии, скажем, совпадать со множеством точек некоторого квадрата. Впервые такие линии обнаружил итальянский математик Д. Пеано (1858–1932), в честь которого их стали называть кривыми Пеано.

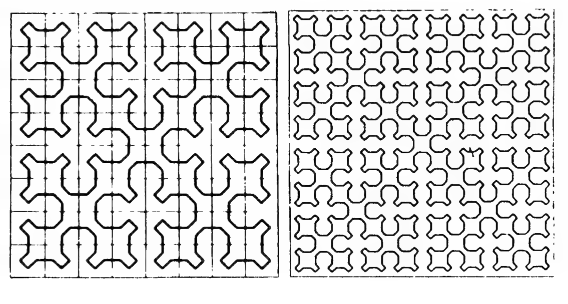
Способ построения одной из таких кривых изображен на рис. 2. Сначала берем простую крестообразную замкнутую ломаную, затем из четырех таких ломаных, соответственно уменьшенных, строим более сложную кривую, из четырех новых ломаных строим еще одну и т. д. Кривая, которая получится в пределе, и будет кривой Пеано. Для каждой ее точки можно указать значение t на отрезке $[0, 1]$, которому соответствует эта точка, причем близким точкам на отрезке $[0, 1]$ соответствуют близкие точки на кривой.

Кривая, которая проходит через все точки квадрата, естественно, не соответствует нашим представлениям о линии. Поэтому при определении линии часто на функции $f(t)$ и $g(t)$ накладывают помимо непрерывности и другие ограничения, например существование производных.

Рис. 2







Начнем с длины ломаной. Так как ломаная – объединение нескольких отрезков (ее звеньев), то длину ломаной легко найти, вычислив сумму длин всех ее звеньев.

Задача 1. Выпуклый многоугольник F находится в многоугольнике G. Доказать, что периметр многоугольника F меньше периметра объемлющего многоугольника G.

Решение. Продолжим стороны выпуклого многоугольника F до пересечения с контуром объемлющего многоугольника G и сложим ряд неравенств (рис. 1):

$|AM| + |MN| + |NH| \geqslant |AB| + |BH|,$

$|BH| + |HP| + |PQ| + |QK| \geqslant |BC| + |CK|,$

$|CK| + |KR| + |RS| + |SL| \geqslant |CD| + |DL|,$

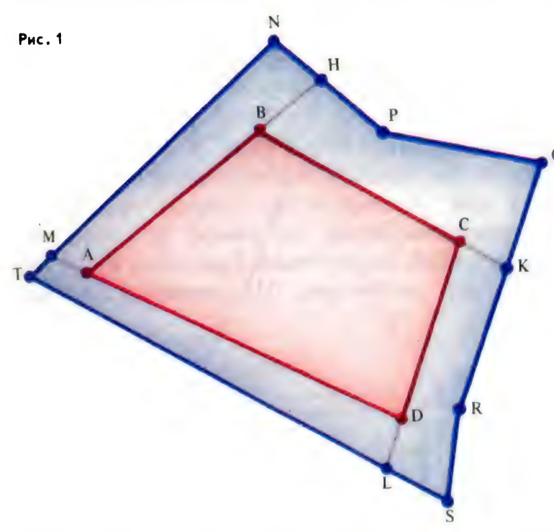
$|DL| + |LT| + |TM| \geqslant |DA| + |AM|.$

Уничтожая в левой и правой частях одинаковые слагаемые, получаем требуемое неравенство: $|NP| + |PQ| + |QR| + |RS| + |ST| + |TN| \geqslant |AB| + |BC| + |CD| + |DE|$.

Не обходится дело и без *софизмов*.

Задача 2. В равнобедренном прямоугольном треугольнике проведена пилообразная ломаная L_n, состоящая из n ступенек, примыкающих к гипотенузе (рис. 2). Ясно, что ее длина равна сумме длин катетов. В то же время при $n \to \infty$ ломаная L_n все более приближается к гипотенузе и в пределе сливается с ней. Значит, длина гипотенузы равна сумме длин катетов. В чем здесь ошибка?

Рис. 1



Решение. Из того, что предел ломаных $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ совпадает с гипотенузой AB, делается неправильный вывод о том, что это же имеет место и для длин, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n) = |AB|$, где через $l(L_n)$ обозначается длина ломаной L_n. Рис. 3 показывает, что какова бы ни была ломаная L, можно в любой близости от нее изобразить другую ломаную L' (с теми же концами), имеющую какую угодно большую длину. Поэтому если последовательность ломаных $\{L_n\}$ сходится к некоторой линии L и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n)$, то можно утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} l(L_n) \geqslant l(L)$. Кратко это выражают словами: длина ломаной полунепрерывна снизу.

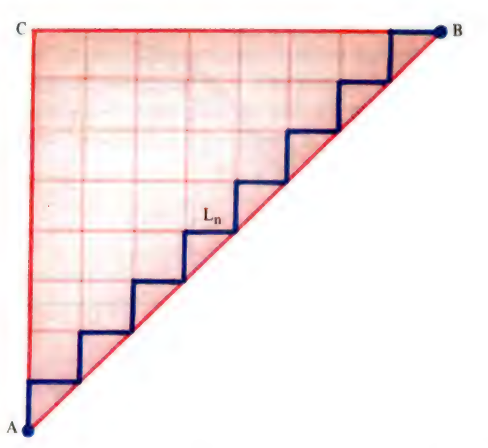


Рис. 2

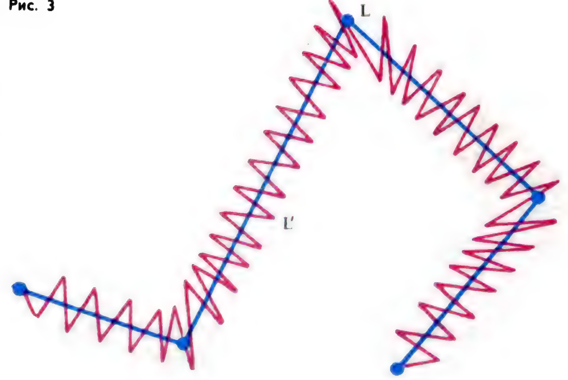
Сформулируем основные свойства длины ломаной:

1) длина любой ломаной неотрицательна;
2) равные ломаные имеют равные длины;
3) если ломаная L разбита некоторой точкой на две ломаные L_1, L_2, то $l(L) = l(L_1) + l(L_2)$;
4) длина отрезка, принятая за единицу измерения длин, равна 1;
5) длина ломаной полунепрерывна снизу.

Оказывается, что с помощью этих свойств можно определить понятие длины и для кривых линий. Линию L, которая соединяет две точки A, B и не пересекает себя, называют простой дугой с концами A и B. Основной результат теории длины (теорема существования и единственности) утверждает, что на множестве всех простых дуг существует и притом только одна функция $l(L)$, называемая длиной, которая обладает пятью сформулированными выше свойствами. Разница будет лишь в том, что для некоторых простых дуг длина оказывается бесконечной; такие простые дуги называют неспрямляемыми.

Для вычисления длины используют вписанные ломаные. Идя вдоль простой дуги L от одного конца A к другому концу B, мы можем

Рис. 3



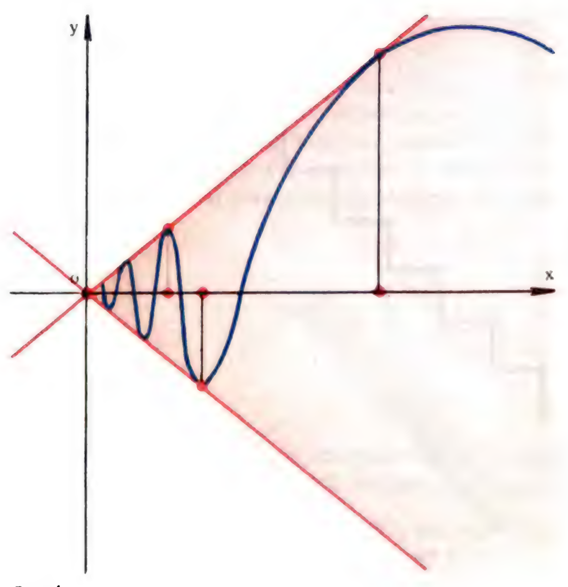


Рис. 4

последовательно отметить на L несколько точек A_1, A_2, ..., A_n и рассмотреть вписанную ломаную $AA_1A_2 \ldots A_n$. Если теперь $\{L_n\}$ – такая последовательность вписанных в линию L ломаных, что наибольшее звено ломаной L_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то эта последовательность сходится к L. Следовательно,

$\lim\limits_{n \to \infty} l(L_n) \geqslant l(L)$. С другой стороны, длина каждого звена $|A_iA_i + 1|$ вписанной ломаной не больше длины соответствующей дуги линии L, откуда следует, что $l(L_n) \leqslant l(L)$, и потому

$\lim\limits_{n \to \infty} l(L_n) \leqslant l(L)$. Таким образом,

$$\lim_{n \to \infty} l(L_n) = l(L).$$

Линия L будет неспрямляемой, т.е. $l(L)$ бесконечна, если существует вписанная ломаная какой угодно большой длины. Таков, например, график непрерывной функции

$f(x) = x \sin \frac{1}{x} (0 < x \leqslant 1)$, дополненной соглашением $f(0) = 0$ (рис. 4).

Заметим, что если функция $f(x)$, рассматриваемая на $[a, b]$, имеет непрерывную производную, то график L этой функции является спрямляемой простой дугой, и ее длина равна

$$l(L) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Справедливость этого соотношения поясняется:

$$dy = f'(x)\, dx, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2,$$
$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))}\, dx,$$

где s – длина дуги кривой от точки A до M. С помощью этой теоремы можно вычислять длины различных кривых. Например, длина дуги параболы $y = x^2$ на отрезке $[-a, a]$ равна

$$a\sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2} ln(2a + \sqrt{4a^2 + 1}).$$

Древние математики не владели понятиями математического анализа. Однако они умели вычислять длины окружности и некоторых спиралей.

Вычисляя периметры правильных вписанных 2^n-угольников и описанных 2^n-угольников, Архимед нашел, что *число* π, участвующее в формуле длины окружности: $C = 2\pi r$, заключено между $3\frac{10}{71}$ и $3\frac{1}{7}$, т.е.

$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1429.$$

ЛОБАЧЕВСКОГО ГЕОМЕТРИЯ

История создания геометрии Лобачевского одновременно является историей попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат представляет собой одну из *аксиом*, положенных Евклидом в основу изложения геометрии (см. *Евклид и его «Начала»*). Пятый постулат – последнее и самое сложное из предложений, включенных Евклидом в его аксиоматику геометрии. Напомним формулировку пятого постулата: если две прямые пересекаются третьей так, что по какую-либо сторону от нее сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то по эту же сторону исходные прямые пересекаются. Например, если на рис. 1 угол α – прямой, а угол β чуть меньше прямого, то прямые l_1 и l_2 непременно пересекаются, причем справа от прямой m. Многие теоремы Евклида (например, «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны») выражают гораздо более простые факты, чем пятый постулат. К тому же проверить на эксперименте пятый постулат довольно сложно. Достаточно сказать, что ес-

Рис. 1

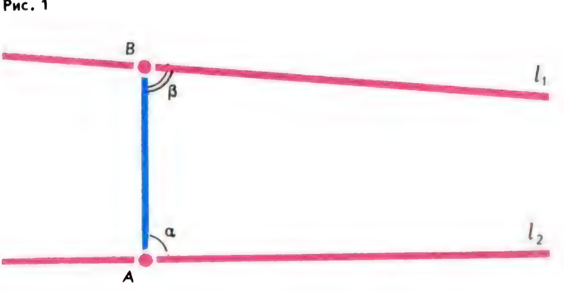
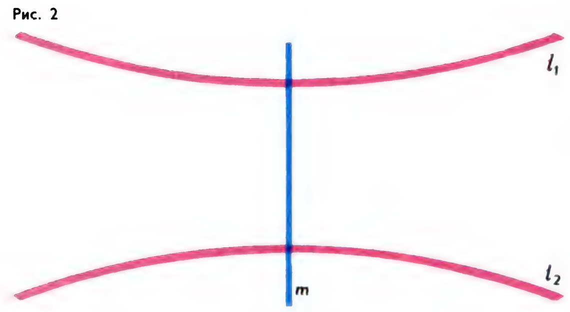


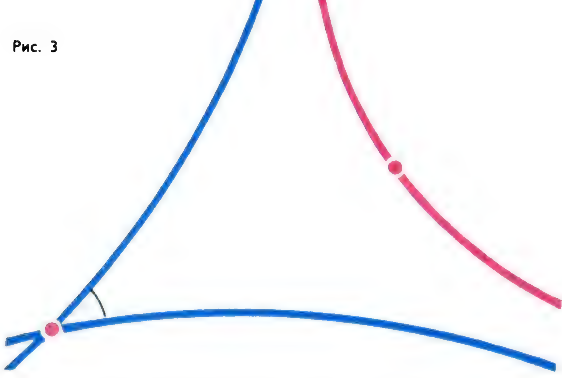
Рис. 2



ли на рис. 1 расстояние $|AB|$ считать равным 1 м, а угол β отличается от прямого на одну угловую секунду, то можно подсчитать, что прямые l_1 и l_2 пересекаются на расстоянии свыше 200 км от прямой *m*.

Многие математики, жившие после Евклида, пытались доказать, что эта аксиома (пятый постулат) – лишняя, т.е. она может быть доказана как теорема на основании остальных аксиом. Так, в V в. математик Прокл (первый комментатор трудов Евклида) предпринял такую попытку. Однако в своем доказательстве Прокл незаметно для себя использовал следующее утверждение: два перпендикуляра к одной прямой на всем своем протяжении находятся на ограниченном расстоянии друг от друга (т.е. две прямые, перпендикулярные третьей, не могут неограниченно удаляться друг от друга, как линии на рис. 2). Но при всей кажущейся наглядной «очевидности» это утверждение при строгом

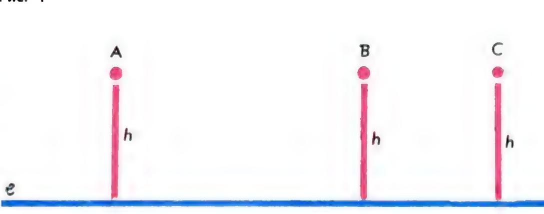
Рис. 3



аксиоматическом изложении геометрии требует обоснования. В действительности использованное Проклом утверждение является эквивалентом пятого постулата; иначе говоря, если его добавить к остальным аксиомам Евклида в качестве еще одной новой аксиомы, то пятый постулат можно доказать (что и сделал Прокл), а если принять пятый постулат, то можно доказать сформулированное Проклом утверждение.

Критический анализ дальнейших попыток доказать пятый постулат выявил большое число аналогичных «очевидных» утверждений, которыми можно заменить пятый постулат в аксиоматике Евклида. Вот несколько примеров таких эквивалентов пятого постулата. 1) Через точку внутри угла, меньшего, чем развернутый, всегда можно провести прямую, пересекающую его стороны, т.е. прямые линии на плоскости не могут располагаться так, как показано на рис. 3. 2) Существуют два

Рис. 4

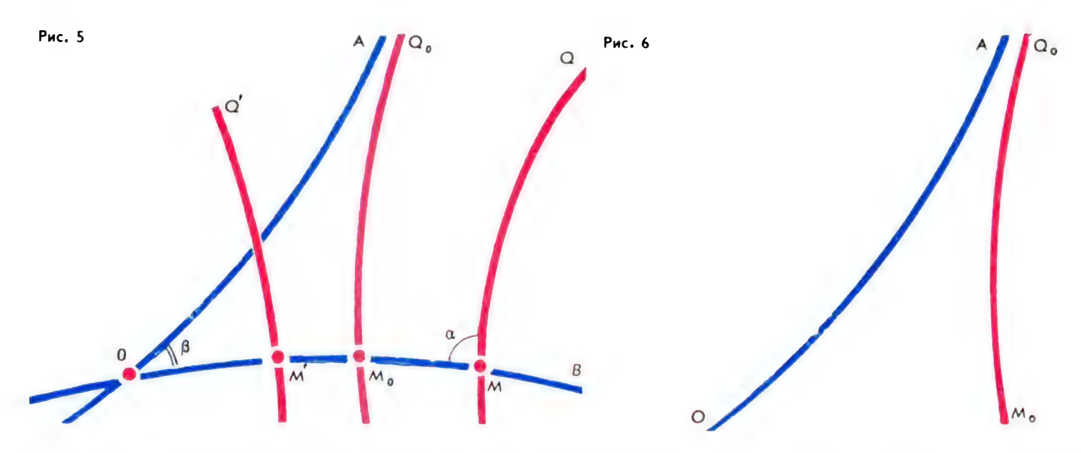


подобных треугольника, не равных между собой. 3) Три точки, расположенные по одну сторону прямой *l* на равном расстоянии от нее (рис. 4), лежат на одной прямой. 4) Для всякого треугольника существует описанная окружность.

Постепенно «доказательства» становятся все изощреннее, в них все глубже прячутся малозаметные эквиваленты пятого постулата. Допустив, что пятый постулат неверен, математики пытались прийти к логическому противоречию. Они приходили к утверждениям, чудовищно противоречащим нашей геометрической интуиции, но логического противоречия не получалось. А может быть, мы вообще никогда не придем на таком пути к противоречию? Не может ли быть так, что, заменив пятый постулат Евклида его отрицанием (при сохранении остальных аксиом Евклида), мы придем к новой, неевклидовой геометрии, которая во многом не согласуется с нашими привычными наглядными представлениями, но тем не менее не содержит никаких логических противоречий? Эту простую, но очень дерзкую мысль математики не могли выстрадать в течение двух тысячелетий после появления «Начал» Евклида.

Первым, кто допустил возможность существования неевклидовой геометрии, в которой пятый постулат заменяется его отрицанием, был К.Ф. *Гаусс*. То, что Гаусс владел идеями неевклидовой геометрии, было обнаружено лишь после смерти ученого, когда стали изучать его архивы. Гениальный Гаусс, к мнениям которого все прислушивались, не рискнул опубликовать свои результаты по неевклидовой геометрии, опасаясь быть непонятым и втянутым в полемику.

XIX в. принес решение загадки пятого постулата. К этому открытию независимо от Гаусса пришел и наш соотечественник – профессор Казанского университета *Н.И. Лобачевский*. Как и его предшественники, Лобачевский вначале пытался выводить различные следствия из отрицания пятого постулата, надеясь, что рано или поздно он придет к противоречию. Однако он доказал много десятков теорем, не обнаруживая логических



противоречий. И тогда Лобачевскому пришла в голову догадка о непротиворечивости геометрии, в которой пятый постулат заменен его отрицанием. Лобачевский назвал эту геометрию воображаемой. Свои исследования Лобачевский изложил в ряде сочинений, начиная с 1829 г. Но математический мир не принял идеи Лобачевского. Ученые не были подготовлены к мысли о том, что может существовать геометрия, отличная от евклидовой. И лишь Гаусс выразил свое отношение к научному подвигу русского ученого: он добился избрания в 1842 г. Н. И. Лобачевского членом-корреспондентом Геттингенского королевского научного общества. Это единственная научная почесть, выпавшая на долю Лобачевского при жизни. Он умер, так и не добившись признания своих идей.

Рассказывая о геометрии Лобачевского, нельзя не отметить еще одного ученого, который вместе с Гауссом и Лобачевским делит заслугу открытия неевклидовой геометрии. Им был венгерский математик Я. Бойяи (1802–1860). Его отец, известный математик Ф. Бойяи, всю жизнь работавший над теорией параллельных, считал, что решение этой проблемы выше сил человеческих, и хотел оградить сына от неудач и разочарований. В одном из писем он писал ему: «Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи и всякий светоч, всякую радость жизни в ней похоронил... она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни...» Но Янош не внял предостережениям отца. Вскоре молодой ученый независимо от Гаусса и Лобачевского пришел к тем же идеям. В приложении к книге своего отца, вышедшей в 1832 г., Я. Бойяи дал самостоятельное изложение неевклидовой геометрии.

В геометрии Лобачевского (или геометрии Лобачевского – Бойяи, как ее иногда называют) сохраняются все теоремы, которые в евклидовой геометрии можно доказать без использования пятого постулата (или аксиомы параллельности – одного из эквивалентов пятого постулата,– включенной в наши дни в школьные учебники). Например: вертикальные углы равны; углы при основании равнобедренного треугольника равны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр; сохраняются также признаки равенства треугольников и др. Однако теоремы, при доказательстве которых применяется аксиома параллельности, видоизменяются. Теорема о сумме углов треугольника – первая теорема школьного курса, при доказательстве которой используется аксиома параллельности. Здесь нас ожидает первый «сюрприз»: в геометрии Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше 180°.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то в евклидовой геометрии равны и третьи углы (такие треугольники подобны). В геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников. Более того, в геометрии Лобачевского имеет место четвертый признак равенства треугольников: если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

Разность между 180° и суммой углов треугольника ABC в геометрии Лобачевского положительна; она называется дефектом этого треугольника. Оказывается, что в этой геометрии площадь треугольника замечательным образом связана с его дефектом: $S_{ABC} = k \cdot D_{ABC}$, где S и D означают площадь и дефект треугольника, а число k зависит от выбора единиц измерения площадей и углов.

Пусть теперь AOB – некоторый острый угол (рис. 5). В геометрии Лобачевского можно выбрать такую точку M на стороне OB, что перпендикуляр MQ к стороне OB не пересекается с другой стороной угла. Этот факт как раз подтверждает, что не выполняется пятый постулат: сумма углов α и β меньше развернутого угла, но прямые OA и MQ не пересекаются. Если начать приближать точку M к O, то найдется такая «критическая» точка M_0, что перпендикуляр M_0Q_0 к стороне OB все еще не пересекается со стороной OA, но для любой точки M', лежащей между O и M_0,

соответствующий перпендикуляр $M'Q'$ пересекается со стороной OA. Прямые OA и M_0Q_0 все более приближаются друг к другу, но общих точек не имеют. На рис. 6 эти прямые изображены отдельно; именно такие неограниченно приближающиеся друг к другу прямые Лобачевский называет в своей геометрии параллельными. А два перпендикуляра к одной прямой (которые неограниченно удаляются друг от друга, как на рис. 2) Лобачевский называет расходящимися прямыми. Оказывается, что этим и ограничиваются все возможности расположения двух прямых на плоскости Лобачевского: две несовпадающие прямые либо пересекаются в одной точке, либо параллельны (рис. 6), либо являются расходящимися (в этом случае они имеют единственный общий перпендикуляр, рис. 2).

На рис. 7 перпендикуляр MQ к стороне OB угла AOB не пересекается со стороной OA, а прямые OB', $M'Q'$ симметричны прямым OB, MQ относительно (OA). Далее, $|OM| = |MB|$, так что (MQ) – перпендикуляр к отрезку OB в его середине и аналогично $(M'Q')$ – перпендикуляр к отрезку OB' в его середине. Эти перпендикуляры не пересекаются, и потому не существует точки, одинаково удаленной от точек O,B,B', т.е. треугольник OBB' не имеет описанной окружности.

На рис. 8 изображен интересный вариант расположения трех прямых на плоскости Лобачевского: каждые две из них параллельны (только в разных направлениях). А на рис. 9 все прямые параллельны друг другу в одном направлении (пучок параллельных прямых). Красная линия на рис. 9 «перпендикулярна» всем проведенным прямым (т.е. касательная к этой линии в любой ее точке M перпендику-

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ (1792–1856)



С 14 лет жизнь Н. И. Лобачевского была связана с Казанским университетом. Его студенческие годы приходились на благополучный период в истории университета. Было у кого учиться математике; среди профессоров выделялся М. Ф. Бартельс, сотоварищ первых шагов в математике *К. Ф. Гаусса.*

С 1814 г. Лобачевский преподает в университете: читает лекции по математике, физике, астрономии, заведует обсерваторией, возглавляет библиотеку. В течение нескольких лет он избирался деканом физико-математического факультета.

С 1827 г. начинается 19-летний период его непрерывного ректорства. Все надо было начинать заново: заниматься строительством, привлекать новых профессоров, менять студенческий режим. На это уходило почти все время.

Еще в первых числах февраля 1826 г. он передал в университет рукопись «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», 11 февраля он выступил с докладом на заседании Совета университета. Собственно, речь шла не о доказательстве пятого постулата Евклида, а о построении геометрии, в которой имеет место его отрицание, т.е. о доказательстве его невыводимости из остальных аксиом. Вероятно, никто из присутствовавших не мог уследить за ходом мысли Лобачевского. Созданная комиссия из членов Совета несколько лет не давала заключения.

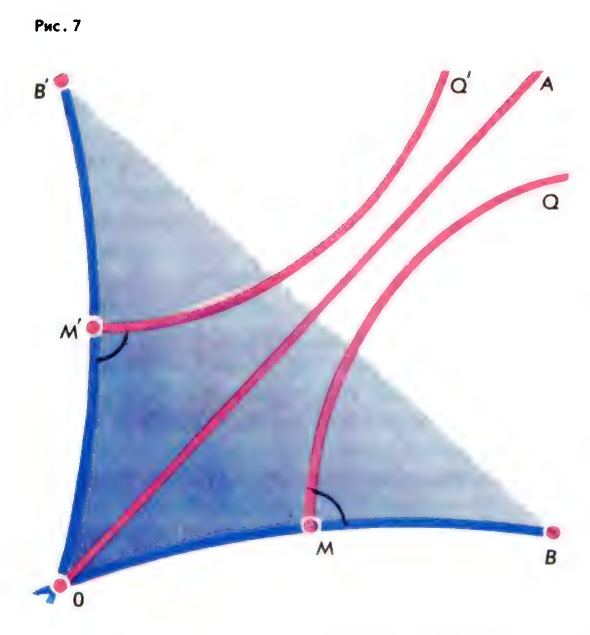
В 1830 г. в «Казанском вестнике» выходит работа «О началах геометрии», представляющая собой извлечение из доклада на Совете. Чтобы разобраться в ситуации, решили воспользоваться помощью столицы: в 1832 г. статью послали в Петербург. И здесь никто ничего не понял, работа была квалифицирована как бессмысленная. Не следует слишком сурово судить русских ученых: нигде в мире математики еще не были готовы воспринять идеи неевклидовой геометрии.

Ничто не могло поколебать уверенность Лобачевского в своей правоте. В течение 30 лет он продолжает развивать свою геометрию, пытается делать изложение более доступным, публикует работы по-французски и по-немецки.

Немецкую версию изложения прочитал Гаусс и, разумеется, понял автора с полуслова. Он прочитал его работы на русском языке и оценил их в письмах к ученикам, но публичной поддержки новой геометрии Гаусс не оказал.

Н. И. Лобачевский дослужился до высоких чинов, он был награжден большим числом орденов, пользовался уважением окружающих, но о его геометрии предпочитали не говорить, даже в те дни, когда Казань прощалась с ним. Прошло еще не менее двадцати лет, прежде чем геометрия Лобачевского завоевала права гражданства в математике.

Рис. 7



лярна прямой, проходящей через M). Эта линия называется предельной окружностью, или орициклом. Прямые рассмотренного пучка являются как бы ее «радиусами», а «центр» предельной окружности лежит в бесконечности, поскольку «радиусы» параллельны. В то же время предельная окружность не является прямой линией, она «искривлена». И другие свойства, которыми в евклидовой геометрии обладает прямая, в геометрии Лобачевского оказываются присущими другим линиям. Например, множество точек, находящихся по одну сторону от данной прямой на данном расстоянии от нее, в геометрии Лобачевского представляет собой кривую линию (она называется эквидистантой).

Мы кратко коснулись только некоторых фактов геометрии Лобачевского, не упоминая многих других очень интересных и содержательных теорем (например, длина окружности и площадь круга радиуса r здесь растут в зависимости от r по показательному закону). Возникает убежденность, что эта теория, богатая очень интересными и содержательными фактами, в самом деле непротиворечива. Но эта убежденность (которая была у всех трех творцов неевклидовой геометрии) не заменяет доказательства непротиворечивости.

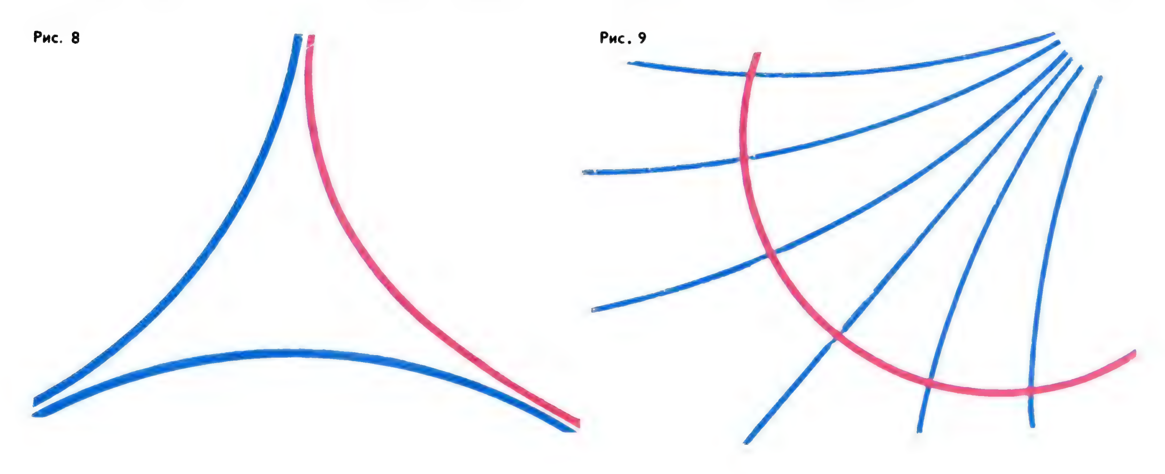
Чтобы получить такое доказательство, надо было построить модель. И Лобачевский это хорошо понимал и пытался ее найти.

Но сам Лобачевский этого уже не смог сделать. Построение такой модели (т. е. доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского) выпало на долю математиков следующего поколения.

В 1868 г. итальянский математик Э. Бельтрами исследовал вогнутую поверхность, называемую псевдосферой (рис. 10), и доказал, что на этой поверхности действует геометрия Лобачевского! Если на этой поверхности нарисовать кратчайшие линии («геодезические») и измерять по этим линиям расстояния, составлять из дуг этих линий треугольники и т. д., то оказывается, что в точности реализуются все формулы геометрии Лобачевского (в частности, сумма углов любого треугольника меньше 180°). Правда, на псевдосфере реализуется не вся плоскость Лобачевского, а лишь ее ограниченный кусок, но все же этим была пробита первая брешь в глухой стене непризнания Лобачевского. А через два года немецкий математик Ф. Клейн (1849–1925) предлагает другую модель плоскости Лобачевского.

Клейн берет некоторый круг K и рассматривает такие проективные преобразования плоскости (см. *Проективная геометрия*), которые отображают круг K на себя. «Плоскостью» Клейн называет внутренность круга K, а указанные проективные преобразования считает «движениями» этой «плоскости». Далее, каждую хорду круга K (без концов, поскольку берутся только внутренние точки круга) Клейн считает «прямой». Поскольку «движения» представляют собой проективные преобразования, «прямые» переходят при этих «движениях» в «прямые». Теперь в этой «плоскости» можно рассматривать отрезки, треугольники и т. д. Две фигуры называются

Рис. 8 Рис. 9



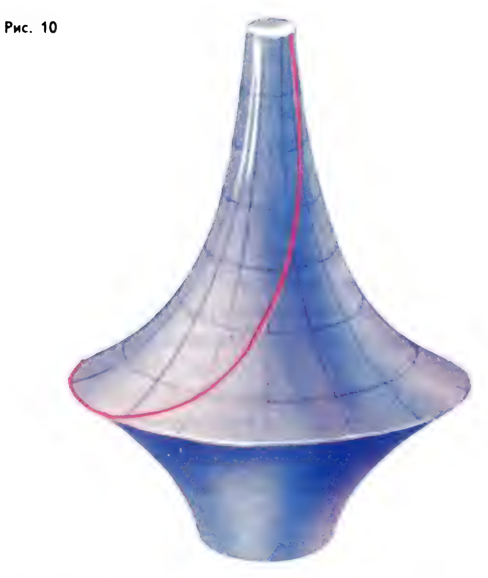


Рис. 10

«равными», если одна из них может быть переведена в другую некоторым «движением». Тем самым введены все понятия, упоминаемые в аксиомах геометрии, и можно производить проверку выполнения аксиом в этой модели. Например, очевидно, что через

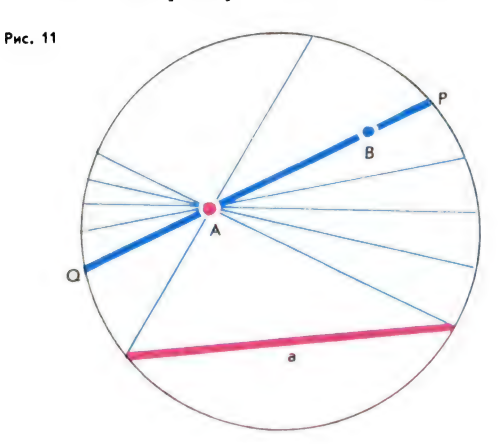


Рис. 11

любые две точки *A*, *B* проходит единственная «прямая» (рис. 11). Можно проследить также, что через точку *A*, не принадлежащую «прямой» *a*, проходит бесконечно много «прямых», не пересекающих *a*. Дальнейшая проверка показывает, что в модели Клейна выполняются и все остальные аксиомы геометрии Лобачевского. В частности, для любой «прямой» *l* (т. е. хорды круга *K*) и любой точки *A* этой «прямой» существует «движение», переводящее ее в другую заданную прямую *l'* с отмеченной на ней точкой *A'*. Это и позволяет проверить выполнение всех аксиом геометрии Лобачевского.

Еще одна модель геометрии Лобачевского была предложена французским математиком А. Пуанкаре (1854–1912). Он также рассматривает внутренность некоторого круга *K*; «прямыми» он считает дуги окружностей, которые в точках пересечения с границей круга *K* касаются радиусов (рис. 12). Не говоря подробно о «движениях» в модели Пуанкаре (ими будут круговые преобразования, в частности инверсии относительно «прямых», переводящие круг *K* в себя), ограничимся указанием рис. 13, показывающего, что в этой модели евклидова аксиома параллельности места не имеет. Интересно, что в этой модели окружность (евклидова), расположенная внутри круга *K*, оказывается «окружностью» и в смысле геометрии Лобачевского; окружность, касающаяся границы *Г* круга *K* изображает орицикл, а дуга окружности, пересекающая *Г* (но не касающаяся радиусов),– эквидистанту. Заметим еще, что в геометрии Лобачевского правильный *n*-угольник может иметь любой угол при вершине, меньший $180°(1 - 2/n)$ (т. е. меньший аналогичного угла в евклидовой геометрии). Поэтому для любого *n* существует «паркет», представляющий собой замощение плоскости Лобачевского правильными *n*-угольниками (без пропусков и перекрытий). На рис. 14 приведен такой «паркет», изображенный в модели Пуанкаре (замощение плоскости Лобачевского правильными восьмиугольниками).

Рис. 12

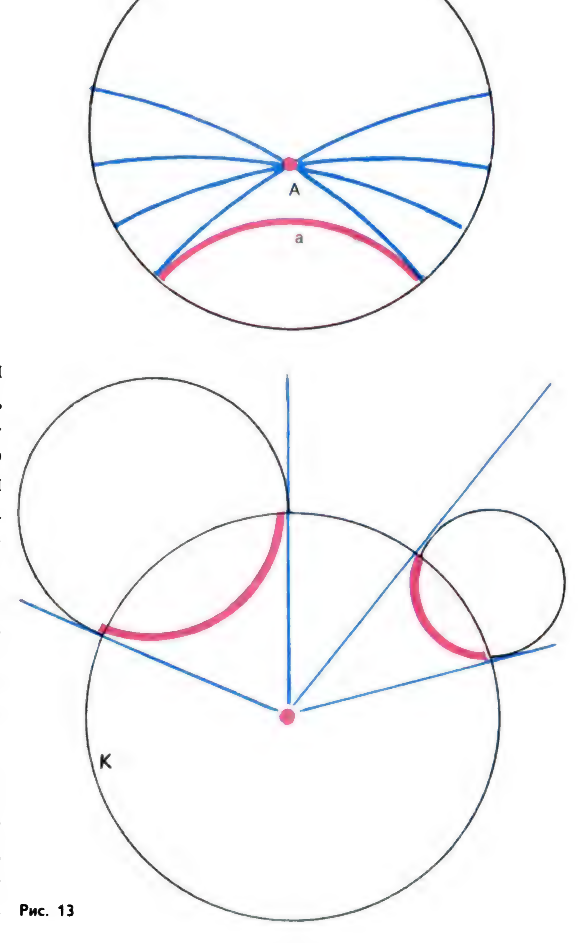
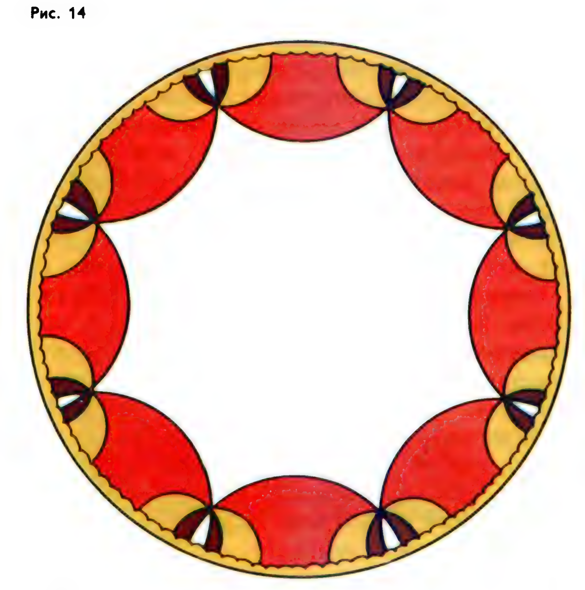


Рис. 13

Рис. 14



Пуанкаре придумал фантастический мир, «жители» которого должны были бы принять геометрию Лобачевского из физических экспериментов. Для этого Пуанкаре предположил, что круг K представляет собой неоднородную оптическую среду, в которой скорость света в точке $A \in K$ равна расстоянию точки A от границы круга K. Тогда свет будет (в соответствии с принципом Ферма о минимальности времени движения по световой траектории) распространяться как раз по «прямым» рассмотренной модели. Свет не может за конечное время дойти до границы (поскольку там его скорость убывает до нуля), и потому этот мир будет восприниматься его «жителями» бесконечным, причем по своей метрике и свойствам совпадающим с плоскостью Лобачевского.

Впоследствии были предложены и другие модели геометрии Лобачевского. Этими моделями была окончательно установлена непротиворечивость геометрии Лобачевского. Тем самым было показано, что геометрия Евклида не является единственно возможной. Это оказало большое прогрессивное воздействие на все дальнейшее развитие геометрии и математики в целом.

А в XX в. было обнаружено, что геометрия Лобачевского не только имеет важное значение для абстрактной математики, как одна из возможных геометрий, но и непосредственно связана с приложениями математики к физике. Оказалось, что взаимосвязь пространства и времени, открытая в работах Х. Лоренца, А. Пуанкаре, А. Эйнштейна, Г. Минковского и описываемая в рамках специальной теории относительности, имеет непосредственное отношение к геометрии Лобачевского. Например, в расчетах современных синхрофазотронов используются формулы геометрии Лобачевского.

ЛОГАРИФМ

Логарифмом числа N по основанию a (обозначается $\log_a N$) называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число N, т.е. $b = \log_a N$, если $a^b = N$.

Логарифм определен для любого положительного числа N при любом отличном от единицы положительном основании a. Каждому положительному числу при данном основании соответствует единственный логарифм.

По определению логарифма справедливо равенство

$$a^{\log_a N} = N,$$

из которого на основе свойств *показательной функции* устанавливаются основные свойства логарифмов (здесь M, N и k – положительные числа):

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N,$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N, \qquad (1)$$

$$\log_a M^k = k \log_a M,$$

$$\log_a \sqrt[k]{M} = \frac{1}{k} \log_a M.$$

Эти свойства позволяют сводить умножение и деление чисел (представленных в виде степеней некоторого числа, принятого за основание) к сложению и вычитанию показателей степеней, а возведение в степень и извлечение корня – к умножению и делению на показатель степени, поэтому применение логарифмов упрощает выполнение умножения и деления. На этом основан очень популярный прежде счетный прибор – логарифмическая линейка, которая сейчас всюду вытесняется микрокалькуляторами.

При нашей десятичной системе счисления самым удобным основанием является число 10. Логарифм по основанию 10 называется десятичным логарифмом и обозначается lg:

$$\lg N = \log_{10} N.$$

При основании, равном 10, только логарифмы целых степеней числа 10 представляются целыми числами ($\lg 10^3 = 3$, $\lg 0{,}01 = \lg 10^{-2} = -2$), логарифмы же остальных чисел нецелые. Целая часть значения логарифма называется характеристикой, дробная – мантиссой.

Любое положительное число N всегда можно представить в виде $N = 10^n \cdot x$, где n – целое число, а x заключено в пределах от 1 до 10. Из этого представления числа N следует, что $\lg N = n + \lg x$, где n – характеристика, а $\lg x$ – мантисса логарифма числа N.

Для числа, большего единицы, характеристика на единицу меньше числа цифр у це-

лой части этого числа. Для числа, заключенного между нулем и единицей и записанного десятичной дробью, характеристика отрицательна и равна взятому со знаком минус числу нулей до первой значащей цифры, например для числа 0,0216 его характеристика равна −2.

Десятичные логарифмы используются в практике главным образом в силу исторической традиции. Гораздо более важными в математике и ее приложениях являются натуральные логарифмы, т.е. логарифмы с основанием e. Это число, к которому неограниченно приближаются числа вида $(1 + 1/n)^n$ при неограниченном возрастании числа n. Буквой e это число предложил назвать Л. Эйлер. Важность логарифмической функции с основанием объясняется тем, что в математике используется показательная функция, как правило, с основанием e, а поэтому важна и обратная к ней функция.

Логарифмы были введены шотландским математиком Дж. Непером (1550–1617) и независимо от него швейцарским механиком и математиком И. Бюрги (1552–1632). Бюрги пришел к логарифмам раньше, но опубликовал свои таблицы с опозданием (в 1620 г.), и первой в 1614 г. появилась работа Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов».

Первые таблицы десятичных логарифмов были составлены изобретательным и остроумным вычислителем, английским математиком Г. Бриггсом (1561–1630).

На русском языке первые логарифмические таблицы были изданы в 1703 г.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Логарифмическая функция по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) обозначается $y = \log_a x$ и определяется как функция, обратная *показательной функции* $y = a^x$ с тем же самым основанием. Так как логарифмическая и показательная функции взаимно-обратны, то график логарифмической функции (он иногда называется «логарифмикой») получается из графика показательной функции симметрией относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 1). Логарифмическая функция определена для положительных x и при основании a, большем единицы, является монотонно возрастающей функцией. Из свойств логарифмов (1) и (2) (см. *Логарифм*) легко устанавливается, что

$$\log_{1/a} x = -\log_a x,$$

откуда следует, что графики функций $y = \log_{1/a} x$ и $y = \log_a x$ симметричны друг другу относительно оси Ox. Свойства логарифмической функции хорошо иллюстрирует рис. 2. Заметим, что ординаты любых двух кривых на рис. 2 пропорциональны, это непосредственно следует из формулы

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x.$$

В математическом анализе особое значение имеет логарифмическая функция по основанию e, она называется натуральным логарифмом и обозначается $y = \ln x$. Производная от этой функции имеет весьма простой вид, а именно $(\ln x)' = 1/x$. На рис. 3 сопоставлены графики $y = \lg x$ и $y = \ln x$.

Рис. 1

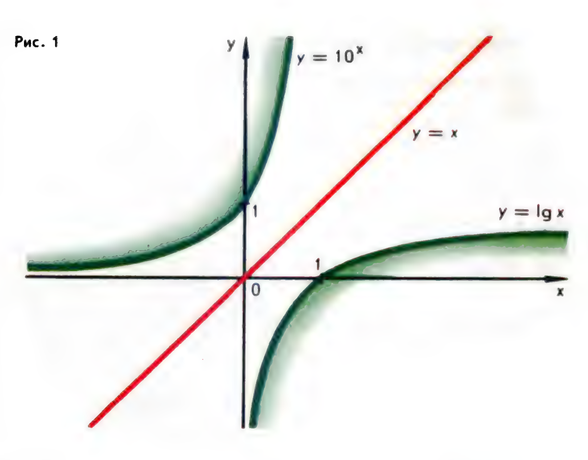
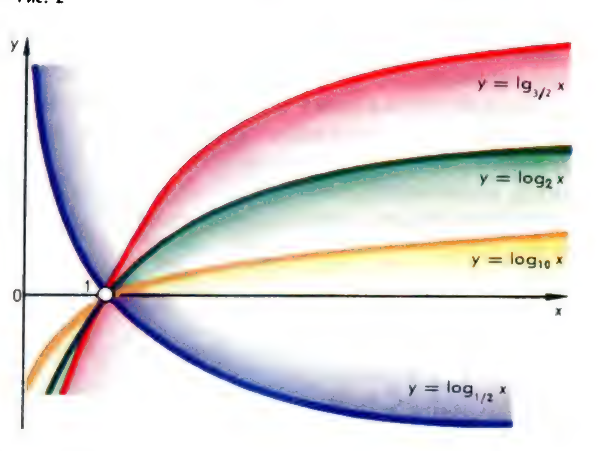


Рис. 2



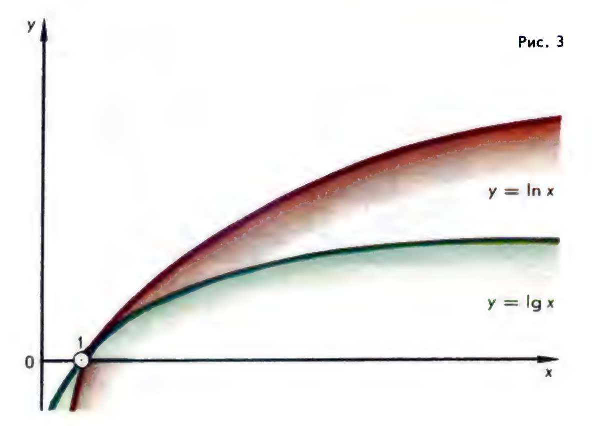


Рис. 3

М

МАГИЧЕСКИЕ И ЛАТИНСКИЕ КВАДРАТЫ

Если внимательно присмотреться к числам от 1 до 16, расположенным в клетках квадрата на рис. 1, то можно заметить следующую закономерность: сумма чисел в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и по каждой из диагоналей одна и та же. Такой квадрат и все квадраты, обладающие аналогичным свойством, получили название магических.

Задачи составления и описания магических квадратов интересовали математиков с древнейших времен. Однако полного описания всех возможных магических квадратов не получено и до сего времени. Магических квадратов 2×2 не существует. На рис. 2 изображен единственный магический квадрат 3×3. Единственный в том смысле, что все остальные магические квадраты 3×3 получаются из него либо поворотом вокруг центра, либо отражением относительно одной из его осей симметрии.

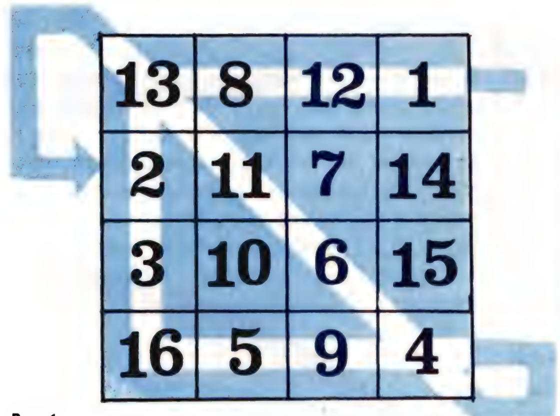
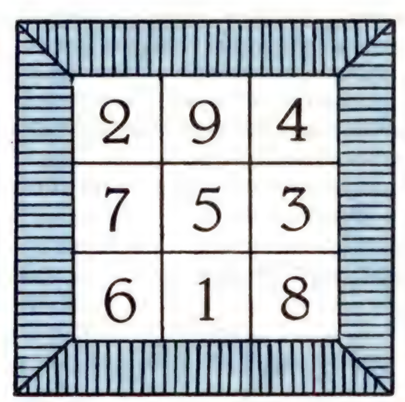


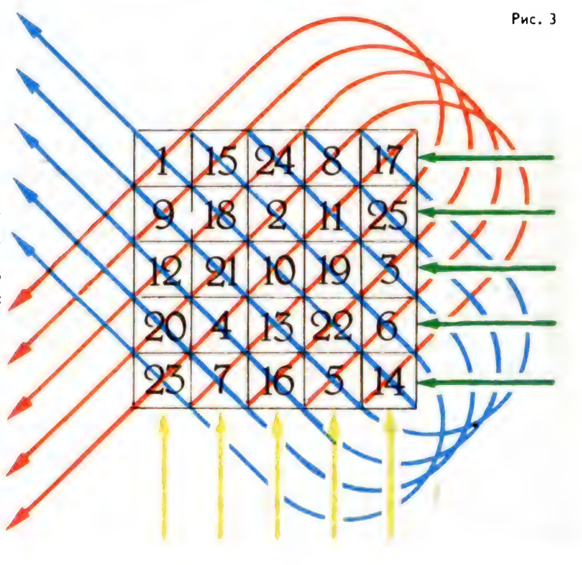
Рис. 1

Рис. 2



С увеличением размеров (числа клеток) квадрата быстро растет количество возможных магических квадратов. Так, например, различных магических квадратов 4×4 уже 880, а для размера 5×5 их количество приближается к четверти миллиона. Среди них есть квадраты, обладающие интересными свойствами. Например, в квадрате на рис. 3 равны между собой не только суммы чисел в строках, столбцах и диагоналях, но и суммы пятерок чисел по «разломанным» диагоналям, связанным на рисунке цветными линиями.

Рис. 3



Латинским квадратом называется квадрат $n \times n$ клеток, в которых написаны числа 1, 2, ..., n, притом так, что в каждой строке и каждом столбце встречаются все эти числа по одному разу. На рис. 4 изображены два таких латинских квадрата 4×4. Они обладают интересной особенностью: если один квадрат наложить на другой, то все пары получившихся чисел оказываются различными. Такие пары латинских квадратов называются ортогональными. Задачу отыскания ортогональных латинских квадратов впервые поставил Л. *Эйлер*, причем в такой занимательной формулировке: «Среди 36 офицеров поровну уланов, драгунов, гусаров, кирасиров, кавалергардов и гренадеров и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков и подпоручиков, причем каждый род войск представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли выстроить этих офицеров в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и любой шеренге встречались офицеры всех рангов?»

Эйлер не смог найти решения этой задачи. В 1901 г. было доказано, что такого решения не существует. В то же время Эйлер доказал,



Гравюра А. Дюрера «Меланхолия»
«Часто воспроизводится магический квадрат, присутствующий на знаменитой гравюре А. Дюрера «Меланхолия». Любопытно, что средние числа в последней строке изображают год 1514, в котором была создана эта гравюра».
Д. Оре

что ортогональные пары латинских квадратов существуют для всех нечетных значений n и для таких четных значений n, которые делятся на 4. Решение задачи Эйлера для 25 офицеров изображено на рис. 5. Чин офицера символизирует цветной кружок в углу каждой из клеток. Здесь особенно хорошо видна связь между задачей Эйлера и латинскими квадратами: рода войск соответствуют числам одного латинского квадрата, а чины (цветные точки) – числам ортогонального ему латинского квадрата. Эйлер выдвинул гипотезу, что для остальных значений n, т.е. если число n при делении на 4 дает в остатке 2, ортогональных квадратов не существует. В 1901 г. было доказано, что ортогональных квадратов размером 6×6 не существует, и это усиливало уверенность в справедливости гипотезы Эйлера. Однако в 1959 г. с помощью ЭВМ были найдены сначала ортогональные квадраты 10×10, потом 14×14, 18×18, 22×22. А затем было показано, что для любого n, кроме 6, существуют ортогональные квадраты размером $n \times n$.

Рис. 4

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Магические и латинские квадраты – близкие родственники. Пусть мы имеем два ортогональных латинских квадрата. Заполним клетки нового квадрата тех же размеров следующим образом. Поставим туда число $n(a - 1) + b$, где a – число в такой клетке первого квадрата, а b – число в такой же клетке второго квадрата. Нетрудно понять, что в полученном квадрате суммы чисел в строках и столбцах (но не обязательно на диагоналях) будут одинаковы.

Теория латинских квадратов нашла много-

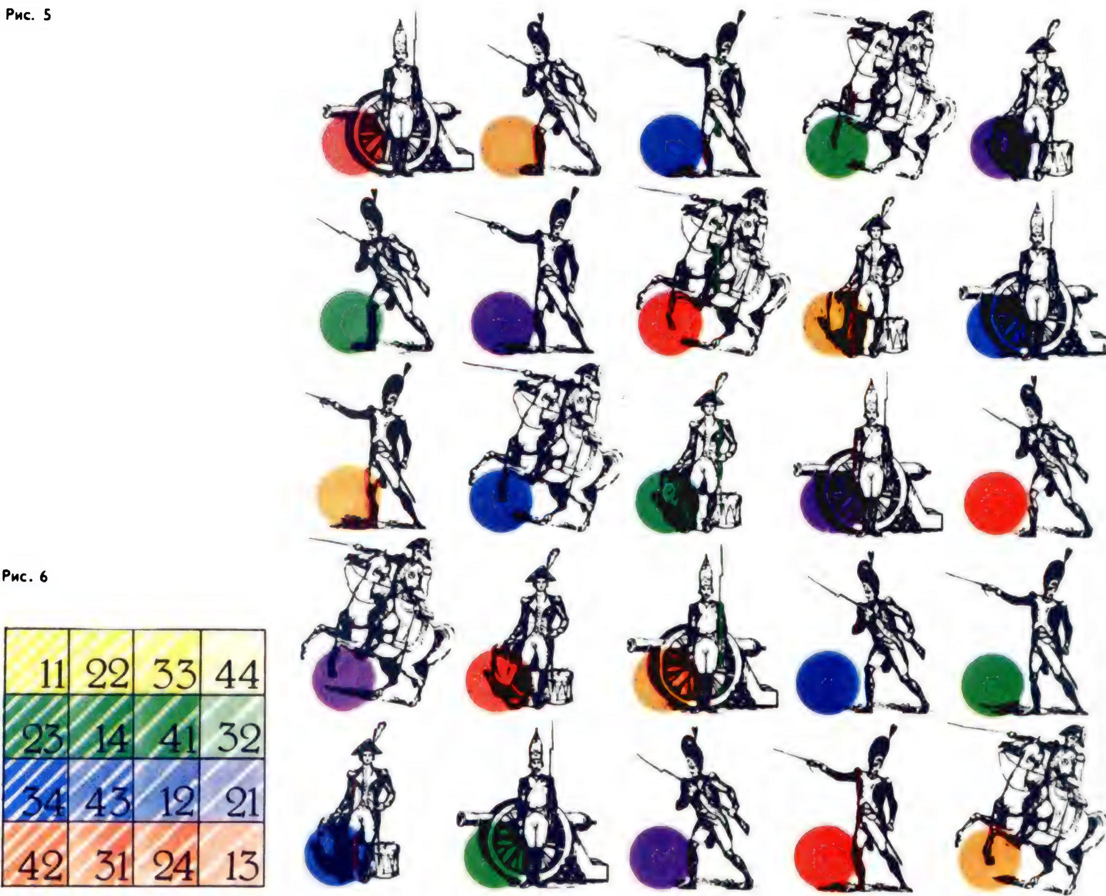


Рис. 5

Рис. 6

11	22	33	44
23	14	41	32
34	43	12	21
42	31	24	13

численные применения как в самой математике, так и в ее приложениях. Приведем такой пример. Пусть мы хотим испытать 4 сорта пшеницы на урожайность в данной местности, причем хотим учесть влияние степени разреженности посевов и влияние двух видов удобрений. Для этого разобьем квадратный участок земли на 16 делянок (рис. 6). Первый сорт пшеницы посадим на делянках, соответствующих нижней горизонтальной полосе, следующий сорт – на четырех делянках, соответствующих следующей полосе, и т. д. (на рисунке сорт обозначен цветом). При этом максимальная густота посевов пусть будет на тех делянках, которые соответствуют левому вертикальному столбцу рисунка, и уменьшается при переходе вправо (на рисунке этому соответствует уменьшение интенсивности цвета). Цифры же, стоящие в клетках рисунка, пусть означают: первая – количество килограммов удобрения первого вида, вносимого на этот участок, а вторая – количество вносимого удобрения второго вида. Эти числа на 1 меньше чисел в ортогональных латинских квадратах из рис. 4. Нетрудно понять, что при этом реализованы все возможные пары сочетаний как сорта и густоты посева, так и других компонентов: сорта и удобрений первого вида, удобрений первого и второго видов, густоты и удобрений второго вида.

Использование ортогональных латинских квадратов помогает учесть все возможные варианты в экспериментах в сельском хозяйстве, физике, химии, технике.

МАТЕМАТИКА

Математика – одна из древнейших наук. Дать краткое определение математики совсем не просто, его содержание будет очень сильно меняться в зависимости от уровня математического образования человека. Школьник начальных классов, только приступивший к изучению арифметики, скажет, что математика изучает правила счета предметов. И он будет прав, поскольку именно с этим он знакомится на первых порах. Школьники постарше добавят к сказанному, что в понятие математики входят алгебра и изучение геометрических объектов: линий, их пересечений, плоских фигур, геометрических тел, разного рода преобразований. Выпускники же средней школы включат в определение математики еще изучение функций и действие перехода к пределу, а также связанные с ним понятия производной и интеграла. Выпускников высших технических учебных заведений или естествен-

нонаучных факультетов университетов и педагогических институтов уже не удовлетворят школьные определения, поскольку они знают, что в состав математики входят и другие дисциплины: теория вероятностей, математическая статистика, дифференциальное исчисление, программирование для ЭВМ, вычислительные методы, а также применения названных дисциплин для моделирования производственных процессов, обработки опытных данных, передачи и обработки информации. Однако и тем, что перечислено, не исчерпывается содержание математики. Теория множеств, математическая логика, оптимальное управление, теория случайных процессов и многое другое также входят в ее состав.

Попытки определить математику путем перечисления составляющих ее ветвей уводят нас в сторону, поскольку не дают представления о том, что же именно изучает математика и каково ее отношение к окружающему нас миру. Если бы подобный вопрос был задан физику, биологу или астроному, то каждый из них дал бы весьма краткий ответ, не содержащий перечисления частей, из которых состоит изучаемая ими наука. Такой ответ содержал бы указание на явления природы, которые она исследует. Например, биолог заявил бы, что биология изучает различные проявления жизни. Пусть этот ответ не вполне закончен, поскольку в нем не говорится, что такое жизнь и жизненные явления, но тем не менее такое определение дало бы достаточно полное представление о содержании самой науки биологии и о разных уровнях этой науки. И это определение не изменилось бы с расширением наших знаний по биологии.

Не существует таких явлений природы, технических или социальных процессов, которые были бы предметом изучения математики, но при этом не относились бы к явлениям физическим, биологическим, химическим, инженерным или социальным. Каждая естественнонаучная дисциплина: биология и физика, химия и психология – определяется материальной особенностью своего предмета, специфическими чертами той области реального мира, которую она изучает. Сам предмет или явление может изучаться разными методами, в том числе и математическими, но, изменяя методы, мы все же остаемся в пределах данной дисциплины, поскольку содержанием данной науки является реальный предмет, а не метод исследования. Для математики же материальный предмет исследования не имеет решающего значения, важен применяемый метод. Например, тригонометрические функции можно использовать и для исследования колебательного движения, и для определения высоты недоступного предмета. А какие явления реального мира можно исследовать с помощью математического метода? Эти явления определяются не их материальной природой, а исключительно формальными структурными свойствами, и прежде всего теми количественными соотношениями и пространственными формами, в которых они существуют.

Итак, математика изучает не материальные предметы, а методы исследования и структурные свойства объекта исследования, которые позволяют применять к нему некоторые операции (суммирование, дифференцирование и др.). Однако значительная часть математических проблем, понятий и теорий имеет своим первичным источником реальные явления и процессы. Например, арифметика и теория чисел выделились из первичной практической задачи – подсчета предметов. Элементарная геометрия имела своим источником проблемы, связанные со сравнением расстояний, вычислением площадей плоских фигур или же объемов пространственных тел. Все это требовалось находить, поскольку необходимо было перераспределять земельные участки между пользователями, вычислять размеры зернохранилищ или же объемы земляных работ при строительстве оборонных сооружений.

Математический результат обладает тем свойством, что его можно не только применять при изучении какого-то одного определенного явления или процесса, но и использовать для исследования других явлений, физическая природа которых принципиально отлична от ранее рассмотренных. Так, правила арифметики применимы и в задачах экономики, и в технических вопросах, и при решении задач сельского хозяйства, и в научных исследованиях. Арифметические правила были разработаны тысячелетия назад, но прикладную ценность они сохранили на вечные времена. Арифметика представляет собой составную часть математики, ее традиционная часть уже не подвергается творческому развитию в рамках математики, но она находит и будет в дальнейшем находить многочисленные новые применения. Эти применения могут иметь огромное значение для человечества, но вклада собственно в математику они уже не внесут.

Математика, как творческая сила, имеет своей целью разработку общих правил, которыми следует пользоваться в многочисленных частных случаях. Тот, кто создает эти правила, создает новое, творит. Тот, кто применяет уже готовые правила, в самой математике уже не творит, но, вполне возможно, создает с помощью математических правил новые ценности в других областях знания. Например, в наши дни данные дешифровки космических снимков, а также сведения о составе и возрасте горных пород, геохимических и геофизических аномалиях обрабатываются

с помощью ЭВМ. Несомненно, что применение ЭВМ в геологических исследованиях оставляет эти исследования геологическими. Принципы же работы ЭВМ и их математическое обеспечение разрабатывались без учета возможности их использования в интересах геологической науки. Сама эта возможность определяется тем, что структурные свойства геологических данных находятся в соответствии с логикой определенных программ работы ЭВМ.

Получили широкое распространение два определения математики. Первое из них было дано Ф. Энгельсом в работе «Анти-Дюринг», другое – группой французских математиков, известной под именем Никола Бурбаки, в статье «Архитектура математики» (1948).

Согласно Ф. Энгельсу, «чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира». Это определение не только описывает объект изучения математики, но и указывает его происхождение – действительный мир. Однако определение Ф. Энгельса в значительной мере отражает состояние математики во второй половине XIX в. и не учитывает те ее новые области, которые непосредственно не связаны ни с количественными отношениями, ни с геометрическими формами. Это, прежде всего, математическая логика и дисциплины, связанные с программированием для ЭВМ. Поэтому определение Ф. Энгельса нуждается в некотором уточнении. Возможно, нужно сказать, что математика имеет своим объектом изучения пространственные формы, количественные отношения и логические конструкции.

Бурбаки утверждают, что «единственными математическими объектами становятся, собственно говоря, математические структуры». Иначе говоря, математику следует определить как науку о математических структурах. Это определение в сущности является тавтологией, поскольку оно утверждает только одно: математика занимается теми объектами, которые она изучает. Другой дефект этого определения состоит в том, что оно не выясняет отношения математики к окружающему нас миру. Более того, Бурбаки подчеркивают, что математические структуры создаются независимо от реального мира и его явлений. Вот почему Бурбаки были вынуждены заявить, что «основная проблема состоит во взаимоотношении мира экспериментального и мира математического. То, что между экспериментальными явлениями и математическими структурами существует тесная связь, – это, как кажется, было совершенно неожиданным образом подтверждено открытиями современной физики, но нам совершенно неизвестны глубокие причины этого... и, быть может, мы их никогда не узнаем».

Из определения Ф. Энгельса не может возникнуть подобного разочаровывающего вывода, поскольку в нем уже содержится утверждение о том, что математические понятия являются абстракциями от некоторых отношений и форм реального мира. Эти понятия берутся из реального мира и с ним связаны. В сущности, именно этим и объясняется поразительная применимость результатов математики к явлениям окружающего нас мира, а вместе с тем и успех процесса математизации знаний. Здесь заслуживает упоминания высказывание В. И. Ленина, помещенное в «Философских тетрадях» и сделанное им в связи с изучением «Науки логики» Гегеля: «Познание есть отражение человеком природы. Но это не простое, не непосредственное, не цельное отражение, а процесс ряда абстракций, формирования, образования понятий, законов etc., каковые понятия, законы etc. (мышление, наука – «логическая идея») и охватывают условно, приблизительно универсальную закономерность вечно движущейся и развивающейся природы».

Математика не является исключением из всех областей знания – в ней также образуются понятия, возникающие из практических ситуаций и последующих абстрагирований; она позволяет изучать действительность также приближенно. Но при этом следует иметь в виду, что математика изучает не вещи реального мира, а абстрактные понятия и что логические ее выводы абсолютно строги и точны. Ее приближенность носит не внутренний характер, а связана с составлением математической модели явления. Заметим еще, что правила математики не обладают абсолютной применимостью, для них также существует ограниченная область применения, где они господствуют безраздельно. Поясним высказанную мысль примером: оказывается, что два и два не всегда равно четырем. Известно, что при смешивании 2 л спирта и 2 л воды получается меньше 4 л смеси. В этой смеси молекулы располагаются компактнее, и объем смеси оказывается меньше суммы объемов составляющих компонентов. Правило сложения арифметики нарушается. Можно еще привести примеры, в которых нарушаются другие истины арифметики, например при сложении некоторых объектов оказывается, что сумма зависит от порядка суммирования.

Советские математики рассматривают математические понятия не как создание чистого разума, а как абстракции от реально существующих вещей, явлений, процессов или же абстракции от уже сложившихся абстракций (абстракции высших порядков). В «Диалектике природы» Ф. Энгельс писал, что «... вся так называемая чистая математика занимается абстракциями... все ее величины суть, строго говоря, воображаемые величины...» Эти

слова достаточно четко отражают мнение одного из основоположников марксистской философии о роли абстракций в математике. Нам только следует добавить, что все эти «воображаемые величины» берутся из реальной действительности, а не конструируются произвольно, свободным полетом мысли. Именно так вошло во всеобщее употребление понятие числа. Сначала это были числа в пределах единиц, и притом только целые положительные числа. Затем опыт заставил расширить арсенал чисел до десятков и сотен. Представление о неограниченности ряда целых чисел родилось уже в исторически близкую нам эпоху: Архимед в книге «Псаммит» («Исчисление песчинок») показал, как можно конструировать числа еще бо́льшие, чем заданные. Одновременно из практических нужд родилось понятие дробных чисел. Вычисления, связанные с простейшими геометрическими фигурами, привели человечество к новым числам – иррациональным. Так постепенно формировалось представление о множестве всех действительных чисел.

Тот же путь можно проследить для любых других понятий математики. Все они возникли из практических потребностей и постепенно сформировались в абстрактные понятия. При этом всегда следует помнить прекрасные слова Ф. Энгельса: «... чистая математика имеет значение, независимое от особого опыта каждой отдельной личности... Но совер-

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ (1862–1943)



Летом 1900 г. математики собрались на свой второй Международный конгресс в Париже. Немецкий математик, профессор Геттингенского университета, Д. Гильберт был приглашен сделать один из основных докладов. Крупнейший математик мира, он прославился своими работами по алгебре и теории чисел, а незадолго перед конгрессом решительно перестроил аксиоматику евклидовой геометрии с учетом того нового, что узнали об аксиоматическом методе математики в XIX в. из его книги «Основания геометрии». После долгих колебаний Гильберт выбрал необычную форму доклада. Он решил сформулировать те проблемы, которые, по его мнению, должны определять развитие математики в наступающем веке.

Среди 23 проблем, поставленных Гильбертом, были как конкретные задачи, так и общие постановки задач, намечавшие пути развития больших направлений в математике. Так, третья проблема, решенная вскоре, ставила вопрос об эквивалентности понятий равновеликости и равносоставленности; десятая проблема была посвящена вопросам разрешимости *диофантовых уравнений*; в седьмой проблеме спрашивалось, будут ли рациональны числа $2^{\sqrt{2}}$ и e^{π}; двадцать третья проблема намечала пути развития вариационного исчисления, которое во второй половине XX в. выросло от области математики, занимающейся экстремальными геометрическими задачами, до большой современной науки – теории оптимального управления.

Исследования Гильберта оказали большое влияние на развитие многих отраслей математики, его деятельность в Геттингенском университете в значительной мере содействовала тому, что Геттинген в первой трети XX в. становится одним из мировых центров математической мысли.

После конгресса интересы ученого обращаются к математическому анализу и, как всегда, он находит совершенно неожиданный ход: функции у него оказываются точками бесконечномерного пространства и аналитические результаты получаются на чисто геометрическом языке. Он решает знаменитую проблему Варинга из теории чисел, проблему возможности представления любого натурального числа в виде суммы степеней чисел: четырех квадратов, девяти кубов, девятнадцати четвертых степеней и т.д. К этому времени уже была доказана возможность представления числа в виде суммы четырех квадратов.

Значительные исследования были проведены Гильбертом в теории бесконечных множеств, где он также применяет аксиоматический метод построения теории.

В 1930 г., как и полагалось немецкому профессору в 68 лет, Гильберт уходит в отставку.

Но жизнь готовила Гильберту трагические последние годы. После прихода гитлеровцев к власти в Германии ученый до конца жизни прожил в Геттингене в стороне от университетских дел. «Математика в Геттингене? Да она просто не существует больше» – так ответил Гильберт на вопрос нацистского министра.

шенно неверно, будто в чистой математике разум имеет дело только с продуктами собственного творчества и воображения. Понятия числа и фигуры взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди научились считать, т.е. производить первую арифметическую операцию, представляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума. Чтобы считать, надо иметь не только предметы, подлежащие счету, но обладать уже и способностью отвлекаться при рассмотрении этих предметов от всех прочих свойств, кроме числа, а эта способность есть результат долгого исторического развития, опирающегося на опыт. Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствовано исключительно из внешнего мира, а не возникло в голове из чи-

ИВАН ГЕОРГИЕВИЧ ПЕТРОВСКИЙ (1901–1973)



И. Г. Петровский – советский математик, крупный государственный и общественный деятель, Герой Социалистического Труда (1969), лауреат Государственных премий (1946, 1952), академик (1946), член Президиума Верховного Совета СССР (1966–1973).

В 1927 г. И. Г. Петровский окончил Московский государственный университет, с 1933 г. он был профессором механико-математического факультета МГУ, с 1950 г. заведовал кафедрой дифференциальных уравнений, а с 1951 г. и до конца своей жизни был ректором Московского университета. В 1946 г. он был избран действительным членом АН СССР.

И. Г. Петровский получил фундаментальные научные результаты в самых различных областях математики: в теории уравнений с частными производными, в алгебраической геометрии, теории вероятностей, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математической физике.

И. Г. Петровский – создатель теории систем уравнений с частными производными. До его работ основным объектом изучения теории уравнений с частными производными были конкретные уравнения, к которым приводили физические задачи, а также уравнения второго порядка трех основных типов: эллиптического, параболического и гиперболического. И. Г. Петровский выделил и изучил три широких класса систем уравнений с частными производными, которые позднее вошли в науку под названием эллиптических, параболических и гиперболических по Петровскому систем.

В 1937 г. И. Г. Петровский дал наиболее полное и исчерпывающее решение вопроса, поставленного в 19-й проблеме *Гильберта*, – вопроса об описании класса дифференциальных уравнений и систем, все достаточно гладкие решения которых являются аналитическими функциями. Оказалось, что таким свойством обладают эллиптические по Петровскому системы. Это – одна из 23 проблем, сформулированных Д. Гильбертом на Международном математическом конгрессе в 1900 г., они рассматривались как важнейшие задачи, стоящие перед математиками XX в.

В 1933 г. ученый выполнил работу по топологии действительных алгебраических кривых. В ней были даны ответы на вопросы, поставленные в 16-й проблеме Гильберта.

Большое влияние на развитие теории вероятностей оказали работы И. Г. Петровского, выполненные в 30-е гг. Исключительное значение имеют не только результаты этих работ, но и методы исследования, которые были в них предложены.

Будучи ректором МГУ, И. Г. Петровский много сделал для развития научных исследований и улучшения подготовки специалистов в университетах страны.

Он написал три учебника для студентов вузов: «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», «Лекции по теории интегральных уравнений» и «Лекции об уравнениях с частными производными».

Большое внимание ученый уделял преподаванию математики в средней школе. По его инициативе были организованы курсы повышения квалификации учителей школ РСФСР при МГУ, он принимал участие в организации заочной математической школы и школы-интерната при МГУ.

стого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны были подвергаться сравнению, прежде чем можно было прийти к понятию фигуры».

Рассмотрим, имеются ли в науке понятия, которые созданы без связи с прошлым прогрессом науки и текущим прогрессом практики. Мы прекрасно знаем, что научному математическому творчеству предшествует изучение многих предметов в школе, вузе, чтение книг, статей, беседы со специалистами как в собственной области, так и в других областях знания. Математик живет в обществе, и из книг, по радио, из других источников он узнает о проблемах, возникающих в науке, инженерном деле, общественной жизни. К тому же мышление исследователя находится

МСТИСЛАВ ВСЕВОЛОДОВИЧ КЕЛДЫШ (1911–1978)



М. В. Келдыш – замечательный советский ученый и организатор науки, трижды Герой Социалистического Труда (1956, 1961, 1971), лауреат Ленинской (1957) и Государственных (1942, 1946) премий, академик (1946), президент Академии наук СССР (1961–1975), автор глубоких исследований в области математики, механики, техники.

Международное признание Келдышу как математику принесли его работы по теории функций комплексного переменного и ее приложений, в первую очередь по представлению аналитических функций рядами полиномов, где ему принадлежит одна из основных теорем. Широко известны также его работы по теории потенциала и гармоническим функциям, по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике.

Многие теоретические исследования М. В. Келдыша были выполнены в Центральном аэрогидродинамическом институте им. Н. Е. Жуковского. Вместе с *М. А. Лаврентьевым* молодой ученый занимался исследованием задач аэрогидродинамики методами теории функций комплексного переменного. В частности, они первыми построили теорию движения крыла под поверхностью жидкости, впервые строго доказали, что на определенных режимах колебания крыла создают тянущую силу, создали теорию удара о поверхность воды.

Большой цикл работ Келдыша посвящен колебаниям авиаконструкций. Вплотную с явлением флаттера (колебаний частей самолета, приводящих к его гибели) авиаконструкторы столкнулись, когда от тихоходных бипланов с их жестко скрепленной коробкой крыльев стали переходить к более быстроходным монопланам. К 1940 г. Келдыш разработал эффективные способы расчета самолета на флаттер, указал методы балансировки, которые предотвращали гибель машин. Эти работы ученого сыграли заметную роль в создании советского воздушного превосходства во время Великой Отечественной войны.

Чтобы построить строгую теорию колебаний сложных систем с несимметричными прямыми и обратными связями между их частями, ему пришлось разработать новую главу функционального анализа, ее теперь называют теорией пучков Келдыша.

Еще одним из направлений работ М. В. Келдыша были вычислительные методы сверхзвуковой газовой динамики не только в связи с приложениями к задачам аэродинамики, но и к течениям в соплах, и к движениям сплошной среды (газообразной, жидкой или твердой) под действием взрыва.

С 1946 г. Келдыш начинает работать над ракетными системами. Вместе с И. В. Курчатовым и С. П. Королевым ученый участвовал в создании ракетно-ядерного щита нашей Родины. В последующие годы М. В. Келдыш вместе с С. П. Королевым стал одним из инициаторов работ по освоению космоса.

Он стоял у истоков прикладной небесной механики. Раньше ученые наблюдали небесные тела и описывали их движение. С началом космической эры потребовалось проектировать траектории полетов космических аппаратов вокруг Земли, к Луне и планетам Солнечной системы, уточнять их фактическую трассу и затем корректировать их движение. Эти задачи решались под руководством М. В. Келдыша и при его активном участии.

М. В. Келдыш был основателем Института прикладной математики АН СССР, носящего ныне его имя. С деятельностью этого института во многом связано становление современной вычислительной математики в нашей стране. Возглавляя Академию наук СССР, М. В. Келдыш внес выдающийся вклад в обеспечение развития многих фундаментальных направлений советской науки.

под воздействием всей предшествовавшей эволюции научной мысли. Поэтому оно оказывается подготовленным к решению определенных проблем, необходимых для прогресса науки. Вот почему ученый не может выдвигать проблемы по произволу, по прихоти, а должен создавать математические понятия и теории, которые были бы ценны для науки, для других исследователей, для человечества. А ведь математические теории сохраняют свое значение в условиях различных общественных формаций и исторических эпох. К тому же нередко одинаковые идеи возникают у ученых, которые никак не связаны между собой. Это является дополнительным аргументом против тех, кто придерживается концепции свободного творчества математических понятий.

Итак, мы рассказали, что же входит в понятие «математика». Но существует еще и такое понятие, как прикладная математика. Под ним понимают совокупность всех математических методов и дисциплин, находящих применения за пределами математики. В древности геометрия и арифметика представляли всю математику и, поскольку та и другая находили многочисленные применения при торговых обменах, измерении площадей и объемов, в вопросах навигации, вся математика была не только теоретической, но и прикладной. Позднее, в Древней Греции, возникло разделение на математику и на математику прикладную. Однако все выдающиеся математики занимались и применениями, а не только чисто теоретическими исследованиями.

Дальнейшее развитие математики было непрерывно связано с прогрессом естествознания, техники, с появлением новых общественных потребностей. К концу XVIII в. возникла необходимость (в первую очередь в связи с проблемами навигации и артиллерии) создания математической теории движения. Это сделали в своих работах Г. В. Лейбниц и И. Ньютон. Прикладная математика пополнилась новым очень мощным методом исследования – математическим анализом. Почти одновременно потребности демографии, страхования привели к формированию начал теории вероятностей (см. *Вероятностей теория*). XVIII и XIX вв. расширили содержание прикладной математики, добавив в нее теорию дифференциальных уравнений обыкновенных и с частными производными, уравнения математической физики, элементы математической статистики, дифференциальную геометрию. XX в. принес новые методы математического исследования практических задач: теорию случайных процессов, теорию графов, функциональный анализ, оптимальное управление, линейное и нелинейное программирование. Более того, выяснилось, что теория чисел и абстрактная алгебра нашли неожиданные применения к задачам физики. В результате стало складываться убеждение, что прикладной математики как отдельной дисциплины не существует и вся математика может считаться прикладной. Пожалуй, нужно говорить не о том, что математика бывает прикладная и теоретическая, а о том, что математики разделяются на прикладников и теоретиков. Для одних математика является методом познания окружающего мира и происходящих в нем явлений, именно для этой цели ученый развивает и расширяет математическое знание. Для других математика сама по себе представляет целый мир, достойный изучения и развития. Для прогресса науки нужны ученые и того, и другого плана.

Математика, прежде чем изучать своими методами какое-нибудь явление, создает его математическую модель, т.е. перечисляет все те особенности явления, которые будут приниматься во внимание. Модель принуждает исследователя выбирать те математические средства, которые позволят вполне адекватно передать особенности изучаемого явления и его эволюции. В качестве примера возьмем модель планетной системы: Солнце и планеты рассматриваются как материальные точки с соответствующими массами. Взаимодействие каждых двух точек определяется силой притяжения между ними

$$F_{12}=f\frac{m_1m_2}{r^2},$$

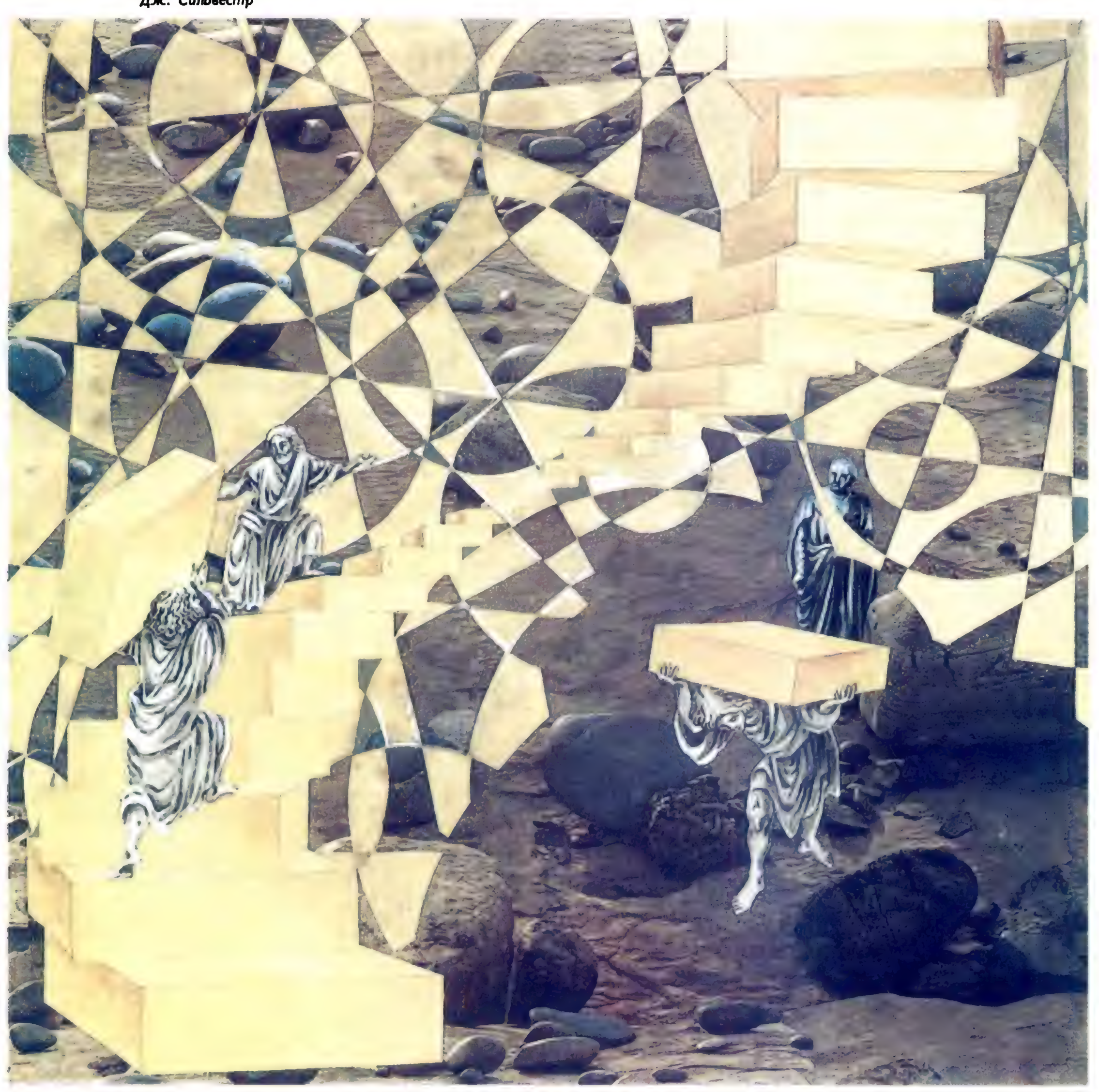
где m_1 и m_2 – массы взаимодействующих точек, r – расстояние между ними, а f – постоянная тяготения. Несмотря на всю простоту этой модели, она в течение вот уже трехсот лет с огромной точностью передает особенности движения планет Солнечной системы.

Конечно, каждая модель огрубляет действительность, и задача исследователя состоит в первую очередь в том, чтобы предложить модель, передающую, с одной стороны, наиболее полно фактическую сторону дела (как принято говорить, ее физические особенности), а с другой – дающую значительное приближение к действительности. Разумеется, для одного и того же явления можно предложить несколько математических моделей. Все они имеют право на существование до тех пор, пока не начнет сказываться существенное расхождение модели и действительности.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

Индуктивными называют рассуждения, в которых осуществляется переход от частных заключений к общим. Некоторое свойство подмечается на каком-то числе примеров,

«Большая часть великих идей современных математиков, если не все, получила свое начало в наблюдении».
Дж. Сильвестр



в какой-то момент высказывается общая гипотеза, которая затем подвергается дальнейшей экспериментальной проверке. В естественных науках наступает момент, когда проверка считается достаточной для того, чтобы принять гипотезу, посчитать ее доказанной. Вспомним, например, открытие Ч. Дарвиным закона эволюции. В математике же, когда высказывание делается о бесконечной совокупности, проверка любого конечного набора случаев не может заменить *доказательства.*

На заре теории чисел математики открыли многие факты индуктивным путем: Л. Эйлер и К. Гаусс рассматривали подчас тысячи примеров, прежде чем подметить числовую закономерность и поверить в нее. Но одновременно они понимали, сколь обманчивыми могут быть гипотезы, прошедшие «конечную» проверку. Числа Ферма $F_k = 2^{2^k} + 1$ оказались простыми при $k = 0, 1, 2, 3, 4$, но у F_5 Эйлер обнаружил делитель. Числа Мерсенна $M_p = 2^p - 1$, где p – простые числа, сами являются простыми при $p = 2, 3, 5, 7$, но не при $p = 11$ (а потом вновь будут простыми при $p = 13, 17, 19, \ldots$). Лейбниц думал какое-то время, что $n^{2k+1} - n$ делится на $2k + 1$, проверив это при $k = 1, 2, 3$. Но при $k = 4$ это не так.

Итак, для индуктивного перехода от утверждения, проверенного для конечного подмножества, к аналогичному утверждению для всего бесконечного множества необходимо доказательство. Но как осуществить проверку бесконечного числа случаев? Такой способ предложили Б. Паскаль и Я. Бернулли. Теперь он носит название метода математической индукции. Пусть некоторое свойство надо доказать для элементов последовательности a_1, a_2, …, a_k, … Тогда достаточно:

1) проверить это утверждение для a_1 (этот шаг называется началом или базисом индукции);

2) в предположении, что утверждение справедливо для a_k, надо доказать его справедливость для a_{k+1} (индуктивный переход).

После проведения этих рассуждений можно сделать вывод, что доказываемое утверждение справедливо для всех a_n.

Метод математической индукции можно образно представить как цепочку людей, в которой каждый последующий положил руки на плечи предыдущего. Тогда возникает связанная шеренга, хотя непосредственное взаимодействие происходит лишь между ближайшими соседями.

Приведем несколько примеров. Пусть $a_n = 1 + 2 + \ldots + n$ – сумма первых n натуральных чисел. Надо доказать, что $a_n = n(n+1)/2$. При $n = 1$ имеем $a_1 = 1$. Далее, если $a_k = k(k+1)/2$, то $a_{k+1} = a_k + k + 1 = (k+1)(k+2)/2$ – и теорема доказана. Другой пример: $a_n = 1 + 3 + \ldots + (2n - 1)$ – сумма нечетных чисел. Надо доказать, что $a_n = n^2$. При $n = 1$ это верно. Если $a_k = k^2$, то $a_{k+1} = a_k + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ – и индуктивный переход проведен.

Провести индуктивный переход не всегда просто. Прежде всего, он, как и исходное утверждение, связан с бесконечным числом ситуаций (k любое). Однако успех метода математической индукции основывается на том, что очень часто провести индуктивный переход в общем случае много проще, чем непосредственно доказать исходное утверждение. Поэтому при проведении индуктивного перехода надо очень тщательно убеждаться, что рассуждение в самом деле проходит для любого k.

Часто приходится доказывать по индукции утверждение, справедливое не для всех n, а лишь для достаточно больших n, т. е. для всех n, бо́льших некоторого заданного числа N. Тогда в основании индукции лежит проверка для a_N. Докажем, что имеет место неравенство $n^3 - 4 > 1000n^2 + 3n$ при $n \geqslant 2000$. Нетрудно непосредственно убедиться, что при $n = 2000$ оно справедливо. Чтобы сделать индуктивный переход, заметим, что при переходе от k к $k+1$ к левой части прибавляется $3k^2 + 3k + 1$, а к правой – $2000k + 1003$. Все будет доказано, если мы докажем справедливость вспомогательного неравенства $3k^2 + 3k + 1 \geqslant 2000k + 1003$ при $k \geqslant 2000$. При $k = 2000$ оно справедливо (проверяется непосредственно), а далее рассуждаем аналогично: при переходе от k к $k+1$ к левой части добавляется $6k + 6$, а к правой – 2000. Поскольку $6k + 6 \geqslant 2000$ при $k \geqslant 2000$, доказательство окончено. Этот пример иллюстрирует одновременно важную ситуацию: индуктивное предположение, в свою очередь, иногда целесообразно доказывать по индукции. При этом возникает цепочка индуктивных доказательств, причем на каждом шагу получается все более простое утверждение.

По индукции не только удобно проводить доказательства, но и давать некоторые определения. Пусть имеется некоторый человек A. Его родственниками первого порядка назовем его родителей и детей. Если определены родственники k-го порядка, то родственниками $(k+1)$-го порядка для A назовем родственников первого порядка для родственников A k-го порядка, которые не являются родственниками A меньшего порядка. В частности, братья и сестры при таком определении являются родственниками второго порядка. Индуктивные определения играют важную роль в *математической логике* и математической лингвистике.

Доказательства по индукции прочно вошли в обиход математической деятельности. Придумано огромное число модификаций метода, ориентированных на разные приложения.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

«Если все вороны черные, то все нечерные предметы – не вороны». Это высказывание несомненно истинно, и, чтобы утверждать это, не нужно быть знатоком птиц. Точно так же не нужно быть специалистом в теории чисел, чтобы сказать, что если все совершенные числа четны, то все нечетные числа несовершенны. Мы привели примеры утверждений, истинных независимо от смысла входящих в них понятий (вороны, черные, совершенные, четные) – истинных уже в силу самой своей формы. Изучение такого рода утверждений входит в задачу логики. Более общо: логика изучает правильные способы рассуждений – такие способы рассуждений, которые приводят к верным результатам в тех случаях, когда верны исходные посылки.

Предметом математической логики служат в основном рассуждения. При их изучении она пользуется математическими методами. Разъясним сказанное.

Математики строят и развивают математические теории, дают определения, доказывают теоремы и т. п. Специалисты по математической логике, наблюдая за этим, анализируют, как математики это делают и что при этом получается. Образно говоря, соотношение между математикой и математической логикой похоже на соотношение между концертом и теорией музыки. Можно сказать, что математическая логика изучает основания математики, принципы построения математических теорий.



«Книга философии – это то, что всегда раскрыто перед нашими глазами, но так как она написана иными буквами, чем буквы нашего алфавита, то она не может быть прочитана всеми буквами этой книги являются треугольники, круги, шары, конусы, пирамиды и другие математические фигуры, очень пригодные для чтения ее».

Г. Галилей

Установив, что изучает математическая логика, перейдем к тому, как она это делает. Нам уже известно, что она пользуется математическими методами. Объясним, что это значит. Как применяются математические методы, например, в физике? Строится математическая модель рассматриваемого физического процесса, отражающая какие-то его существенные свойства. Математические методы могут применяться не только в физике, но и в других науках. Например, применение математических методов в биологии состоит в построении математических моделей биологических процессов. Можно строить математические модели и для процесса развития математических теорий. Это и делает математическая логика.

Как устроена математическая теория? Она содержит какие-то утверждения. Некоторые из них принимаются без доказательств, другие удается доказать (в этом случае утверждения называют *теоремами*). Значение слов «утверждение» и «доказательство» в повседневной практике весьма расплывчато. Поэтому если мы хотим строить математическую модель, то первым делом нужно уточнить эти понятия, т.е. построить их формальные аналоги в нашей модели. Для этого математические логики придумали специальные формальные языки, предназначенные для записи математических утверждений. Утверждения, записанные на формальных языках, называют формулами, чтобы отличить их от предложений естественных языков. Построив формальный язык, мы получаем возможность записывать некоторые математические утверждения в виде формул. Этого, разумеется, еще не достаточно. Нам нужно уметь записывать формально не только утверждения, но и доказательства. Для этого математические логики придумали формальный аналог понятия «доказательство» – понятие вывода (доказательства, записанного на формальном языке). Формальным аналогом понятия «теоре-

ма» является понятие «выводимая формула» (т. е. формула, имеющая вывод). Формальный язык вместе с правилами построения выводов называется формальной системой.

Какие требования естественно предъявлять к формальной системе? Мы хотим, чтобы она была как можно более похожа на «живую», неформальную математику. Для этого нужно, чтобы все интересующие нас содержательные утверждения (или, по крайней мере, большая их часть) могли быть «переведены на формальный язык», т. е. записаны в виде формул этой системы. Кроме того, нужно, чтобы неформальные доказательства можно было перевести в выводы соответствующих формул.

В настоящее время построены вполне удовлетворительные модели (формализации) большинства математических теорий. Наиболее важны формальная арифметика и аксиоматическая теория множеств. Формальная арифметика предназначается для формализации рассуждений о натуральных числах, а аксиоматическая теория множеств – о множествах.

Основным предметом математической логики, таким образом, является построение и изучение формальных систем. Центральным результатом здесь является доказанная в 1931 г. австрийским математиком К. Геделем теорема о неполноте, утверждающая, что для любой «достаточно разумной» формальной системы существуют неразрешимые в ней предложения, т. е. такие формулы A, что ни сама формула A, ни ее отрицание не имеют вывода. Если отождествить формальную систему с соответствующей областью математики, то можно сказать, что в любой «достаточно разумной» области математики есть утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Мы не можем здесь точно сказать, что именно требуется от «достаточно разумной» формальной системы; отметим лишь, что большинство формальных систем (в том числе формальная арифметика и аксиоматическая теория множеств) удовлетворяют этим требованиям. На примере теоремы о неполноте мы видим, какую пользу приносит построение формальной системы: мы получаем возможность доказать, что какие-то утверждения недоказуемы!

Изучение формальных систем привело к возникновению многих важных направлений в современной математической логике. Назовем некоторые из них. Теория моделей исследует вопрос о том, как можно придать «смысл» выражениям формальных языков и что при этом получается. Теория доказательств изучает свойства выводов в формальных системах. Важнейшим разделом логики, который сейчас уже можно рассматривать как самостоятельную дисциплину, является теория *алгоритмов.*

Многие знаки, придуманные логиками для построения формальных систем, постепенно вошли в общее употребление. К ним относятся логические связки $\wedge$ (конъюнкция, «и»), $\vee$ (дизъюнкция, «или»), $\Rightarrow$ (импликация, «если... то...»), $\neg$ (отрицание, «неверно, что») и так называемые кванторы $\forall$ (всеобщности, «для всех») и $\exists$ (существования, «существует»). Смысл логических связок, помимо указанных в скобках названий, разъясняется так называемыми таблицами истинности. Эти таблицы показывают, будет ли сложное утверждение, составленное с помощью логических связок из простых, истинно (И) или ложно (Л) в зависимости от истинности его составных частей. Приведем их.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A$
И	И	И	И	И	Л
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	Л	И	И	И
Л	Л	Л	Л	И	И

Например, пятый столбец показывает, что утверждение $A \Rightarrow B$ может быть ложно, только если A истинно, а B ложно. С помощью этих таблиц можно составить таблицу истинности и для более сложных утверждений, например для утверждения $((A \vee B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow B$.

A	B	$A \vee B$	A	$(A \vee B) \wedge (\neg A)$	$((A \vee B) \wedge (\neg A)) \Rightarrow B$
И	И	И	Л	Л	И
И	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	И	И	И
Л	Л	Л	И	Л	И

Составив ее, мы увидим, что это утверждение (шестой столбец) всегда истинно, независимо от истинности утверждений A и B. Это не удивительно – ведь его можно прочитать так: «Если верно или A, или B и A неверно, то верно B». Как говорят, это утверждение является логическим законом, или тавтологией. Именно с таких утверждений мы начали обсуждение предмета математической логики.

Смысл кванторов $\forall$ и $\exists$ можно объяснить так. Если $A(x)$ – некоторое утверждение, истинность которого зависит от значения переменной x (например, утверждение «x – четное число»), то утверждение $\forall x A(x)$ гласит, что $A(x)$ верно при всех значениях x, а утверждение $\exists x A(x)$ означает, что найдется такое x, при котором $A(x)$ верно. (В нашем примере первое из этих утверждений ложно, а второе – истинно.) Как и логические связки, кванторы можно использовать для записи логических законов. Например, оба утверждения, приведенные нами в начале статьи в качестве примеров, частные случаи закона

$$\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x (\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)),$$

которые получаются, если подставить вместо $A(x)$ утверждение «x – ворона», а вместо $B(x)$ – «x – черная» или вместо $A(x)$ – «x – совершенные», а вместо $B(x)$ – «x – четные».

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Математическая статистика – наука, изучающая методы обработки результатов наблюдений. Приведем примеры. Из кипы хлопка наугад вытащены пучки и измерены длины попавших в них волокон. Результаты первых 28 замеров (в см) оказались следующими: 2,10; 2,23; 2,14; 2,16; 2,56; 2,05; 2,20; 2,34; 2,18; 1,95; 2,21; 2,46; 2,28; 1,95; 2,54; 2,12; 2,05; 2,15; 2,18; 2,21; 2,34; 2,28; 2,34; 2,20; 2,42; 2,55; 2,12; 2,27. Запись результатов наблюдений в таком виде мало наглядна, занимает много места, и из нее трудно делать выводы. Обычно стремятся данные наблюдений сделать более удобными для восприятия и для последующей обработки. Это особенно важно, когда число наблюдений велико и достигает многих сотен, а то и тысяч. Для этого результаты наблюдений сводят в таблицы. Весь интервал возможных значений разбивают на части (как правило, равной длины) и подсчитывают число наблюдений, попавших в каждый из отрезков. В табл. 1 приведены данные о надое 100 коров. Надой указан в тысячах литров; величина промежутка разбиения – 600 л. Уже беглый взгляд на таблицу показывает, что мало и коров с малым удоем, и коров-рекордисток.

Таблица 1

Группы по надою, тыс. л.	Число коров
1,6 – 2,2	4
2,2 – 2,8	14
2,8 – 3,4	17
3,4 – 4,0	37
4,0 – 4,6	15
4,6 – 5,2	6
5,2 – 5,8	4
5,8 – 6,2	3

Наибольшее число коров оказывается в средней части таблицы.

На втором примере мы будем изучать промежутки между временами прибытия судов в морской порт. За некоторый срок прибыло 185 судов. Данные сведены в табл. 2. Наблюдения показывают, что, как правило, основная масса судов прибывает через небольшие промежутки времени. На самом деле таблицы позволяют получить большее: выявить закономерности, свойственные табличным данным.

Итак, таблицы используют для того, чтобы установить закономерности появления различных возможных значений наблюдаемой величины; для проверки неизменности условий испытаний; для оценки правильности тех или иных статистических гипотез; для оценки наличия так называемых корреляционных зависимостей между переменными, которые наблюдаются на опыте. В наши дни результаты наблюдений используют для статистической оценки качества изготовленной продукции и для управления качеством в процессе производства.

Сказанное нуждается в пояснениях.

Для решения первой задачи строят гистограмму. По оси абсцисс откладывают значения наблюдаемой величины, а по оси ординат – ее частоты в каждом из промежутков, т.е. отношения числа наблюдений, попавших в данный промежуток времени, к числу всех наблюдений, деленные на длину промежутков. В результате получаем ступенчатую линию. Заметим, что площадь, заключенная под всеми прямоугольниками для любой гистограммы, равна 1. Гистограмму нашего примера хорошо приближает функция $y = 1/8{,}32e^{-x/8{,}32}$, площадь под которой (в положительной части оси абсцисс) также равна 1.

И на производстве, и в научных экспериментах бывает очень важно проверить, насколько неизменны условия наблюдения. Так, например, на технологической линии была изменена какая-то операция. Спрашивается, не сказалась ли эта замена на качестве продукции. Или представим себе, что производится наблюдение за интенсивностью космического излучения в двух точках земной поверхности на одной широте и на одинаковой высоте от земной поверхности, но на разной долготе. Необходимо выяснить, одинакова ли интенсивность излучения. Для проверки производятся две серии наблюдений (в одних и других условиях) и сравниваются полученные гистограммы. Близость гистограмм будет подтверждать нашу гипотезу: интенсивность солнечного излучения не зависит от долготы.

Статистические гипотезы могут быть самы-

Таблица 2

Промежуток между прибытиями, мин	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28	28–32
Число случаев	67	43	30	18	11	7	5	4

ми разнообразными, например: лекарство *A* не оказывает положительного воздействия на больных болезнью *B*; сорт пшеницы *A* урожайнее сорта *B* и т. д. Математическая статистика уделяет большое внимание разработке методов, позволяющих решать вопросы о правильности или ложности статистических гипотез.

Статистика приводит к более общим зависимостям переменных, чем те, которые даются посредством функций. Приведем примеры. Изучается зависимость высоты сосен от их диаметра.

Если мы начнем сравнивать две эти характеристики, то найдем множество сосен одной и той же высоты, но разного диаметра или же одного диаметра, но разной высоты. Функциональной зависимости между высотой и диаметром нет, однако общая тенденция такова, что с увеличением высоты в среднем увеличивается и диаметр.

В табл. 3 приведены результаты замеров высоты и диаметра 250 сосен.

Таблица 3

Диаметр (см), y	Высота (м), x									
	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
15		1	6	4	3					
20	1	3	15	29	20	8				
25		1	8	18	49	20	6	1		
30			1	4	5	12	8	5		
35					1	3	6	4	1	
40							1	3	3	
45										1

По горизонтали отмечается высота в метрах, причем отмечается среднее значение высоты разных деревьев. Например, 18 означает, что под этой цифрой указывается число сосен, имеющих высоту от 17,5 до 18,5 м. По вертикали указывается диаметр в сантиметрах, причем в центре интервала группирования находятся как раз указанные числа. Например, 30 означает интервал группировки от 27,5 до 32,5 см. В клеточках таблицы указано число деревьев заданной высоты и диаметра. Так, например, на пересечении столбца 22 по вертикали и строки 25 по горизонтали стоит число 49. Это означает, что наблюдалось 49 деревьев высотой от 21,5 до 22,5 м и диаметром от 22,5 до 27,5 см.

В статистике для изучения связи между высотой дерева и его диаметром поступают следующим образом. Для каждого значения x вычисляют по таблице среднее арифметическое наблюденных значений y и для каждого y среднее значение наблюденных x. Нанесем теперь на плоскость полученные две группы точек и проведем вблизи от точек каждой группы близкие плавные кривые. Это будут линии регрессии y по x и x по y. Они дают приближенное представление об изменении средних значений y при изменении x и средних значений x при изменении y. Во многих случаях такое недостаточно полное знание оказывается очень полезным. Объясним это на примере. Предположим, нам известно, как изменяется вес зерна в колосе в зависимости от роста стебля. Это не точная зависимость, а такая, о которой мы только что говорили. Однако даже такое приблизительное знание позволяет нам судить, какой процент зерна будет теряться, если установить нож комбайна на той или иной высоте. Только что описанные зависимости называются корреляционными зависимостями.

В связи с развитием массового производства, когда изделия изготовляются в сотнях и тысячах штук, возникает серьезная экономическая задача: оценить качество всей партии, сделав небольшую выборку из нее. Так приходится поступать в силу двух причин. Во-первых, проверка качества всей партии требует значительных затрат времени и средств. А во-вторых, нередко испытание приводит к непоправимой порче изделия, например фотопленка или фотобумага после проверки ее качества станет полностью непригодной. В результате приходится проверять только часть всех изделий и по этим неполным данным высказывать суждение о качестве всей партии. Такие методы в настоящее время применяются в промышленности и носят наименование статистических методов контроля. Они приносят огромную экономию, исчисляемую миллиардами рублей.

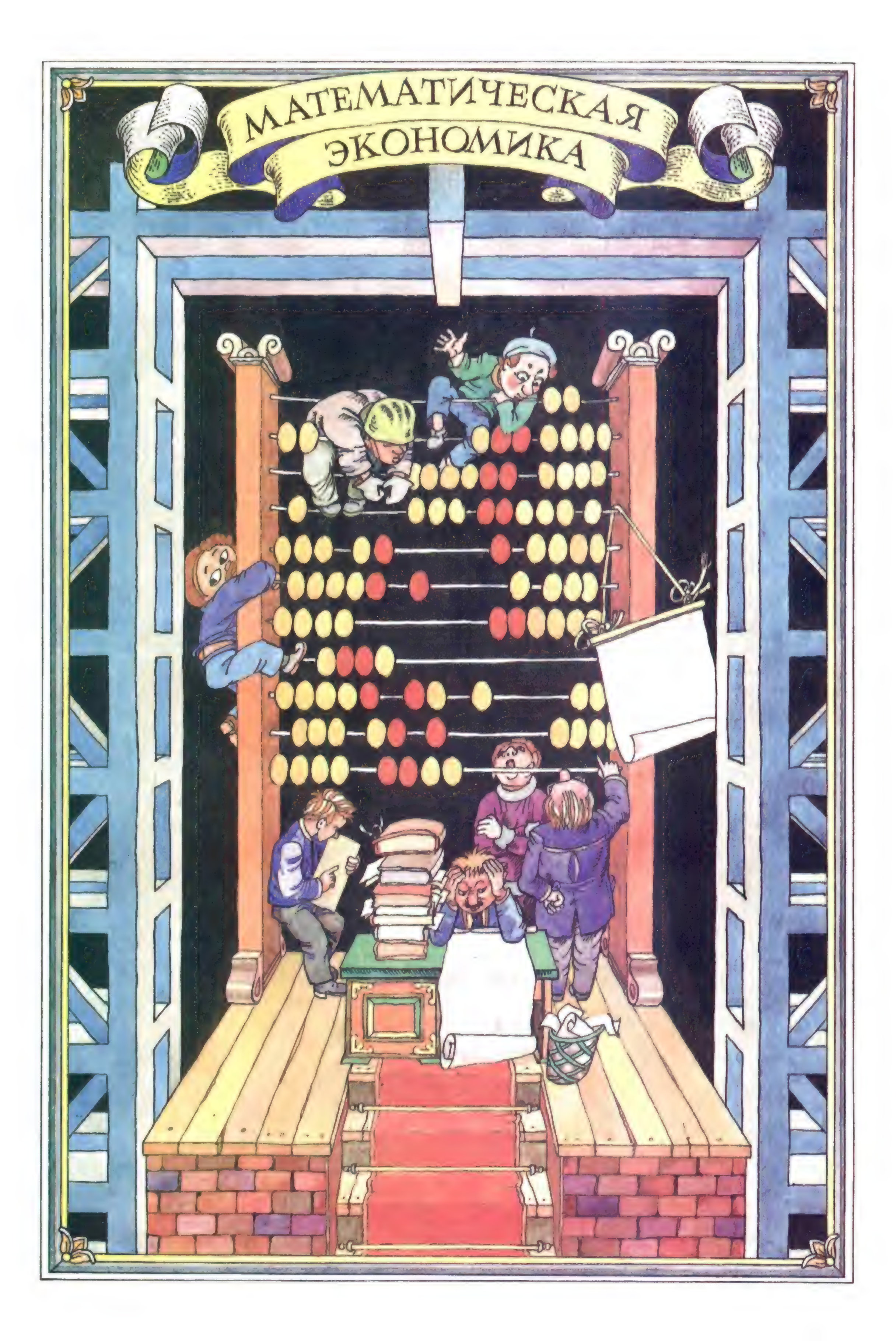
Статистическими методами пользуются для выявления закономерностей наблюдений и для проверки соответствия построенных теорий реальных явлений с их фактическим протеканием.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Математическая экономика – теоретическая и прикладная наука, предметом которой являются математические модели экономических объектов и процессов и методы их исследования.

Возникновение математических наук, несомненно, было связано с потребностями экономики. Требовалось, например, узнать, сколько земли засеять зерном, чтобы прокормить семью, как измерить засеянное поле и оценить будущий урожай.

С развитием производства и его усложнением росли и потребности экономики в математических расчетах. Современное производ-


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЭКОНОМИКА

ство – это строго сбалансированная работа многих предприятий, которая обеспечивается решением огромного числа математических задач. Этой работой занята огромная армия экономистов, плановиков и бухгалтеров, а расчеты ведут тысячи электронных вычислительных машин. Среди таких задач и проведение расчетов планов производства, и определение наиболее выгодного размещения строительных объектов, и выбор наиболее экономных маршрутов перевозок и т.д. Математическая экономика занимается также формализованным математическим описанием уже известных экономических явлений, проверкой различных гипотез на экономических системах, описанных некоторыми математическими соотношениями.

Рассмотрим два несложных примера, демонстрирующих применение математических моделей в этих целях.

Пусть спрос S и предложение D товара зависят от цены P. Для равновесия цена на рынке должна быть такой (P_*), чтобы товар был распродан и не было его излишков:

$$D(P_*) = S(P_*). \quad (1)$$

Но если, например, предложение запаздывает на один временной интервал, то, как показано на рис. 1 (где изображены кривые спроса и предложения как функций цены), при цене P_0 спрос S_0 превышает предложение D_0. И так как предложение меньше спроса, то цена возрастает и товар раскупается по цене $P_1 > P_0$. При такой цене предложение возрастает до величины S_1; теперь уже предложение выше спроса и производители вынуждены распродать товар по цене $P_2 < P_1$, после чего предложение падает и процесс повторяется. Получилась простая модель экономического цикла. Постепенно рынок приходит в равновесие: спрос, цена и предложение устанавливаются на уровне S_*, P_*, D_*.

Рис. 1 соответствует решение уравнения (1) методом последовательных приближений, который определяет корень этого уравнения, т.е. равновесные цену P_* и соответствующее значение спроса и предложения S_*, D_*.

Рассмотрим более сложный пример – «золотое правило» накопления. Величина выпуска предприятием (в рублях) конечной продукции Y_t в момент времени t определяется затратами труда L_t, производительность которого зависит от отношения степени насыщенности его оборудованием K_t к затратам труда.

Математическая запись этого такова:

$$Y_t = f(K_t/L_t)\, L_t. \quad (2)$$

Конечная продукция распределяется на потребление C_t и накопление оборудования. Если обозначить долю выпуска продукции, идущую на накопление, через s, то

$$C_t = (1 - s)\, Y_t. \quad (3)$$

В экономике s называют нормой накопления. Ее значение заключено между нулем и единицей.

За единицу времени объем оборудования изменяется на величину накопления

$$K_{t+1} - K_t = s Y_t. \quad (4)$$

При сбалансированном росте экономики все ее составляющие растут с одинаковым темпом роста λ. По формуле сложных процентов получаем:

$$Y_t = (1+\lambda)^t Y, \quad L_t = (1+\lambda)^t L, \quad K_t = (1+\lambda)^t K, \; C_t = (1+\lambda)^t C.$$

Если ввести величины, характеризующие потребление $c = C/L$, объем оборудования $R = K/L$ и выпуск продукции $y = Y/L$ на одного работника, то система соотношений (2)–(4) перейдет в систему

$$y = f(R), \quad \lambda R = sf(R), \quad c = f(R) - sf(R). \quad (5)$$

Рис. 1

Рис. 2

Второе из этих соотношений при заданных темпах роста λ и потреблении s определит фондовооруженность труда R как точку пересечения кривой $y = sf(R)$ и прямой $y = \lambda R$ на рис. 2. Эти линии обязательно пересекутся, так как функция $f(R)$, хотя и монотонно, растет, что означает рост выпуска с ростом вооруженности труда R, однако все более полого, т.е. это вогнутая функция. Последнее обстоятельство отражает тот факт, что дополнительное увеличение оборудования, приходящегося на одного рабочего, из-за роста его загруженности становится все менее эффективным («закон убывающей полезности»). Различным значениям нормы накопления S отвечает семейство кривых $y = sf(R)$. Длина $f(R) - sf(R)$ отрезка AB, как следует из формулы (5), равна потреблению c. При $s = 1$ (точка A_0 на рис. 2) потребления совсем нет – вся продукция идет на накопление оборудования. Уменьшим теперь норму накопления s. Тогда потребление c (длина AB) будет уже ненулевым, хотя темп роста λ экономики (угол наклона прямой OB) остается тем же. В точке с ординатой R_*, для которой касательная к кривой $y = f(R)$ параллельна прямой $y = \lambda R$

ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ КАНТОРОВИЧ (1912–1986)



Л. В. Канторович – советский математик и экономист, создатель линейного программирования и теории оптимального планирования социалистической экономики, академик, лауреат Нобелевской премии.

Л. В. Канторович родился в Петербурге, в семье врача. Его способности проявились необычайно рано. Уже в 4 года он свободно оперировал многозначными числами, в семилетнем возрасте освоил курс химии по учебнику старшего брата. В 14 лет он стал студентом Петербургского университета. К моменту окончания университета, в 1930 г., Л. В. Канторович уже известный ученый, автор десятка работ, опубликованных в ведущих международных математических журналах, а в 20 лет – профессор математики.

В 1935 г. ученый ввел и изучил класс функциональных пространств, в которых для некоторого набора их элементов определено отношение порядка. Теория таких пространств – их называют пространствами Канторовича, или К-пространствами, – является одним из основных разделов функционального анализа. Недавние работы, связанные с решением проблемы континуума, определили место К-пространств в ряду наиболее фундаментальных математических структур.

Л. В. Канторовича отличала поразительная способность в частной задаче увидеть ядро проблемы и, создав теорию, дать общий метод решения широкого класса подобных задач. Особенно ярко это раскрылось в его работах по вычислительной математике и математической экономике.

В начале 30-х гг. Л. В. Канторович одним из первых крупных ученых заинтересовался вычислительной математикой. Современный облик этой науки во многом был определен его трудами. Среди них – основополагающая и ставшая классической монография «Приближенные методы высшего анализа»; вычислительные методы, носящие его имя; общая теория приближенных методов, построенная на базе функционального анализа (Государственная премия 1949 г.); работы по автоматическому программированию, выполненные на заре компьютерной эры и предвосхитившие многие современные идеи, наконец, ряд изобретений в области вычислительной техники.

В 1939 г. в Ленинграде вышла небольшая брошюра «Математические методы организации и планирования производства», в которой фактически содержался новый раздел прикладной математики, впоследствии названный линейным программированием (см. *Геометрия*). Поводом к ее написанию послужила конкретная производственная задача. Осознав ключевое значение понятий вариантности и оптимальности в социалистической экономике, таких важнейших показателей, как цена, рента, эффективность, он приступает к разработке теории оптимального планирования, удостоенной впоследствии Ленинской (1965) и Нобелевской (1975) премий.

Книга «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», излагающая эту теорию, была написана в условиях ленинградской блокады и закончена уже в 1942 г.

Понимая исключительную важность этих исследований, ученый настойчиво добивался практического использования их результатов. Однако работа была опубликована только в 1959 г. и даже тогда подвергалась нападкам ортодоксальных политэкономов. Книга Л. В. Канторовича сформировала взгляды целого поколения советских экономистов. Многие идеи, впервые высказанные там, реализуются в ходе перестройки.

Международный научный авторитет ученого был очень высок. Л. В. Канторович – член многих зарубежных академий, почетный доктор многих университетов мира.

После олимпиады интересно обсудить решения задач.



потребление c^* максимально. Ей соответствует кривая семейства $y = s^*f(R)$ с некоторой нормой накопления s^*, называемой «золотой нормой накопления».

Нелегкой проблемой в математической экономике является сопоставление теории и практики: экономические показатели измерять крайне трудно – измеряются они не на лабораторных установках, наблюдения удается проводить крайне редко (вспомните переписи!), проводятся они в разных условиях и содержат массу неточностей. Поэтому здесь трудно использовать опыт измерений, накопленный в других науках, и требуется разработка специальных методов.

Развитие математической экономики вызвало появление многих математических теорий, объединяемых названием «математическое программирование» (о линейном программировании можно прочитать в статье «*Геометрия*»).

Вопросы применения математических методов в экономике были разработаны в трудах советского математика Л. В. Канторовича, которые были отмечены Ленинской и Нобелевской премиями.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

Из глубины веков ведут свою историю математические турниры и соревнования; например, с такими турнирами связана драматическая история открытия формулы Тарталья – Кардано для решения кубического уравнения (см. *Алгебраические уравнения*).

Первенство в регулярном проведении соревнований школьников, по-видимому, принадлежит Венгрии, где математические олимпиады устраивают с 1894 г. (сборник задач этих олимпиад издан на русском языке в 1976 г. в издательстве «Мир» в серии «Задачи и олимпиады»). С 1894 г. в России выходил журнал «Вестник опытной физики и элементарной математики», где учащимся и другим читателям предлагались математические задачи «на конкурс». Можно сказать, что это были заочные олимпиады.

А как быть тем школьникам наших дней, которые любят решать задачи, любят соревноваться, но еще не могут штурмовать высоты современной математики?

Для них ученые-математики, преподаватели и студенты вузов, учителя каждый год придумывают новые задачи и предлагают их на математических олимпиадах.

В СССР первые городские олимпиады по математике состоялись полвека назад – в 1934 г. в Ленинграде и Тбилиси. Одним из инициаторов их проведения был замечательный геометр, член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне. В 1935 г. состоялась математическая олимпиада в Москве. Председателем оргкомитета 1-й московской математической олимпиады был член-корреспондент АН СССР, впоследствии академик, П. С. *Александров*, а членами оргкомитета – профессора-математики МГУ.

На первых олимпиадах были заложены традиции их проведения. Математические олимпиады стали совместными праздниками мате-

матиков разных поколений – школьников, студентов (недавних участников олимпиад), руководителей кружков – учителей и молодых ученых, преподавателей и профессоров вузов. Задолго до олимпиады члены жюри начинают собирать и обдумывать задачи. На олимпиаде участникам, как правило, предлагают за три-пять часов решить три-пять различных по содержанию и трудности задач, требующих не столько знания школьной программы, сколько умения найти удачный ход мысли, способности логически четко рассуждать в непривычной ситуации. Разбор задач, который устраивают после проверки работ, обычно имеет форму лекции, где разбираются лучшие решения и характерные ошибки. Каждый участник может обсудить свою работу с членами жюри, выяснить, какие неточности он допустил. Завершает олимпиаду вручение премий и грамот.

Основная цель олимпиады, впрочем, не в том, чтобы выявить победителей, а в том, чтобы заинтересовать всех участников оригинальными задачами, привлечь новичков к систематическим занятиям в математических кружках, слушанию лекций, самостоятельной работе с книгой.

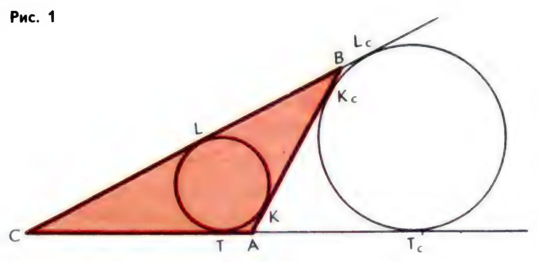
За прошедшие годы география математических олимпиад сильно расширилась, неизмеримо выросло число их участников. Олимпиады стали проводиться и в других странах, а в 1959 г. в Румынии состоялась первая международная олимпиада школьников.

С 1961 г. Министерство просвещения РСФСР, затем СССР ежегодно проводят математическую олимпиаду для школьников. С 1967 г. она стала называться Всесоюзной и состоит из пяти этапов: первый – школьные соревнования, второй – олимпиады городов и районов, третий – областные олимпиады, четвертый – республиканские олимпиады, а также олимпиады в Москве и Ленинграде и, наконец, пятый – заключительный тур. Если в школьных и городских олимпиадах могут участвовать все желающие (как правило, начиная с 5-го класса), то на дальнейшие этапы формируются команды из числа победителей предыдущих этапов.

В республиканских олимпиадах участвуют также несколько победителей заочного конкурса, который проводит журнал «Квант», а также команды некоторых специализированных физико-математических школ-интернатов. Около 150 учеников 8, 9, 10-го классов принимают участие в заключительном туре.

Из числа победителей Всесоюзной олимпиады формируется команда СССР на международную олимпиаду. В ней регулярно участвуют команды более 30 стран. В неофициальном командном первенстве – по сумме баллов, числу I, I и III премий, полученных участниками соревнований, – команда СССР почти всегда занимает одно из первых мест.

Рис. 1



Разумеется, подняться на высшие ступеньки математического «олимпийского пьедестала» удается лишь немногим. Этот успех – свидетельство не только незаурядных способностей, но и упорства, и умения быстро включаться, настраиваться на новую задачу. Не все бывшие чемпионы олимпиад стали крупными математиками, но можно назвать целый ряд известных и в нашей стране, и за рубежом ученых, чьи первые шаги были отмечены премиями олимпиад. Среди них, например, три советских математика разных поколений, каждый из которых прославился решением одной из «проблем *Гильберта*», поставленных на рубеже XIX–XX вв., – В. И. Арнольд, Ю. И. Матиясевич, В. М. Харламов.

Однако далеко не все математики – в прошлом участники и победители олимпиад. Никак нельзя думать, что неудача на олимпиаде свидетельствует об отсутствии математических способностей. После неудачи нужно, конечно, попробовать получше подготовиться к следующей олимпиаде. Тут есть большой выбор: помимо разных туров Всесоюзной олимпиады в нашей стране проходит и много других математических соревнований школьников: олимпиады, организуемые отдельными вузами, олимпиады в *летних физико-математических школах*, командные соревнования классов и школ (они регулярно проводятся, например, в Омске), «математические бои». В Ленинграде, где возникли и сохраняются многие традиции математических соревнований, в последние годы сформировалась и традиция проведения олимпиад для учащихся ПТУ. Весной 1985 г. состоялась первая Всесоюзная олимпиада учащихся ПТУ.

Можно посоветовать также решать задачи из олимпиадных сборников. Ведь жюри каждой олимпиады вынуждено не повторять старых задач, хотя среди них можно встретить поистине замечательные произведения. Приведем несколько задач, которые были предложены на олимпиадах школьников в разное время.

Задача. Построить треугольник ABC, если известна сторона AB, радиус r вписанной окружности и радиус r_c вневписанной окружности, касающейся стороны AB и продолже-

ний сторон AC и BC. (Венгрия, 1900 г.)

Решение. Предположим, что искомый треугольник построен, и отметим точки касания T и T_c с прямой AC вписанной и вневписанной окружностей (радиусов r и r_c соответственно). На нашем рисунке (рис. 1) несколько пар касательных, проведенных к каждой окружности из одной и той же точки; пользуясь тем, что в такой паре длины касательных равны, нетрудно установить, что отрезки AB и TT_c равны по длине. Отсюда вытекает способ построения: отмечаем на прямой две точки T и T_c на расстоянии AB, строим по одну сторону от этой прямой окружности радиусов r и r_c, касающиеся ее в точках T и T_c, проводим еще одну внешнюю и одну внутреннюю общую касательную к этим окружностям – и нужный треугольник построен. Задача имеет решение в том и только в том случае, если $rr_c \geqslant (c/2)^2$.

Задача. Груз массой 13,5 т упакован в некоторое число «невесомых» ящиков. Масса каждого ящика с грузом не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках. (Москва, 1956 г., VIII кл., 2-й тур.)

Решение. Докажем, что ящиками не более 350 кг (если их общий вес более 1,2 т) можно набрать вес от 1,2 до 1,5 т. Расположим их по порядку, начиная с самых тяжелых. Если первые четыре весят вместе более 1,2 т – их уже достаточно (вес будет не более 1,4 т); а если нет, то четвертый и последующие весят не более 0,3 т каждый, так что мы можем, нагружая их по порядку, обеспечить «недогруз» не более 0,3 т. Заметим, что оценка 1,2 т здесь точная: пример, когда все ящики весят поровну и чуть больше 300 кг, показывает, что ее нельзя заменить большей.

Теперь уже легко: нагружаем на 10 полуторатонок не менее чем по 1,2 т и – если что-то осталось – сваливаем остаток на 11-ю машину.

Задача. Докажите, что не существует тетраэдра, у которого каждое ребро являлось бы стороной плоского тупого угла. (Москва, 1959 г., IX кл., 1-й тур.)

Решение. Рассмотрим наибольшее по длине ребро: к нему ни в какой грани не может примыкать тупой угол.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Математические развлечения – это и решение занимательных задач, и геометрические построения, и разгадывание числовых и механических головоломок, и математические игры и фокусы. Они развивают математические способности, сообразительность, логическое мышление, укрепляют память. Математические развлечения объединяют учение и игру, труд и отдых, но для занятия ими нужны и воля, и упорство, и настойчивость в достижении цели.

Задачи-головоломки известны с давних времен, они встречаются уже в египетских папирусах. С I в. н.э. известна задача, получившая название задачи Иосифа Флавия, римского историка. Легенда рассказывает, что однажды отряд воинов, среди которых находились Флавий и его друг, был окружен. Из всех уставших, выбившихся из сил воинов, отчаявшихся спастись, нужно было выбрать двоих, которые предприняли бы попытку найти выход из окружения. Флавий предложил выбрать этих двоих путем пересчета так, чтобы каждый третий выбывал из построенных в круг воинов. Счет продолжался до тех пор, пока не осталось только два человека. Это были мудрый Флавий и его друг. На какие места в круге они встали, если в отряде был 41 воин? Древняя рукопись сообщает: на 16-е и 31-е.

Игра «крестики-нолики» – одна из древнейших, ее знают все. В квадрате, разделенном на девять клеток, игроки по очереди ставят в свободную клетку свой знак: крестик или нолик, стараясь выстроить три крестика или три нолика подряд. Тот, кто первым сделает это, выигрывает.

Если не делать ошибок, то игра оканчивается вничью, выиграть можно только в том случае, если противник ошибется. Самый правильный первый ход – занять угловую клетку. И если партнер не ответит на это своим знаком в центре, то он проиграл.

Гораздо интереснее усложненный вариант «крестиков-ноликов» – игра «пять в ряд». На листке клетчатой бумаги двое играющих по очереди ставят крестики и нолики. Выигрывает игрок, который первым выставит пять своих знаков подряд по вертикали, горизонтали или диагонали. Размеры поля игры не ограничиваются.

Издавна играют в игру «ним». Пусть имеется одна или несколько групп предметов. Играющие по очереди берут предметы из групп по правилам, которые заранее устанавливают: какое количество предметов разрешается брать за один раз и из скольких групп. Существует множество вариантов игры, и для большинства известна наилучшая стратегия, ведущая к выигрышу. Наличие самих предметов не обязательно, можно играть и с числами.

Двое называют по очереди любое число от 1 до 10 и складывают названные числа. Выигрывает тот, кто первым доведет до 100 сумму чисел, названных обоими игроками. Оптимальная стратегия в этой игре состоит в том, чтобы после хода противника называть числа, дающие, в сумме с предыдущими, члены сле-

Рис. 1 Головоломка «Ханойская башня». Перенесите кольца с левой оси на правую по правилам, изложенным в индийской легенде, не более чем за 31 ход.



дующего ряда: 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

С древности до наших дней очень популярны головоломки-шутки, они учат внимательно относиться к каждому слову условия задачи. Вот одна из них: в кармане лежат две монеты на общую сумму 15 копеек. Одна из них не пятак. Что это за монеты?

Задача основана на психологической особенности человеческого восприятия – запоминать главные факты из условия задачи. В данном случае – то, что монета в кармане не пятак. И начинаются безуспешные попытки решения. А правильный ответ: 10 коп. и 5 коп., так как в условии задачи сказано, что только одна монета не пятак.

В старинной задаче «Волк, козел и капуста» крестьянину нужно перевезти через реку волка, козла и капусту. Лодка так мала, что в ней кроме крестьянина может поместиться или только волк, или только козел, или только капуста. Но если оставить волка с козлом, то волк его съест, а если оставить козла с капустой, то будет съедена капуста. Как быть крестьянину?

Головоломки типа этой задачи называются комбинаторными (см. *Комбинаторика*). В таких головоломках требуется путем взаимной перестановки элементов расположить их в соответствии с условием задачи в определенном порядке.

В случае с крестьянином переправу нужно начать с перевозки козла. Затем крестьянин возвращается и берет волка, которого перевозит на другой берег и там оставляет, но везет обратно на первый берег козла. Здесь он оставляет его и перевозит к волку капусту. А затем, возвращаясь, перевозит козла.

К комбинаторным головоломкам относится и знаменитый венгерский кубик Рубика, и полимино, и игры типа «Игра 15», а также задачи «на маневрирование», головоломки с перестановкой шашек, «Ханойская башня» и др.

О Ханойской башне существует легенда, согласно которой где-то в глубине джунглей в буддийском храме находится пирамида, состоящая из 64 золотых дисков. День и ночь жрецы храма заняты разбором этой пирамиды. Они переносят золотые диски на новое место, строго соблюдая следующие правила: за один раз разрешается переносить только один диск и нельзя ни один диск класть на меньший диск. Предание гласит, что, как только жрецы закончат работу, грянет гром, храм рассыплется в пыль и наступит конец света.

Количество перемещений дисков, которые должны сделать жрецы, вычисляется по формуле $2^n - 1$, где n – число дисков. Предположим, что жрецы работают так быстро, что за одну секунду переносят один диск. Тогда на всю работу им понадобится $2^{64} - 1$ с, или около 580 млрд. лет. За это время храм, действительно, может рассыпаться в пыль.

Не менее интересное занятие, чем комбинаторные головоломки, – разгадывание арифметических ребусов, в которых нужно восстановить недостающие цифры. Для игр-головоломок со спичками совсем не обязательно иметь спички, их можно заменить прутиками или черточками на бумаге или земле. Задачи на разрезание относятся к геометрическим головоломкам. Их удобно решать, вычертив предполагаемые фигуры на листке клетчатой бумаги.

Самые древние геометрические головоломки – это головоломки на складывание геометрических фигур из отдельных кусочков. Уже

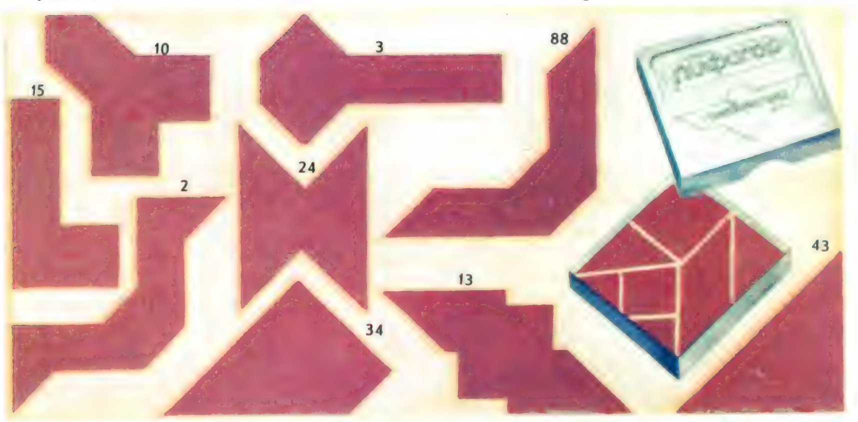


Рис. 2 «Пифагор» – головоломка на складывание фигур.

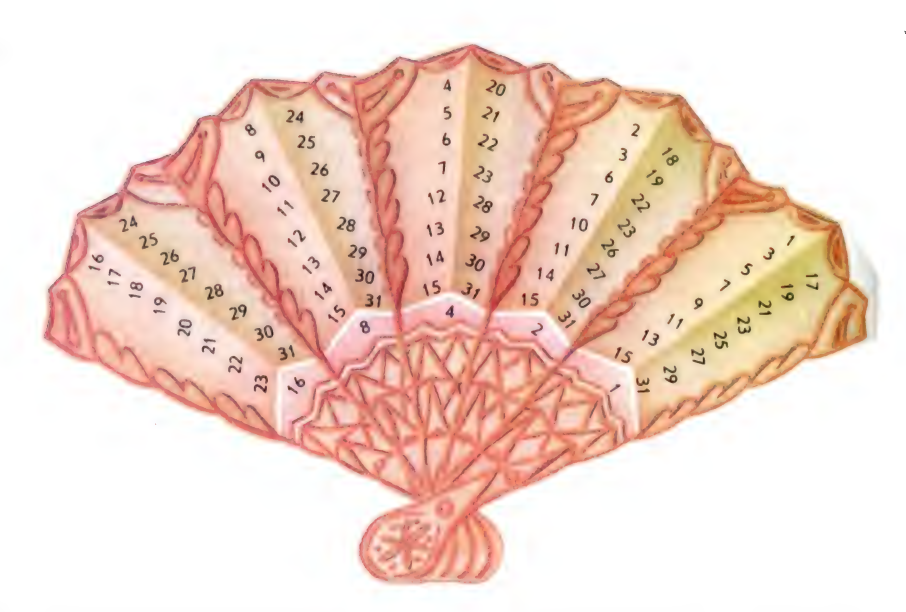


Рис. 3 «Волшебный веер» для отгадывания задуманных чисел.

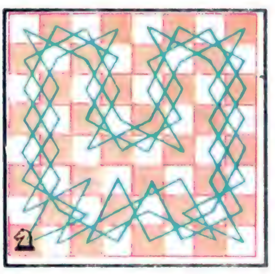
МАТЕМАТИКА НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

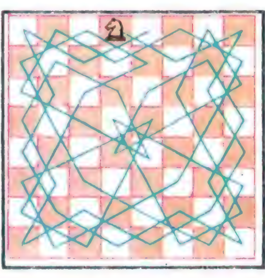


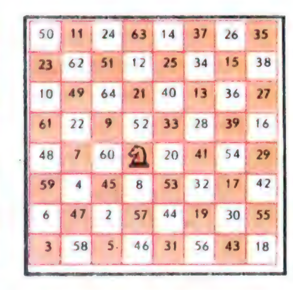
Шахматы не только популярная игра, но и источник множества интересных математических задач. Не случайно шахматные термины можно встретить в литературе по *комбинаторике*, теории графов, кибернетике, теории игр, программированию на электронных вычислительных машинах. Расскажем о нескольких математических задачах на шахматной доске.

Задача 1. Обойти конем все поля доски, посетив каждое из них по одному разу.

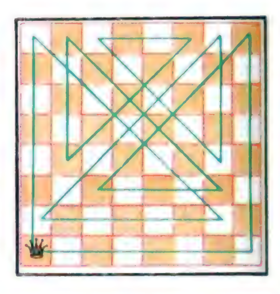
Этой задачей занимались многие математики XVIII и XIX вв., в том числе и Л. *Эйлер*. Хотя задача была известна и до Эйлера, лишь он впервые обратил внимание на ее математическую сущность. Неизвестно до сих пор, сколько всего существует маршрутов, хотя доказано, что число их не больше 30 млн. Придумано много методов построения[1] маршрутов коня, установлены различные математические закономерности. Приведем три маршрута. На рис. 1,2 они изображены графически (каждые два соседних поля маршрута соединены отрезком), а на рис. 3 поля маршрута последовательно пронумерованы от 1 до 64. Маршруты на рис. 1, 3 замкнутые (исходное и конечное поля связаны ходом коня), а маршрут на рис. 2 открытый. Маршрут на рис. 3 образует полумагический квадрат 8 × 8 (сумма чисел на любой вертикали и на любой горизонтали равна числу 260, а на главных диагоналях отлична от этого числа, см. *Магические и латинские квадраты*) и, кроме того, обладает необычайной симметрией – при повороте доски на 180° пер-



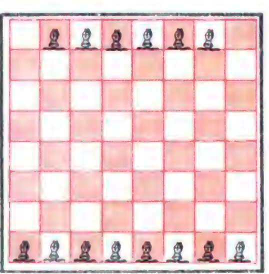


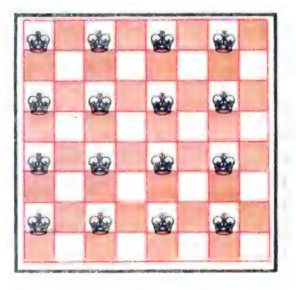


50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60		20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18











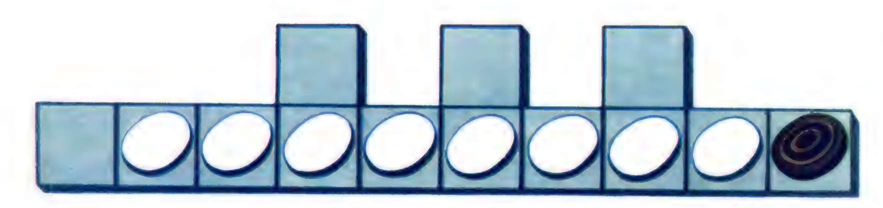


Рис. 4 Головоломка с перемещением шашек. Переместите черную шашку в крайнюю левую клетку, используя свободные боковые поля. На это требуется не менее 28 перемещений шашек.

сами названия этих головоломок: «Пифагор», «Колумбово яйцо», «Архимедова игра» – говорят об их древности. Эти игры легко сделать самому, вырезав их из картона.

Топологические головоломки тоже одни из самых древних. К ним относятся всем известные лабиринты, проволочные, шнурковые и объемные сборно-разборные головоломки.

Удивительной для непосвященных кажется способность человека отгадывать задуманное другим число. Но если вы узнаете секреты математических фокусов, то сможете не только их показывать, но и придумывать новые.

Вы просите товарища задумать любое число, затем отнять от него 1, результат умножить на 2, из произведения вычесть задуманное число и сообщить вам результат. Прибавив к нему число 2, вы отгадаете задуманное. Секрет фокуса становится понятен, если записать предложенные действия в виде алгебраического выражения $(x-1)\cdot 2-x$, где x – задуманное число. Раскрыв скобки и выполнив действия, мы получим, что это выражение равно $x-2$.

вая половина маршрута (от 1 до 32) превращается во вторую (от 33 до 64).

Задачи о маршрутах составлены и для других фигур. На рис. 4 изображен кратчайший замкнутый маршрут ферзя по всей доске, занимающий 14 ходов.

Задача 2. Сколькими способами можно расставить на доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу, т. е. никакие два из них не стояли бы на одной линии (вертикали, горизонтали или диагонали)?

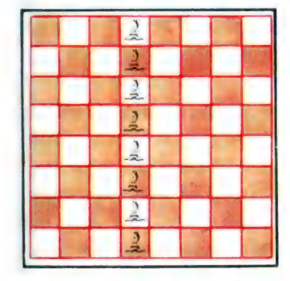
Найти ту или иную расстановку несложно, труднее подсчитать их общее число. Доказано, что существует 92 требуемые расстановки, причем они получаются из 12 основных поворотами и зеркальными отражениями доски. Одно из решений задачи представлено на рис. 5.

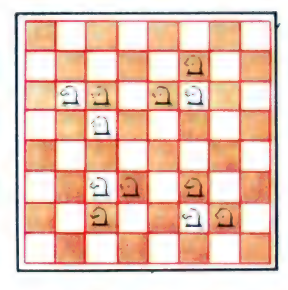
Подобные задачи ставятся для всех шахматных фигур. Сначала выясняется, какое наибольшее число фигур не угрожает на доске друг другу, а затем – сколько имеется расстановок. Ладей, как и ферзей, можно расставить максимум восемь (всего $8! = 40\,320$ расстановок), например, их можно поставить на те же поля, что и ферзей на рис. 5. Максимальное число не угрожающих друг другу слонов равно 14 – рис. 6 (256 расстановок), коней – 32 (две расстановки, на всех белых или на всех черных полях), королей – 16 – рис. 7 (281 571 расстановка).

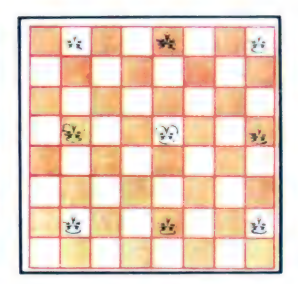
Другой класс задач на расстановки связан с расположением минимального числа фигур так, чтобы они держали под ударом все свободные поля доски. Для этой цели достаточно взять пять ферзей (рис. 8), восемь ладей (их можно поставить на те же поля, что и ферзи на рис. 5), восемь слонов (рис. 9), двенадцать коней (рис. 10), девять королей (рис. 11). Не обо всех фигурах известно, сколько существует необходимых расстановок.

Для охраны доски меньшим, чем пять, числом фигур не обойтись, однако их состав можно «ослабить», заменив двух ферзей ладьями или даже ладьей с королем или слоном (рис. 12).

Нумерация рисунков идет в порядке их расположения.







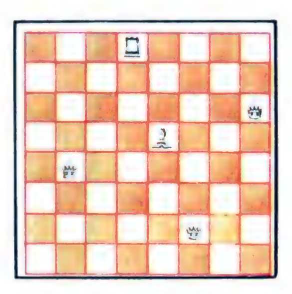



Рис. 5 Задача на маневрирование. Сколько раз нужно перевести стрелку, чтобы поменять местами вагоны, если через туннель может проходить только паровоз? Решения: 1-14 перемещений.

Можно угадать результат арифметических действий над неизвестным числом, например, так. Ваш товарищ задумал число. Вы просите умножить его на 2, затем прибавить к произведению 12, сумму разделить пополам и вычесть из нее задуманное число. Какое бы число ни было задумано, результат всегда будет равен 6, так как $(2x + 12)/2 - x = 6$ при любом x.

На рис. 3 изображен «волшебный веер». С его помощью можно отгадать любое задуманное число от 1 до 31. Вы просите указать, на каких лепестках веера написано задуманное число, а затем в уме складываете числа, стоящие под столбцами на этих лепестках. Их сумма всегда будет равна задуманному числу.

В наше время большую популярность получили логические задачи-головоломки. Вот пример решения такой задачи.

Три мальчика, устав от игр, прилегли отдохнуть под деревом и уснули. Пока они спали, их товарищи испачкали им сажей лбы. Проснувшись и взглянув друг на друга, мальчики начали смеяться. Внезапно один из них замолчал, так как понял, что его лоб тоже испачкан. Он подумал: «Мы смеемся, потому что каждый из нас считает, что его лицо чистое. Но если мое лицо чистое, то Коле должен быть непонятен смех Андрея. Раз Андрей смеется, а мое лицо чистое, то он смеется над Колей. Коля должен это понять и перестать смеяться. А раз он не перестает, значит, мой лоб тоже в саже».

Попробуйте ответить на вопрос еще одной логической головоломки.

Если головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, была труднее, чем головоломка, которую вы разгадали после того, как вы разгадали головоломку, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, то была ли головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, труднее, чем эта? Ответ: да.

Игра «15».



МАТРИЦА

Матрица – прямоугольная таблица, составленная из чисел.

Располагать те или иные данные в виде прямоугольных таблиц приходится довольно часто. Например, если три завода выпускают пять различных видов продукции, то отчет о производстве за год может быть дан в виде таблицы

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{pmatrix},$$

где x_{ij} – количество продукции j-го вида, выпущенное i-м заводом в течение этого года. Кратко будем обозначать эту таблицу $X = (x_{ij})$ и назовем ее прямоугольной матрицей с тремя строками и пятью столбцами. Аналогично определяется понятие прямоугольной матрицы с m строками и n столбцами (или, короче, $(m \times n)$-матрицы). При $m = n$ такую матрицу называют квадратной, а число n – порядком этой матрицы.

Если ассортимент продукции не изменился в течение следующего года, то отчет о производстве за второй год тоже имеет вид матрицы $Y = (y_{ij})$. Но тогда выпуск продукции за два года выражается матрицей $X + Y = (x_{ij} + y_{ij})$. Вообще, при сложении двух $(m \times$

$\times n$)-матриц складываются соответствующие элементы этих матриц. Если же в течение второго года производство каждого вида продукции на каждом заводе увеличилось на 20%, то для любых i, j верно равенство $y_{ij} = 1{,}2 \cdot x_{ij}$. В этом случае пишут $Y = 1{,}2X$. Чтобы умножить матрицу X на число λ, надо умножить на это число каждый элемент матрицы.

Выпуск продукции можно выражать не только в штуках, метрах или тоннах, но и в рублях. Для этого надо знать цену каждого вида продукции. Поскольку она может меняться от года к году, обозначим через λ_{jk} цену j-го вида продукции в k-й год. Эти цены можно записать в виде $(n \times s)$-матрицы Λ, где n – число видов продукции и s – число лет. Например, при $s = 4$ имеем матрицу

$$\Lambda = \begin{matrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} & \lambda_{53} & \lambda_{54} \end{matrix}$$

Выпуск продукции i-м заводом за k-й год, выраженный в рублях, составит величину

$$a_{ik} = x_{i1}\lambda_{1k} + x_{i2}\lambda_{2k} + \ldots + x_{in}\lambda_{nk}, \qquad (1)$$

где каждое слагаемое есть произведение величины выпуска соответствующего вида продукции в выбранных единицах на стоимость единицы этой продукции в рублях. Числа a_{ik} образуют матрицу A с m (у нас $m = 5$) строками и s (у нас $s = 4$) столбцами. Такую матрицу принято называть произведением матриц X и Λ:

$$A = X \cdot \Lambda.$$

Итак, если X является $(m \times n)$-матрицей, а Λ – $(n \times s)$-матрицей, то их произведением называют $(m \times s)$-матрицу $A = X\Lambda$, состоящую из элементов, определяемых по формуле (1). При умножении квадратных матриц n-го порядка снова получается квадратная матрица n-го порядка.

Особую роль играет матрица E

$$E = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1, \end{matrix}$$

у которой вдоль диагонали из верхнего левого угла в правый нижний стоят единицы, а остальные элементы равны нулю; для любой квадратной матрицы $n \times n$ X имеем: $XE = EX = X$, т.е. она играет роль единицы. Если *определитель* квадратной матрицы X отличен от нуля, то существует обратная ей матрица X^{-1}, такая, что $XX^{-1} = X^{-1}X = E$. Возникает матричная алгебра, в которой верны многие правила обычной алгебры, например $(XY)Z = X(YZ)$, $X(Y+Z) = XY + XZ$ и т.д. Однако умножение не является коммутативным, т.е., вообще говоря, $XY \neq YX$.

Впервые матрицы встретились в математике в связи с решением систем *линейных уравнений*. С системой уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = l_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = l_m \end{cases} \qquad (2)$$

связаны матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов этих уравнений, и расширенная матрица, получаемая добавлением к матрице A столбца свободных членов. Операции, производимые при решении системы уравнений (2), можно выполнять непосредственно над расширенной матрицей. Такую запись решения применяли древнекитайские математики во II в. до н.э., а в европейской науке матричная запись систем линейных уравнений применяется с XIX в.

В наши дни теория матриц находит обширные приложения в вычислительной математике, физике, экономике и других областях науки.

МНОГОГРАННИК

Многогранники представляют собой простейшие тела в пространстве, подобно тому как многоугольники – простейшие фигуры на плоскости. Многогранные формы мы видим ежедневно: спичечный коробок, книга, комната, многоэтажный дом (с горизонтальной крышей) – прямоугольные параллелепипеды; молочные пакеты – тетраэдры или тоже параллелепипеды; граненый карандаш, гайка дают представление о призмах (впрочем, параллелепипед – это тоже четырехугольная *призма*). Многие архитектурные сооружения или их детали представляют собой пирамиды или усеченные пирамиды – такие формы имеют знаменитые египетские пирамиды или башни Кремля. Многие многогранные формы, например «домик» на рис. 1 и «круглый дом» на рис. 2, не имеют специальных названий. С чисто геометрической точки зрения многогранник – это часть пространства, ограниченная плоскими многоугольниками – гранями. Стороны и вершины граней называют ребрами и вершинами самого многогранника. Грани образуют так называемую многогранную поверхность. Чтобы исключить из рассмотрения многогранные фигуры типа изображенных на рис. 3, которые не принято называть многогранниками, на многогранную поверхность обычно накладывают такие ограничения:

1) каждое ребро должно являться общей стороной двух, и только двух, граней, называемых смежными;

2) каждые две грани можно соединить цепоч-



кой последовательно смежных граней;
3) для каждой вершины углы прилежащих к этой вершине граней должны ограничивать некоторый многогранный угол.

Многогранник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от плоскости любой из его граней. Это условие эквивалентно каждому из двух других: 1) отрезок с концами в любых двух точках многогранника целиком лежит в многограннике, 2) многогранник можно представить как пересечение нескольких полупространств.

Для любого выпуклого многогранника справедлива формула Эйлера (см. *Топология*), устанавливающая связь между числом вершин В, ребер Р и граней Г:

$$В - Р + Г = 2.$$

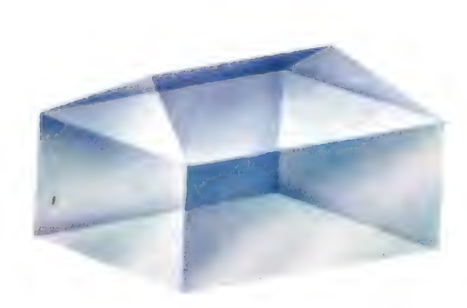
Для невыпуклых многогранников это соотношение, вообще говоря, неверно, например для многогранной поверхности, изображенной на рис. 2; $В = Г = 24$, $Р = 48$, поэтому $В - Р + Г = 0$. Число $\chi = В - Р + Г$ называется эйлеровой характеристикой многогранника и может равняться 2, 0, -2, -4, -6, ... Эйлерова характеристика показывает, грубо говоря, сколько «дырок» имеет многогранник. Число дырок $p = 1 - \chi/2$ (или $\chi = 2 - 2p$).

Простейшая классификация по числу вершин (углов, сторон) для многогранников неэффективна. Самые простые многогранники – четырехвершинники или четырехгранники – всегда ограничены четырьмя треугольными гранями. Но уже пятигранники могут быть совершенно разных типов, например: четырехугольная пирамида ограничена четырьмя треугольниками и одним четырехугольником (рис. 4,а), а треугольная призма ограничена двумя треугольниками и тремя четырехугольниками (рис. 4,б). Примеры пятивершинников – четырехугольная пирамида и треугольный диэдр (рис. 4,в).

Самые распространенные в окружающем нас мире многогранники, конечно, имеют специальные названия. Так, n-угольная пирамида имеет n-угольник в основании и n боковых треугольных граней, сходящихся в общей вершине треугольников (рис. 4,а, где $n = 4$); n-угольная призма ограничена двумя равными, параллельными и одинаково расположенными n-угольниками – основаниями – и n параллелограммами – боковыми гранями, соединяющими соответственные стороны оснований (рис. 4,*б*, где $n = 3$).

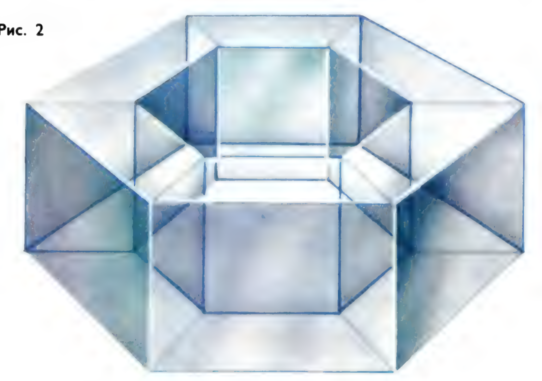
Промежуточное положение между пирамидами и призмами занимают усеченные пирамиды, получающиеся из пирамид отсечением меньших пирамид параллельными основаниям плоскостями (рис. 5). Среди природных форм кристаллов встречаются диэдры, или бипирамиды, составленные из двух пирамид с общим основанием (рис. 4,*в*). Архимед рассматривал также n-угольные антипризмы, ограниченные двумя параллельными, но повернутыми друг относительно друга n-угольниками и соединяющими их, как показано на рис. 6, $2n$-треугольниками (при большом n антипризма похожа на пионерский барабан – рис. 6).

Рис. 1



Как и многоугольники, многогранники классифицируют также по степени их симметричности. Среди пирамид выделяют правильные: в основании у них лежит правильный многоугольник, а высота – перпендикуляр, проведенный из вершины к плоскости основания,– попадает в центр основания пирамиды.

Рис. 2



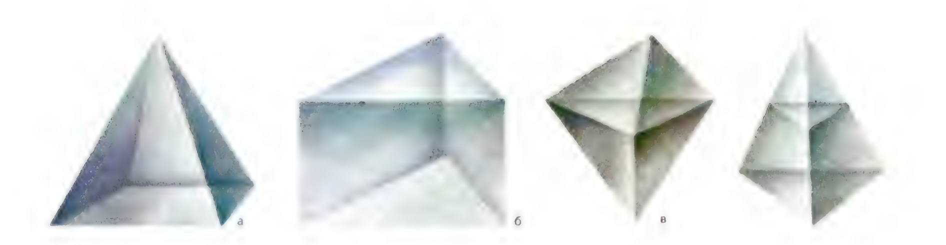
Аналогом параллелограмма является параллелепипед; так же как параллелограмм, параллелепипед имеет центр симметрии, в котором пересекаются и делятся пополам все четыре диагонали (отрезки, соединяющие вершины, не принадлежащие одной грани). Правильные призмы в основаниях имеют пра-

Рис. 3





Рис. 4 Рис. 5



вильные многоугольники, расположенные так, что прямая, проходящая через их центры, перпендикулярна плоскостям оснований. Так же должны быть расположены и основания правильной n-угольной антипризмы, но только одно основание должно быть повернуто на угол $180°/n = \pi/n$ относительно другого. Все правильные многогранники имеют довольно много самосовмещений – поворотов и симметрий, переводящих многогранник в себя. Совокупность всех самосовмещений, считая и тождественное, образует так называемую *группу* симметрий многогранника. По группам симметрий в кристаллографии классифицируют монокристаллы, имеющие, как правило, многогранную форму.

Рис. 6

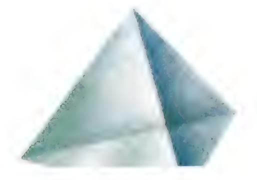




Симметричность, правильность рассмотренных выше многогранников не совсем полные – у них могут существовать неравные грани, разные многогранные углы. Исключение составляют три многогранника: правильный *тетраэдр* – правильная треугольная пирамида с равными ребрами, ограниченная четырьмя правильными треугольниками (рис. 7,*а*); *куб*, или правильный гексаэдр,– правильная четырехугольная призма с равными ребрами, ограниченная шестью квадратами (рис. 7,*б*); наконец, октаэдр – правильный четырехугольный диэдр с равными ребрами, ограниченный восемью правильными треугольниками (рис. 7,*в*); октаэдр можно определить и как правильную треугольную антипризму с равными ребрами. В отличие от произвольных правильных пирамид, призм, диэдров и антипризм – тетраэдр, куб, октаэдр таковы, что любые их две грани (и любые два многогранных угла) можно совместить с помощью некоторого самосовмещения всего многогранника. Кроме того, их многогранные углы правильные, т. е. имеют равные плоские и равные двугранные углы.

Аналогично правильным многоугольникам на плоскости можно определить и правильные многогранники «вообще»: это выпуклые многогранники, ограниченные равными правильными многоугольниками и имею-

Рис. 7





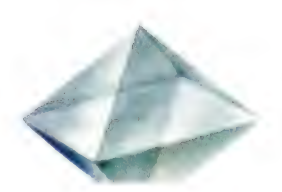
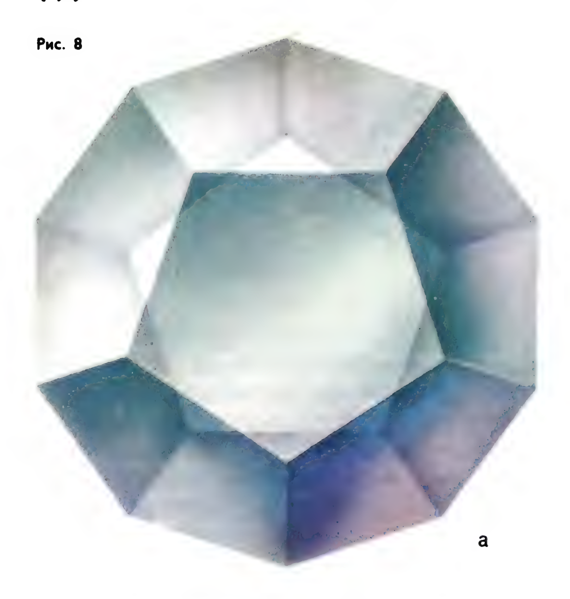


Рис. 8



а



б

щие равные правильные многогранные углы. Оказывается, кроме трех названных выше видов правильных многогранников – правильного тетраэдра, куба и октаэдра – существуют еще только два вида правильных многогранников: додекаэдр (двенадцатигранник) и икосаэдр (двадцатигранник), ограниченные соответственно 12 правильными пятиугольниками и 20 правильными треугольниками,– рис. 8,*а,б.* Эти два многогранника связаны между собой так же, как куб и тетраэдр (см. *Куб*): центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра – рис. 9,– и наоборот.

Рис. 9



Сам факт существования всего пяти действительно правильных многогранников удивителен – ведь правильных многоугольников на плоскости бесконечно много.

Все правильные многогранники были известны еще в Древней Греции, и им посвящена заключительная, XIII книга знаменитых «Начал» *Евклида.* Эти многогранники часто называют также платоновыми телами – в идеалистической картине мира, данной великим древнегреческим мыслителем Платоном, четыре из них олицетворяли четыре стихии: тетраэдр – огонь, куб – землю, икосаэдр – воду и октаэдр – воздух; пятый же многогранник, додекаэдр, символизировал все мироздание – его по-латыни стали называть *quinta essentia* («пятая сущность»). Придумать правильный тетраэдр, куб, октаэдр, по-видимому, было нетрудно, тем более что эти формы имеют природные кристаллы, например: куб – монокристалл поваренной соли (NaCl), октаэдр – монокристалл алюмокалиевых квасцов ($(KAlSO_4)_2 \cdot 12H_2O$). Существует предположение, что форму додекаэдра древние греки получили, рассматривая кристаллы пирита (сернистого колчедана FeS). Имея же додекаэдр, нетрудно построить и икосаэдр: как уже говорилось, его вершинами будут центры двенадцати граней додекаэдра – рис. 9.

МНОГОУГОЛЬНИК

Часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной $A_1A_2 \ldots A_nA_1$, не имеющей точек самопересечения, называется многоугольником или n-угольником ($n \geqslant 3$). Звенья ломаной – отрезки $A_1A_2, \ldots, A_nA_1$ – называются сторонами, точки $A_1, \ldots, A_n$ – вершинами, углы между лучами, проведенными из каждой вершины в соседние,– углами многоугольника (рис. 1).

Общим свойством n-угольников является неизменность суммы их (внутренних) углов:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = (n-2) \cdot 180° = (n-2)\pi.$$

С древних времен многоугольники принято классифицировать и называть соответственно степени их симметричности, правильности. Среди *треугольников* выделяют равнобе-

Рис. 1

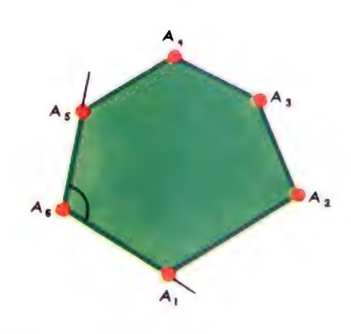
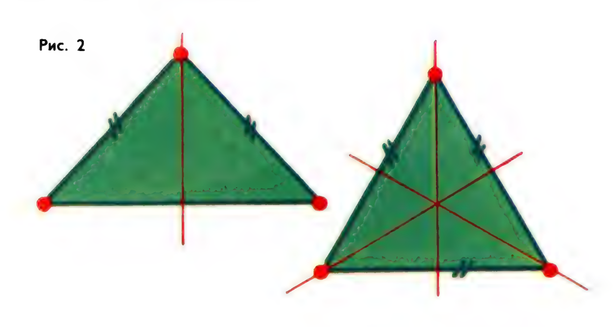


Рис. 2



дренные (с одной осью симметрии) и равносторонние, или правильные (с тремя осями симметрии) (рис. 2). Четырехугольники, имеющие центр симметрии, называют параллелограммами. Конечно, такое определение эквивалентно школьному: параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Четырехугольник, у которого две стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) не параллельны, именуют трапецией.

Можно доказать, что больше одного центра симметрии многоугольник иметь не может, а вот осей симметрии может быть любое число. Четырехугольники с единственной осью симметрии бывают двух видов: равнобедренные (или равнобокие) трапеции и дельтоиды (или ромбоиды) (рис. 3). Параллелограммы, имеющие оси симметрии, подразделяются на ромбы (параллелограммы с равными сторонами), прямоугольники (параллелограммы с равными – прямыми – углами) и квадраты (ромбы с прямыми углами или прямоугольники с равными сторонами); осей симметрии у них 2 или 4 (рис. 4).

При произвольном $n \geqslant 3$ рассматривают правильные n-угольники: у них все стороны и все (внутренние) углы равны. Правильный n-угольник можно получить, разделив окружность на n равных дуг и соединив соседние точки деления (рис. 5). Центр этой (описанной) окружности называется центром правильного n-угольника; через него проходят n осей симметрии n-угольника.

Если при данном $n \geqslant 5$ соединить не сосед-

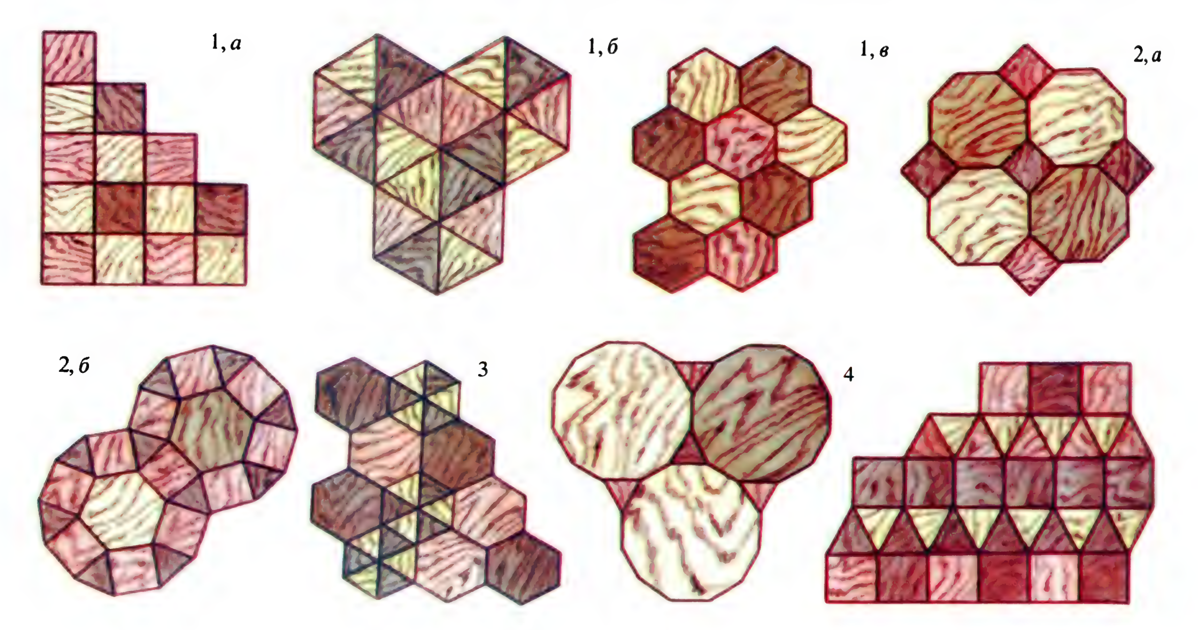
ПАРКЕТЫ ИЗ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Самый простой, но и самый скучный паркет получается, если плоскость разбить на равные квадраты так, как показано на рис. 1, *а*. Здесь два квадрата имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек. Столь же просты паркеты из правильных треугольников и шестиугольников (рис. 1, *б* и 1, *в*).

Паркетом будем называть такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

Вероятно, вам случалось видеть паркет, составленный из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 2, *а*). Красивый паркет можно составить из правильных шестиугольников, квадратов и равносторонних треугольников (рис. 2, *б*).

Паркет производит приятное впе-



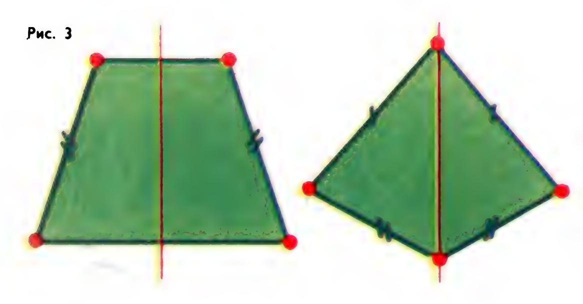


Рис. 3

ние, а следующие через m дуг точки деления окружности, где $1 < m < n/2$, то проведенные n хорд образуют фигуру, которую обозначают символом $\{n/m\}$. На рис. 6 и 7 изображены пентаграмма $\{5/2\}$ и октаграмма $\{8/3\}$.

Еще в глубокой древности была поставлена практическая задача построения правильного n-угольника M_n с помощью циркуля и линейки (см. *Геометрические построения*). Построения M_3, M_4 и M_6 очень просты и показаны на рис. 8. Конечно, построение M_n эквивалентно делению окружности на n равных дуг. Дугу легко разделить пополам, построив биссектрису соответствующего центрального угла, поэтому по правильному k-угольнику легко построить $2k$-угольник, затем $4k$-угольник и, вообще, M_n при любом $n = k \cdot 2^m$. Следовательно, предыдущие построения дают возможность построить две серии правильных n-угольников: при $n = 3 \cdot 2^m$ и $n = 4 \cdot 2^m$, где $m \geqslant 0$,– а общую задачу построения M_n достаточно решить лишь для нечетных n.

Евклид в своих «Началах» кроме построения двух указанных серий многоугольников приводит построения правильных пятиуголь-

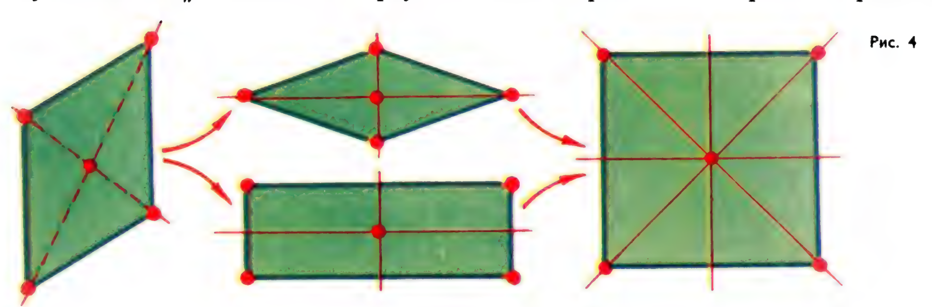
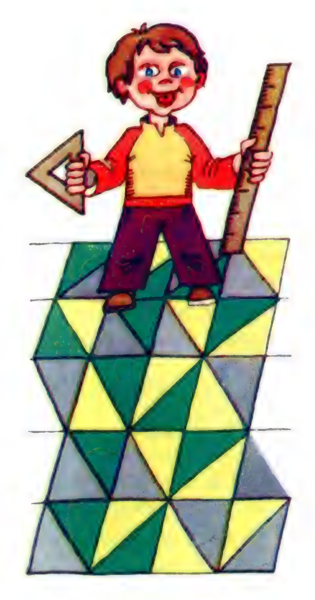


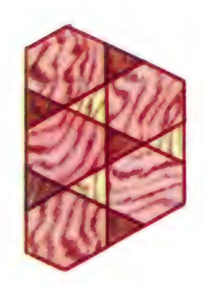
Рис. 4

чатление, если он достаточно симметричен. Фигура называется симметричной, если ее можно наложить на саму себя не «тривиальным» способом (т. е. не таким, когда все точки останутся на своем месте).

Например, на рис. 2,*б*, повернув всю сетку вершин и сторон, образующих паркет из шестиугольников, квадратов и треугольников, на 60° вокруг центра одного из шестиугольников, мы получим ту же самую сетку вершин и сторон.

С точки зрения симметрии наше определение паркета не слишком удачно. Оно допускает паркеты, не обладающие никакой симметрией. Взяв обычный паркет из шестиугольников (рис. 1,*в*), можно «испортить» его, подразделив некоторые из шестиугольников на шесть треугольников. Легко понять, что получится вновь паркет в смысле нашего определения. Но можно доказать (попробуйте), что, подразделив, например, три шестиугольника, как показано на рис. 3, и оставив все остальные неподразделенными, мы получим паркет, совсем лишенный симметрии. Чтобы устранить некрасивые, недостаточно симметричные паркеты, мы введем такое определение: паркет называется правильным, если его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую заданную его вершину. Оказывается, что все многообразие правильных паркетов можно описать. Если длина h стороны многоугольников паркета задана, то существует только 11 различных (не накладывающихся друг на друга) правильных паркетов. Все они изображены на рис. 1, 2, 4.









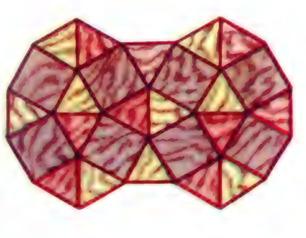
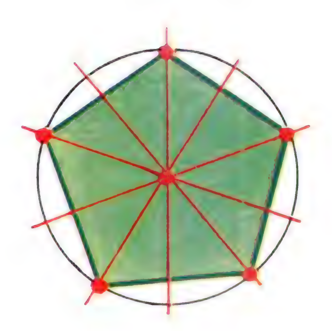
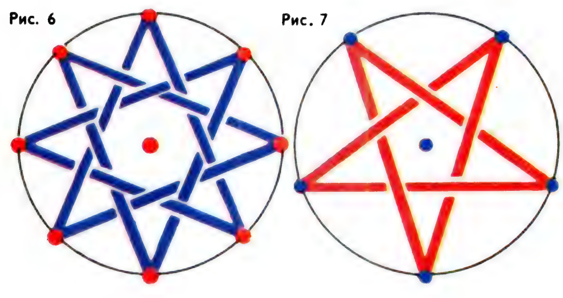


Рис. 5



ника и пятнадцатиугольника (а вместе с ними еще двух серий M_n: для $n = 5 \cdot 2^m$ и $n = 15 \cdot 2^m$). Построение пятиугольника или десятиугольника сводится к так называемому «золотому сечению» отрезка. Ясно, что для построения M_{10} достаточно по известному радиусу описанной окружности R построить сторону x десятиугольника. Рассматривая один из десяти треугольников со сторонами $OA = OB = R$, $AB = x$ и углами $AOB = 36°$, $A = B = 72°$, из которых составлен десятиугольник, после проведения биссектрисы BC (рис. 9), из подобия треугольников OAB и ABC и равенства отрезков AB, BC, OC получаем пропорцию

Рис. 6 Рис. 7



$x/(R-x) = R/x$, которая с античных времен называется «золотой». Она показывает, что точка C делит отрезок OA так, что бóльшая часть относится к меньшей так же, как весь отрезок к бóльшей части. Такое деление отрезка и называют «золотым сечением». Пропорция записывается как уравнение

$$x^2 + Rx - R^2 = 0,$$

из которого

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R.$$

Конечно, по отрезку R легко построить и отрезок $R\sqrt{5}$ (рис. 10), а затем и x. Короткое построение дано на рис. 11: отрезок OE дает

Рис. 8

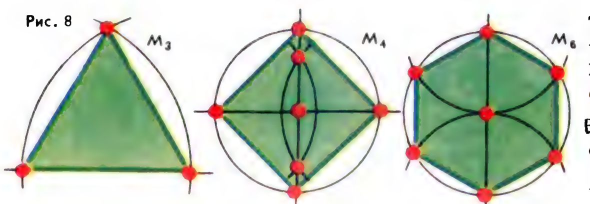
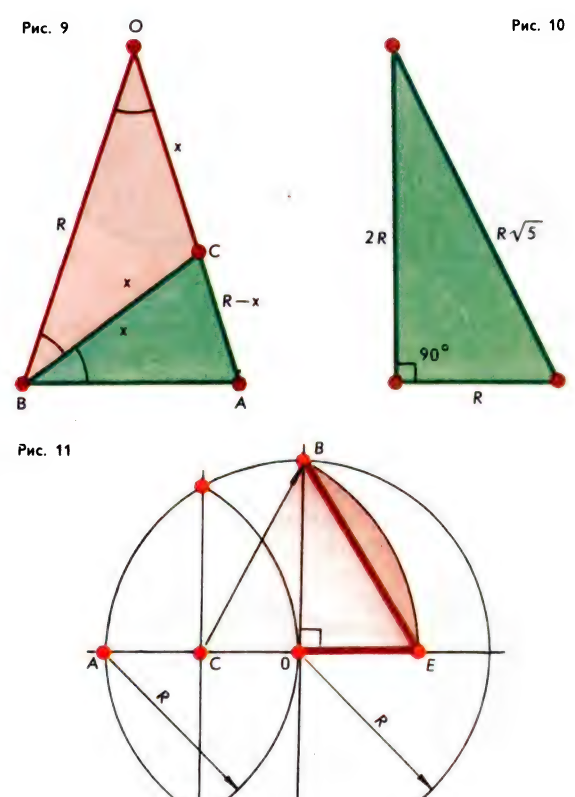


Рис. 9 Рис. 10 Рис. 11



сторону правильного десятиугольника, BE – пятиугольника, вписанных в окружность с центром O.

Поскольку построение M_n эквивалентно построению угла в $360°/n$, а углы $60° = 360°/6$ и $36° = 360°/10$ мы уже умеем строить, то по ним строится и угол $60° - 36° = 24° = 360°/15$, а значит, и правильный пятнадцатиугольник.

Прошло более двух тысячелетий, прежде чем евклидов список n-угольников удалось пополнить. Это сделал в 1796 г. немецкий математик К. Ф. *Гаусс*: используя алгебраические идеи, он дал построение правильного семнадцатиугольника и доказал невозможность построения с помощью только циркуля и линейки правильных n-угольников при $n = 7$ и 9. Отметим, что построение правильного девятиугольника давало бы угол в $360°/9 = 40°$, а вместе с ним и угол в $20° = 60°/3$, т. е. трисекцию угла в 60°, которую невозможно осуществить циркулем и линейкой (см. *Классические задачи древности*). Более того, К. Ф. Гаусс доказал, что построение M_n при нечетном n осуществимо тогда, и только тогда, когда n является простым числом вида $F_k = 2^{2^k} + 1$ или произведением нескольких таких различных чисел, называемых числами Ферма. В настоящее время, как и несколько веков назад, известно только 5 простых чисел Ферма: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ и $F_4 = 65\,537$. (П. *Ферма*, чьим именем названы

эти числа, полагал, что все они простые, однако Л. *Эйлер* указал, что число Ферма $F_5 = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417$.) Построение правильного 257-угольника, занимающее около полусотни страниц, описал сам Гаусс.

МНОГОЧЛЕН

Многочленом $P(x)$ от одной переменной x называют выражение вида

$$P(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \ a_n \neq 0. \quad (1)$$

Число n называют степенью многочлена, a_n – старшим коэффициентом, a_0 – свободным членом.

Для многочленов определены операции сложения и умножения по правилам:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \ldots; \quad (2)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что свойства операций над многочленами аналогичны свойствам арифметических операций над действительными числами:

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x);$$
$$P(x) Q(x) = Q(x) P(x);$$
$$(P(x) + Q(x)) + R(x) = P(x) + (Q(x) + R(x)); \quad (P(x) Q(x)) R(x) = P(x)(Q(x) R(x));$$
$$P(x)(Q(x) + R(x)) = P(x) Q(x) + P(x) R(x).$$

Уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ – многочлен n-й степени от x, называют *алгебраическим уравнением* n-й степени. Число x_0, такое, что $P(x_0) = 0$, называют корнем многочлена. В 1799 г. немецкий математик К. Ф. *Гаусс* доказал теорему, которая носит название «основная теорема алгебры многочленов»: любой многочлен ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень.

В конце XVIII в. французский математик Э. Безу сформулировал и доказал следующую теорему: остаток от деления многочлена $P(x)$ (с действительными коэффициентами) на двучлен $x - a$ равен $P(a)$. Отсюда, в частности, получается, что если a – корень многочлена P, то $P(x)$ делится без остатка на $x - a$. Наибольшая степень k такая, что многочлен $P(x)$ делится на $(x - a)^k$, называется кратностью корня a. Так как при делении многочлена степени n на двучлен $x - a$ получается многочлен степени $n - 1$, то с учетом основной теоремы алгебры приходим к выводу: многочлен степени n (с комплексными коэффициентами) имеет в точности n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Кроме того, этот многочлен можно разложить на линейные множители:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = a_n (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_s)^{k_s}, \quad (4)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_s$ – корни многочлена, $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$, k_i – кратность корня a_i. Можно доказать, что если $a + bi$ – корень многочлена с действительными коэффициентами, то и $a - bi$ – также его корень. Перемножая в разложении (4) множители $(x - a - bi)$ и $(x - a + bi)$, получим многочлен второй степени с действительными коэффициентами: $(x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2$. Отсюда следует, что многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители первой и второй степени с действительными коэффициентами.

Французский математик Ф. Виет (1540–1603) установил следующие соотношения между корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

и его коэффициентами:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1,$$
$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Это утверждение называется теоремой Виета. Для квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ соотношения имеют вид

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 x_2 = q,$$

где x_1 и x_2 – корни трехчлена.

Велика роль многочленов в математике. Многочлены являются довольно простыми функциями. Их легко дифференцировать и интегрировать. Оказывается, любую непрерывную функцию на заданном отрезке можно сколь угодно хорошо приблизить многочленом, например так, чтобы их значения отличались меньше чем на 0,001. Приближение функции многочленом в небольшой окрестности некоторой точки определения функции позволяет выяснить характер поведения функции вблизи этой точки: возрастает или убывает функция, или в этой точке она имеет экстремум (см. *Экстремум функции*).

Большой вклад в теорию приближения функций многочленами внес П. Л. *Чебышев*.

«Ты когда-нибудь видела, как рисуют множество?» – «Множество чего?» – спросила Алиса. – «Ничего, – отвечала Соня. – Просто множество!».

Л. Кэррол



МНОЖЕСТВА

Множество – одно из основных понятий современной математики, используемое почти во всех ее разделах.

Во многих вопросах приходится рассматривать некоторую совокупность элементов как единое целое. Так, биолог, изучая животный и растительный мир данной области, классифицирует все особи по видам, виды по родам и т.д. Каждый вид является некоторой совокупностью живых существ, рассматриваемой как единое целое.

Для математического описания таких совокупностей и было введено понятие множества. По словам одного из создателей теории множеств – немецкого математика Георга Кантора (1845–1918), «множество есть многое, мыслимое нами как единое». Разумеется, эти слова не могут рассматриваться как математически строгое определение множества, такого определения не существует, поскольку понятие множества является исходным, на основе которого строятся остальные понятия математики. Но из этих слов ясно, что можно говорить о множестве натуральных чисел, множестве треугольников на плоскости.

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются конечными, а остальные множества – бесконечными. Например, множество китов в океане конечно, а множество рациональных чисел бесконечно. Конечные множества могут быть заданы перечислением их элементов (например, множество учеников в данном классе задается их

списком в классном журнале). Если множество A состоит из элементов a, b, c, то пишут: $A=\{a,\ b,\ c\}$. Бесконечные множества нельзя задать перечнем их элементов. Их задают обычно, указывая свойство, которым обладают все элементы данного множества, но не обладают никакие элементы, не принадлежащие этому множеству. Такое свойство называют характеристическим для рассматриваемого множества. Если $P(x)$ – сокращенное обозначение предложения «элемент x обладает свойством P», то множество всех элементов, имеющих свойство P, обозначают так: $\{x\cdot P(x)\}$. Например, запись $\{x\cdot x^2-3x+2=0\}$ означает множество корней уравнения $x^2-3x+2=0$, т.е. множество $\{1,\ 2\}$. Может случиться, что не существует ни одного элемента, обладающего свойством P (например, нет ни одного нечетного числа, которое делилось бы на 2). В этом случае во множестве $\{x\cdot P(x)\}$ нет ни одного элемента. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым. Его обозначают знаком $\varnothing$.



Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут: $x\in A$, в противном случае пишут: $x\notin A$ или $x\bar{\in}A$. Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют равными (совпадающими). Например, равны множество равносторонних треугольников и множество равноугольных треугольников, так как это одни и те же треугольники: если в треугольнике все стороны равны, то равны и все его углы; обратно, из равенства всех трех углов треугольника вытекает равенство всех

трех его сторон. Очевидно, что равны два конечных множества, отличающиеся друг от друга лишь порядком их элементов, например $\{a, b, c\} = \{c, a, b\}$.

Всякий квадрат является прямоугольником. Говорят, что множество квадратов является частью множества прямоугольников, или, как говорят в математике, является подмножеством множества прямоугольников. Если множество A является подмножеством множества B, то пишут: $A \subset B$ или $B \supset A$. Для любого множества A верны включения $A \subset A$ и $\varnothing \subset A$.

Из данных множеств A и B можно построить новые множества, применяя операции пересечения, объединения и вычитания. Пересечением множеств A и B называют их общую часть, т. е. множество элементов, принадлежащих как A, так и B. Это множество обозначают: $A \cap B$. Например, пересечением двух геометрических фигур является их общая часть, пересечением множества ромбов с множеством прямоугольников – множество квадратов и т. д.

Объединением множеств A и B называют множество, составленное из элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. В различных вопросах классификации используется представление множеств в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств. Например, множество многоугольников является объединением множества треугольников, четырехугольников, ..., n-угольников.

Если применять операции объединения и пересечения к подмножествам некоторого множества U, то снова получатся подмножества того же множества U. Эти операции обладают многими свойствами, похожими на свойства операций сложения и умножения чисел. Например, пересечение и объединение множеств обладают свойствами коммутативности и ассоциативности, пересечение дистрибутивно относительно объединения, т. е. для любых множеств A, B и C верно соотношение $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ и т. д. Но в то же время у операций над множествами есть ряд свойств, не имеющих аналогов в операциях над числами. Например, для любого множества A верны равенства $A \cap A = A$ и $A \cup A = A$, верен второй закон дистрибутивности $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и т. д. С помощью свойств операций над множествами можно преобразовывать выражения, содержащие множества, подобно тому как с помощью свойств операций над числами преобразовывают выражения в обычной алгебре. Возникающая таким путем алгебра называется булевой алгеброй, по имени английского математика и логика Дж. Буля (1815–1864), который занимался ею в связи с проблемами математической логики. Булевы алгебры находят многочисленные применения, в частности в теории электрических сетей.

Основной характеристикой конечного множества является число его элементов (например, множество вершин квадрата содержит 4 элемента). Если в множествах A и B поровну элементов, например если $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, то из элементов этих множеств можно составить пары (a_1, b_1), ..., (a_n, b_n), причем каждый элемент из A, равно как и каждый элемент из B, входит в одну, и только одну, пару. Говорят, что в этом случае между элементами множеств A и B установлено взаимно-однозначное соответствие. И наоборот, если между двумя конечными множествами A и B можно установить взаимно-однозначное соответствие, то в них поровну элементов.

Г. Кантор предложил аналогичным образом сравнивать между собой бесконечные множества. Говорят, что множества A и B имеют одинаковую мощность, если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие. Сравнивая таким путем множества, составленные из чисел, Кантор показал, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством рациональных чисел, хотя множество натуральных чисел является лишь частью множества рациональных чисел. Таким образом, в теории бесконечных множеств теряет силу утверждение, что «часть меньше целого».

Множества, имеющие ту же мощность, что и множество натуральных чисел, называют счетными. Таким образом, множество рациональных чисел счетно. Важнейший пример несчетного множества – множество всех действительных чисел (или, что то же самое, множество точек на прямой линии). Так как прямая линия непрерывна, то такую несчетную мощность называют мощностью континуума (от латинского *continuum* – «непрерывный»). Мощность континуума имеют множества точек квадрата, куба, плоскости и всего пространства.

В течение долгих лет математики решали проблему: существует ли множество, мощность которого является промежуточной между счетной и мощностью континуума. В 60-х гг. нашего века американский математик П. Коэн и чешский математик П. Вопенка почти одновременно независимо друг от друга доказали, что как существование такого множества, так и отсутствие его не противоречат остальным аксиомам теории множеств (подобно тому, как принятие аксиомы о параллельных или отрицание этой аксиомы не противоречат остальным аксиомам геометрии).



НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных целых чисел, называется наибольшим общим делителем этих чисел. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ он обозначается $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Например: $(28, 21) = 7$, $(60, 27, 42) = 3$.

Для того чтобы найти наибольший общий делитель двух целых чисел, можно воспользоваться алгоритмом Евклида (см. ***Евклида алгоритм***). Если же каждое из данных чисел разложено на простые множители, то его можно отыскать иначе. Для этого нужно выписать простые числа, входящие в каждое из данных разложений, причем если простой множитель входит в разложение одного из чисел k раз, а в разложение другого – l раз и $k < l$, то этот простой множитель следует выписать k раз. Произведение всех выписанных простых чисел и даст наибольший общий делитель заданных чисел.

Пример: Найдем (100, 150):

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$
$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$
$$(100,\ 150) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$$

или

$$\begin{array}{r|l} 150 & 100 \\ \underline{100} & \overline{\ 1\ } \\ 50 & \end{array}; \qquad \begin{array}{r|l} 100 & 50 \\ \underline{100} & \overline{\ 2\ } \\ 0 & \end{array}$$

Нахождение наибольшего общего делителя двух чисел оказывается полезным при сокращении дробей: после сокращения на наибольший общий делитель числителя и знаменателя полученная дробь будет уже несократимой.

НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из данных целых чисел, называется наименьшим общим кратным этих чисел. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ оно обозначается $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Например: $[4, 6] = 12$, $[21, 42, 63] = 126$. Если числа a и b одного знака, то $[a, b] = ab/(a, b)$, где (a, b) – ***наибольший общий делитель*** чисел a и b. Таким образом, вычисление наименьшего общего кратного чисел можно свести к вычислению их наибольшего общего делителя. Если же нам известны разложения чисел a и b на простые множители, то получить наименьшее общее кратное чисел a и b можно так: выписать подряд простые числа, входящие хотя бы в одно из разложений, причем если простое число p входит k раз в разложение одного из чисел, l раз в разложение другого и $k < l$, то число p следует выписать l раз; произведение всех выписанных чисел и даст наименьшее общее кратное чисел a и b.

Пример. Найдем [100, 150 и 108]:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$
$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$
$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$
$$[100,\ 150,\ 108] = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2700.$$

При сложении дробей мы обычно приводим их к общему знаменателю, который является наименьшим общим кратным знаменателей данных дробей.

НЕИЗВЕСТНЫХ ИСКЛЮЧЕНИЕ

Исключением неизвестного называют переход от системы алгебраических уравнений к системе (уравнению, совокупности уравнений), которая не содержит этого неизвестного и является следствием исходной системы. Для того чтобы иметь возможность вычислить исключенное неизвестное, к полученной системе добавляют одно или несколько уравнений из исходной системы (см. *Линейное уравнение*).

Для решения линейных систем широко применяют метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных. Суть его состоит в следующем. Можно считать, что в первом уравнении системы коэффициент при неизвестном x_1 отличен от нуля – в противном случае можно просто перенумеровать неизвестные. Разделим каждый член первого уравнения на этот коэффициент, а затем из каждого из остальных уравнений системы вычтем почленно полученное уравнение, умноженное на коэффициент при x_1 в уравнении, из которого вычитается первое уравнение. Тогда во всех уравнениях получившейся системы, кроме первого, коэффициент при x_1 будет равен 0. Другими словами, мы исключили из этих уравнений неизвестное x_1. Теперь если во втором уравнении нет ненулевого коэффициента при неизвестных, то возможны два случая: 1) уравнение имеет вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$ (где n – число неизвестных), так как этому уравнению удовле-

творяет любой набор чисел, то его можно просто вычеркнуть из системы; 2) если это уравнение имеет вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$, то рассматриваемая система, а следовательно, и исходная система несовместны. Если же во втором уравнении есть неизвестное, при котором коэффициент не равен 0, то его можно принять за x_2 и исключить x_2 из всех уравнений, кроме второго и первого. Продолжая этот процесс, мы либо когда-нибудь встретим уравнение вида $0 = b$, где $b \neq 0$, и тем самым узнаем, что исходная система не имеет решений; либо (так как число уравнений, из которых исключаются неизвестные, каждый раз уменьшается) придем к системе m уравнений с n переменными (равносильной исходной) вида

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \qquad (1) \\ x_m + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

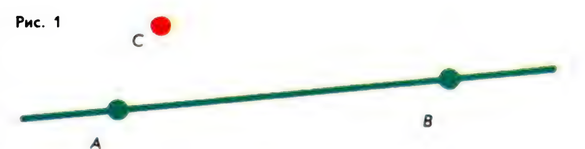
где $m \leqslant n$. Если $m = n$, то систему такого вида называют треугольной; при этом из последнего уравнения можно найти x_n $(x_n = b_n)$, затем из предпоследнего уравнения найти $x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1}$, x_{n-2} и т.д. Таким образом, однозначно находятся все неизвестные и система имеет в точности одно решение. Если же $m < n$, то систему (1) называют трапециедальной; при этом переменным x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n можно придать любые значения, а затем, как и в предыдущем случае (однозначно), выразить через них остальные неизвестные, следовательно, в этом случае система имеет бесконечно много решений.

Метод последовательного исключения неизвестных для решения систем был в древности известен в Китае: ряд задач, решаемых аналогичным методом, помещен в трактате «Арифметика в девяти главах» (около II в. до н.э.). Естественно, что в этом трактате в основном рассматривались системы с целыми коэффициентами. Для исключения неизвестных все уравнения (кроме выбранного) предварительно умножались на коэффициент при исключаемом неизвестном в выбранном уравнении. Это делалось для того, чтобы после исключения неизвестного снова получалась система с целыми коэффициентами. Так обычно поступают и в наши дни при решении систем с целыми коэффициентами.

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ

Необходимое и достаточное условия – форма записи и осмысления математической *теоремы*. Например, теорему (рис. 1) «если точка C не лежит на прямой AB, то $AC + BC > AB$»

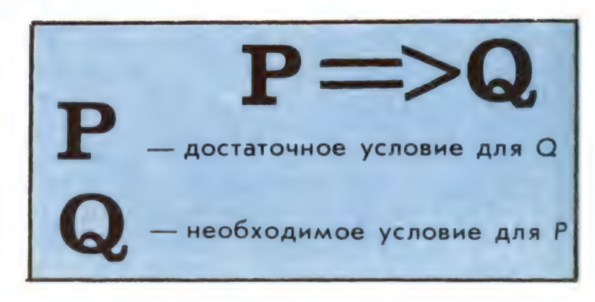
Рис. 1



можно разъяснить так: достаточно знать, что точка C не принадлежит прямой AB, и тогда мы можем утверждать, что $AC + BC > AB$. В математике принято эту формулировку, содержащую слово «достаточно», выражать по-другому: для того чтобы имело место неравенство $AC + BC > AB$, достаточно, чтобы точка C не принадлежала прямой AB.

Вообще, если сказано, что некоторое утверждение P является достаточным для Q, то это означает, что утверждается справедливость теоремы, в которой P - условие, а Q – заключение.

Рис. 2



Рассмотренную теорему можно разъяснить еще и так: если $C \notin (AB)$, то непременно должно быть выполнено неравенство $AC + BC > AB$. В математике принято эту формулировку выражать по-другому, используя слово «необходимо»: для того чтобы точка C лежала вне прямой AB, необходимо выполнение неравенства $AC + BC > AB$.

Вообще, если сказано, что некоторое утверждение Q является необходимым для P, то это означает, что утверждается справедливость теоремы, в которой P – условие, а Q – заключение.

Иначе говоря, каждую теорему (рис. 2)

$$(\ldots) P \Rightarrow Q$$

(где многоточие выражает разъяснительную часть теоремы, P – условие, Q – заключение) можно выразить следующими способами:

1) если верно P, то верно и Q;

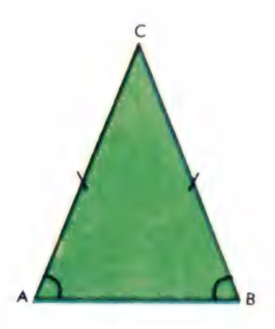
2) для справедливости Q достаточно, чтобы выполнялось P;

3) для справедливости P необходимо, чтобы выполнялось Q.

Если для некоторой теоремы справедлива также и обратная ей теорема, то ее формулировку можно выразить по-другому, используя слова «необходимо и достаточно». Например, теорема (рис. 3)

$$(\text{дан } \triangle ABC)\ (AC = BC) \Rightarrow (\angle A = \angle B)$$

Рис. 3



и обратная ей теорема

(дан $\triangle ABC$) $(\angle A = \angle B) \Leftrightarrow (AC = BC)$

– обе справедливы. Иными словами, для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо, чтобы два угла этого треугольника были равными (исходная теорема); кроме того, чтобы треугольник был равнобедренным, достаточно, чтобы два угла этого треугольника были равными (обратная теорема). Это кратко записывается в виде

(дан $\triangle ABC$) $(AC = BC) \Rightarrow (\angle A = \angle B)$

и читается словами так: для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы два угла этого треугольника были равными.

Вот еще несколько примеров необходимых и достаточных условий. 1) Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, чтобы они были равными. 2) Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы все его углы были прямыми. 3) Для параллельности прямых a и b необходимо и достаточно, чтобы они были симметричны относительно некоторой точки. 4) Для того чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были перпендикулярны. 5) Для того чтобы диагонали четырехугольника были перпендикулярны, достаточно, чтобы он был ромбом. 6) Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был прямоугольником, необходимо, чтобы его диагонали были равны: $AC = BD$. 7) Для того чтобы число x_0 было корнем многочлена $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, необходимо и достаточно, чтобы многочлен $f(x)$ без остатка делился на $x - x_0$. 8) Для того чтобы дифференцируемая на $[a, b]$ функция $f(x)$ достигала (рис. 4) максимума (или минимума) в некоторой внутренней точке x_0 отрезка $[a, b]$, необходимо, чтобы в этой точке производная функции обращалась в нуль: $f'(x_0) = 0$. 9) Для того чтобы система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой системы был отличен от нуля. 10) Для того чтобы прямая a была перпендикулярна плоскости α, достаточно, чтобы прямая a была перпендикулярна двум непараллельным прямым, лежащим в плоскости α (рис. 5).

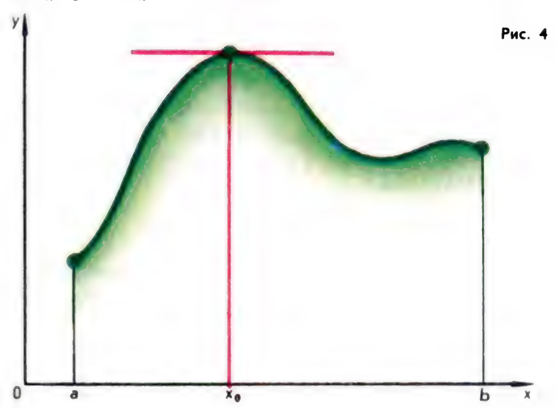


Рис. 4

Слова «необходимо и достаточно» нередко заменяются словами: «тогда, и только тогда, когда» или «в том, и только в том, случае, если». Например, четырехугольник в том, и только в том, случае является параллелограммом, если его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.

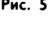
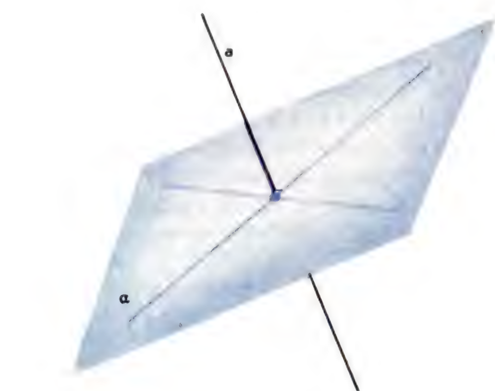


Рис. 5



Вместо того чтобы сказать «достаточное условие», «необходимое условие», иногда говорят «достаточный признак», «необходимый признак». Иногда даже говорят просто «признак», считая ясным, о каком из признаков (достаточном или необходимом) идет речь. Например, теорема «для того чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9» называется признаком делимости на 9. Теоремы о накрест лежащих углах при пересечении двух прямых третьей (взаимно обратные друг другу) объединяются общим названием «признак параллельности».

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Рассмотрим две функции, графики которых изображены на рис. 1 и 2. График первой функции можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Эту функцию можно на-

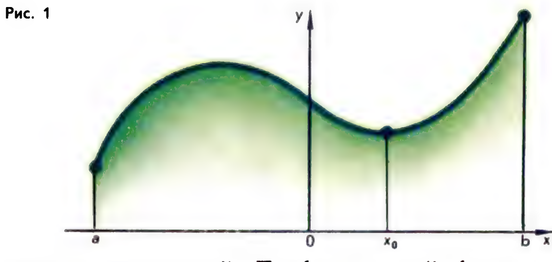


Рис. 1

звать непрерывной. График другой функции так нарисовать нельзя. Он состоит из двух непрерывных кусков, а в точке x_0 имеет разрыв, и функцию мы назовем разрывной.

Такое наглядное определение непрерывности никак не может устроить математику, поскольку содержит совершенно нематематические понятия «карандаш» и «бумага». Точное математическое определение непрерывности дается на основе понятия предела и состоит в следующем.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и x_0 – некоторая точка этого отрезка. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если при стремлении x к x_0 (x рассматривается только из отрезка $[a, b]$) значения функции стремятся к $f(x_0)$, т.е. если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \qquad (1)$$

Функция называется непрерывной на отрезке, если она непрерывна в каждой его точке.

Если в точке x_0 равенство (1) не выполняется, функция называется **разрывной в точке** x_0.

Как видим, математически свойство непрерывности функции на отрезке определяется через местное (локальное) свойство непрерывности в точке.

Величина $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента, разность значений функции $f(x)-f(x_0)$ называется приращением функции и обозначается Δy. Очевидно, что при стремлении x к x_0 приращение аргумента стремится к нулю: $\Delta x \to 0$.

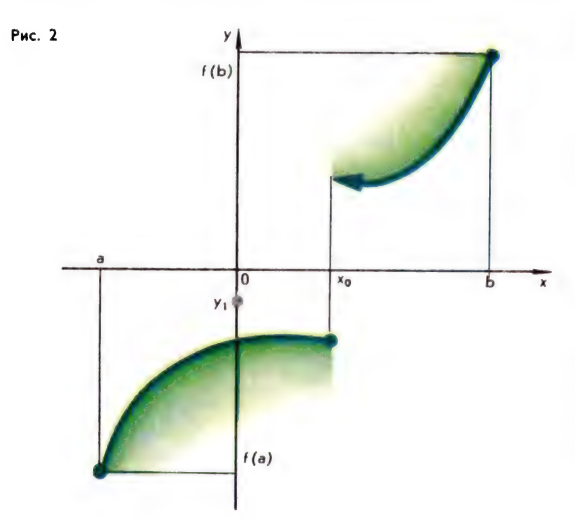


Рис. 2

Перепишем равенство (1) в равносильном виде

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)]=0.$$

Используя введенные обозначения, его можно переписать так:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y=0.$$

Итак, если функция непрерывна, то при стремлении приращения аргумента к нулю приращение функции стремится к нулю. Говорят и иначе: малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции. На рис. 3 приведен график непрерывной в точке x_0 функции, приращению Δx соответствует

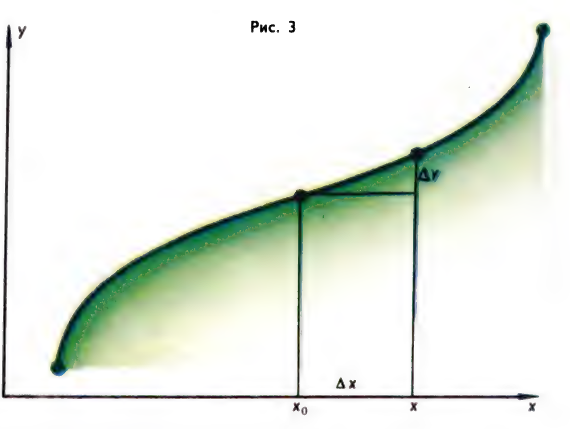


Рис. 3

приращение функции Δy. На рис. 4 приращению Δx соответствует такое приращение функции Δy, которое, как бы мало Δx ни было, не будет меньше половины длины отрезка AB; функция разрывна в точке x_0.

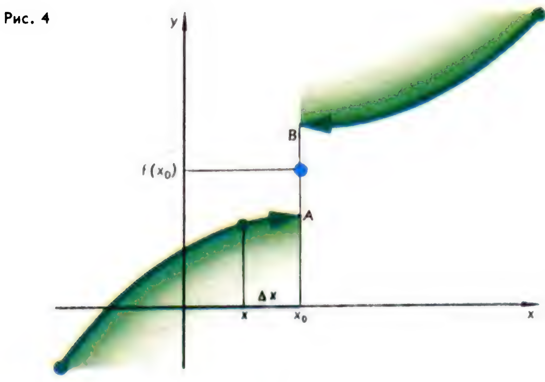
Наше представление о непрерывной функции как о функции, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, прекрасно подтверждается свойствами непрерывных функций, которые доказываются в математическом анализе. Отметим, например, такие их свойства.

1. Если непрерывная на отрезке функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю.

2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает все промежуточные значения между значениями в концевых точках, т.е. между $f(a)$ и $f(b)$.

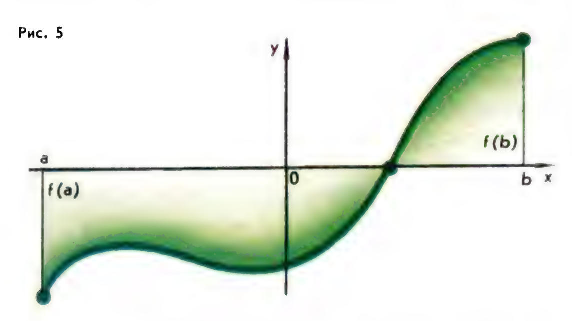
3. Если функция непрерывна на отрезке, то на этом отрезке она достигает своего наибольшего и своего наименьшего значения, т.е. если m – наименьшее, а M – наибольшее значения функции на отрезке $[a, b]$, то найдутся на этом отрезке такие точки x_1 и x_2, что $f(x_1) = m$ и $f(x_2)=M$.

Рис. 4



Геометрический смысл первого из этих утверждений совершенно ясен: если непрерывная кривая переходит с одной стороны оси Ox на другую, то она пересекает эту ось (рис. 5). Разрывная функция этим свойством не обладает, что подтверждается графиком функции на рис. 2, а также свойствами 2 и 3. На рис. 2 функция не принимает значения y_1, хотя оно заключено между $f(a)$ и $f(b)$. На рис. 6 приведен пример разрывной функции $y = \{x\}$ (дробная часть числа x), которая не достигает своего наибольшего значения.

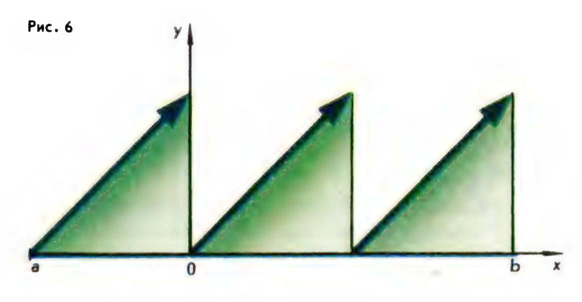
Рис. 5



Примером непрерывной функции может служить любая из *элементарных функций*. Каждая элементарная функция непрерывна на любом отрезке, на котором она определена. Например, функции $y = x^2$ и $y = 2^x$ непрерывны на любом отрезке $[a, b]$, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[0, b]$, функция $y = x/(2 - x)$ непрерывна на любом отрезке, не содержащем точку $x = 2$.

Сложение, вычитание, умножение непрерывных на одном и том же отрезке функций вновь приводят к непрерывным функциям. При делении двух непрерывных функций получится непрерывная функция, если знаменатель всюду отличен от нуля.

Рис. 6



К понятию непрерывной функции математика пришла, изучая в первую очередь различные законы движения. Пространство и время непрерывны, и зависимость, например, пути s от времени t, выраженная законом $s = f(t)$, дает пример непрерывной функции $f(t)$.

С помощью непрерывных функций описывают состояния и процессы в твердых телах, жидкостях и газах. Изучающие их науки – теория упругости, гидродинамика и аэродинамика – объединяются одним названием – «механика сплошной среды».

НЕРАВЕНСТВА

Неравенство – это два числа или математических выражения, соединенных одним из знаков: $>$ (больше), $<$ (меньше), $\geqslant$ (больше или равно), $\leqslant$ (меньше или равно). Запись $a > b$ означает то же, что $b < a$, так что наличие двух противоположных знаков неравенства – просто дополнительное удобство. Неравенства, содержащие знак $>$ или $<$, называют строгими, а содержащие знак $\geqslant$ или $\leqslant$ – нестрогими.

Числовое неравенство может быть верным или неверным; например, неравенства $2^7 > 5^3$; $40/77 < 13/25$; $\sqrt{2} \geqslant 1{,}4142$; $5 \leqslant 5$; $-1 \leqslant 0$ верны, а $\pi > 355/113$ неверно. Таким образом, с точки зрения *математической логики* неравенство является высказыванием. Неравенство с переменными (т. е. неравенство, в запись которого входят буквы, принимающие разные значения) может при одних значениях переменных быть верным, при других – нет. Доказать такое неравенство – значит доказать, что оно выполнено при всех допустимых значениях переменных (такие неравенства называются тождественными). Для неравенства с переменными можно поставить задачу: решить неравенство, т. е. описать множество значений переменных, при которых оно выполнено.

Решая или доказывая неравенства, мы опираемся на основные свойства отношения «больше – меньше» между числами:

(1) отношение неравенства антисимметрично, т. е. для любых различных чисел a, b либо $a > b$, либо $b > a$, и транзитивно, т. е. для любых трех чисел a, b, c если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

(2) если $a > b$, то $a + c > b + c$ при любом c;

(3) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.

Из последних двух свойств, связывающих отношение неравенства между числами с арифметическими операциями, именно свойство (3) вызывает наибольшее число ошибок у начинающих: часто забывают, что при ум-

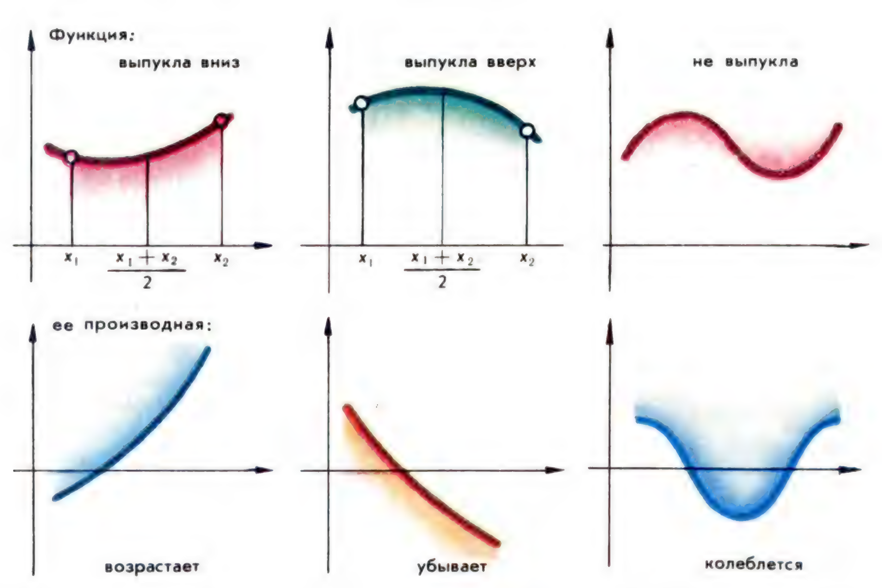


Рис. 1
Выпуклые функции и их производные

ножении на отрицательное число неравенство изменяется на противоположное. Из основных свойств (1), (2), (3) можно вывести все другие: если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$ (правило почленного сложения неравенств); если $0 < a < b$, n – натуральное число, то $a^n < b^n$ и т. п.

При расширении понятия числа – переходя от целых чисел к рациональным, затем к действительным – мы должны определять отношение «больше – меньше» на новом множестве так, чтобы сохранялись основные его свойства. По определению из двух дробей p/q и m/n (с положительными знаменателями q, n) первая больше, если $pn > mq$; из двух положительных бесконечных десятичных дробей больше та, у которой больше единиц в самом левом из несовпадающих разрядов (при этом не рассматриваются дроби с окончаниями 9999 ...).

С помощью неравенств задаются основные числовые множества (*отрезок* $a \leqslant x \leqslant b$, *интервал* $a < x < b$, луч $x > a$ и т. д.), формулируются определения *предела*, *непрерывной функции*, монотонной *последовательности* и функции, целого ряда других важных понятий. Например, определение *выпуклой функции* $y = f(x)$ можно сформулировать так: непрерывная функция называется выпуклой вниз, если для всех x_1, x_2 выполнено неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

а выпуклой вверх – если верно неравенство противоположного смысла (см. *Выпуклые функции*); для функции, имеющей производную, это эквивалентно тому, что $y = f'(x)$ – монотонная функция (соответственно неубывающая или невозрастающая, рис. 1).

На языке неравенств нередко формулируется постановка задачи во многих приложениях математики. Например, многие экономические задачи сводятся к исследованию систем линейных неравенств с большим числом переменных (см. *Геометрия*). Часто то или иное неравенство служит важным вспомогательным средством, основной леммой, позволяющей доказать или опровергнуть существование каких-то объектов (скажем, решений уравнения), оценить их количество, провести классификацию. Например, чтобы классифицировать все правильные *многогранники*, нужно прежде всего вспомнить, какие углы могут иметь правильные *многоугольники*, и воспользоваться неравенством: сумма величин плоских углов выпуклого многогранного угла не больше 360°.

Эта теорема наряду с самыми первыми геометрическими неравенствами («перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из одной и той же точки к данной прямой», «сторона треугольника меньше суммы двух других сторон», «против большего угла треугольника лежит большая сторона») принадлежит еще древнегреческой математике – она содержалась в знаменитых «Началах» *Евклида*.

Неравенства – это не только вспомогательный инструмент. В каждой области математики – *алгебре* и теории чисел (см. *Чисел теория*), *геометрии* и *топологии*, *теории вероятностей* и теории функций, математической физике и теории дифференциальных уравнений, теории информации и дискретной математике – можно указать фундаментальные результаты, формулируемые в виде неравенств.

Во многих разделах математики, особенно в *математическом анализе*, в прикладной математике, неравенства встречаются значительно чаще, чем равенства. Скажем, решение каких-то практически важных уравнений лишь по счастливой случайности удается найти точ-

но – в виде числа или формулы, а для приближенного решения в математике всегда требуется указать оценку погрешности, т. е. доказать некоторое неравенство. В этом заключается одно из главных отличий между математическим и физическим уровнем строгости: физик готов ограничиться нахождением «порядка величины» там, где математик стремится строго доказать какие-то оценки, т. е. неравенства.

Находя оценку той или иной величины сверху (максимум) или снизу (минимум), т. е. доказывая, что эта величина не больше какого-то числа M (или не меньше m), мы стараемся получить как можно более точный результат: оценку сверху – пониже, снизу – повыше. Самая точная возможная оценка числового множества A сверху обозначается $\sup A$ (супремум A). Аналогично определяется самая точная оценка снизу: $\inf A$ (инфинум A). Рассмотрим, для примера, отношение площади S многоугольника к квадрату его периметра P. Чем более «округлый» многоугольник, тем величина S/P^2 больше – в этом легко убедиться на примерах (рис. 2). Точная верхняя грань этого отношения: $\sup S/P^2 = 1/(4\pi)$. На множестве всех многоугольников эта оценка не достигается – нет такого многоугольника, для которого S/P^2 в точности равно $1/(4\pi)$; а на множестве всех (выпуклых) фигур – достигается, причем только для круга радиуса R это отношение как раз равно $\pi R^2/(2\pi R)^2 = 1/(4\pi)$. Когда величина достигает своего наибольшего значения, вместо sup можно писать max (максимум); соответственно вместо inf писать min (минимум).

Доказательство неравенств тесно связано с исследованием функций на экстремум (см. *Экстремум функции*). Чтобы доказать, что максимум какой-то функции f равен M, мы должны указать значения аргументов, при которых функция f равна M, и доказать неравенство $f \leqslant M$. Например, тот факт, что на множестве всех фигур $S/P^2 \leqslant 1/(4\pi)$, обычно формулируется так: из всех фигур данного периметра наибольшую площадь имеет круг. Это знаменитое изопериметрическое неравенство (доказанное впервые Л. *Эйлером*) – представитель целого класса геометрических неравенств, различные варианты и многомерные обобщения которых используются в разных отделах математики и ее приложениях.

Важная часть работы математика – доказательство тождественных неравенств, т. е. таких, которые верны при всех значениях входящих в них переменных (или при всех заранее оговоренных допустимых значениях переменных). Иногда это дело несложное – например, чтобы доказать неравенство $f > g$, где f и g – некоторые функции, удается преобразовать разность $f - g$ так, что становится очевидной ее положительность: $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, поскольку $(a-b)^2 \geqslant 0$; $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, поскольку $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$.

Но бывает, что для доказательства неравенства приходится использовать весьма тонкие геометрические или аналитические соображения. Как опытному шахматисту помогает знание основных дебютов, так и математику полезно знать некоторые часто встречающиеся классические тождественные неравенства. Среди них – красивые неравенства, в которые переменные входят симметричным образом (см. *Средние значения*).

Серию таких неравенств дает следующее общее неравенство датского математика И. Йенсена (1859–1925) для *выпуклых функций*: если f – выпуклая вниз функция на отрезке $[a, b]$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – любые положительные числа, то при всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из $[a, b]$

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}\right) \leqslant$$

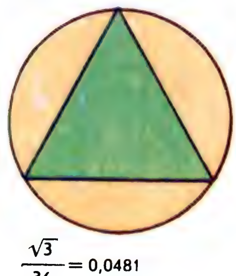
$$\leqslant \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \ldots + p_n f(x_n)}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}.$$

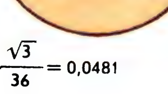
Для выпуклой вверх функции верно обратное неравенство; в частности, при $f(x) = \log x$, $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$, $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, отсюда получается неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического.

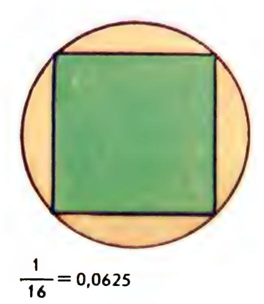
Наглядное объяснение этого неравенства состоит в следующем: если на графике выпуклой вниз функции расположить грузы с произвольными массами $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то центр их масс будет лежать выше графика (рис. 3).

Для получения оценок сумм вида $f(1) +$

Рис. 2
Отношение площади к квадрату периметра максимально для круга.







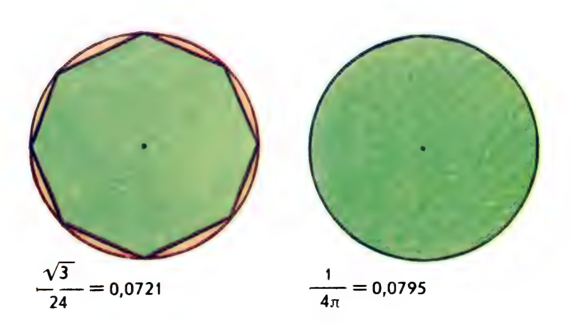
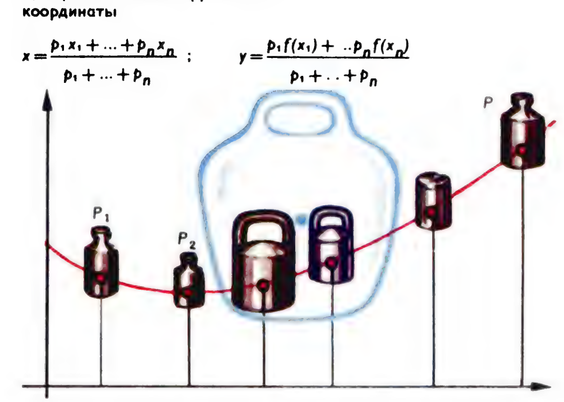


Рис. 3

Центр масс системы грузов имеет координаты

$x = \frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + \ldots + p_n}$; $y = \frac{p_1 f(x_1) + \ldots p_n f(x_n)}{p_1 + \ldots + p_n}$



$+ f(2) + \ldots + f(n)$ применяются метод *математической индукции*, а также сравнение этой суммы со специально подобранным интегралом. Например, для суммы

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

(см. *Гармонический ряд*) сравнение ее с площадью под гиперболой $y = 1/x$ (рис. 4) дает оценки: $\ln n < h_n < \ln n + 1$. Скажем, при $n = 1000$, отсюда получаем $6{,}9 < h_{1000} < 7{,}91$.

Доказательства непрерывности и дифференцируемости элементарных функций, формул для их производных опираются на некоторые основные неравенства; среди них – неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (при $0 < x < \pi/2$), $e^x > 1 + x$, неравенство Бернулли $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ (при $x > -1$, натуральном n).

Методы математического анализа, в свою очередь, удобное средство доказательства неравенств для функций от одной переменной. Так, если значения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают при $x = a$ и $f'(x) \leqslant g'(x)$ при $x \geqslant a$, то $f(b) > g(b)$ при любом $b \geqslant a$, другими словами, неравенство можно почленно интегрировать. Приведем один пример, показывающий, как это соображение позволяет вычислять с большой точностью $\sin x$.

Поскольку $\cos x \leqslant 1$ и $(\sin x)' = \cos x$, то при $x > 0$

$$\sin x = \int_0^x \cos x\, dx \leqslant \int_0^x 1 dx = x.$$

Точно так же отсюда получаем последовательно:

$$1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}, \quad \text{т.е.} \quad \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2};$$

$$\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{2 \cdot 3};$$

$$1 - \cos x \geqslant \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \quad \text{т.е.}$$

$$\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4};$$

$$\sin x \leqslant x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, мы получаем, что $\sin x$ заключен между суммой первых k и первых $k + 1$ членов *ряда*

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

(где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)

(при любом $k = 1, 2, \ldots$); точно так же для $\cos x$ аналогичные оценки дает ряд

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Мы говорили выше о способах получения тождественных неравенств. Если же записано какое-то неравенство вида

$$f(x) > g(x),$$

где f и g – любые функции, x – переменная, то при некоторых значениях x оно будет верно, при других – нет.

Решить такое неравенство – значит найти множество X всех значений переменной x, при которых оно верно. Задачи на решение неравенств подробно изучаются в школьном курсе. Между решением неравенств и решением *уравнений* много общего – неравенства тоже нужно с помощью преобразований сводить к более простым. Важное отличие состоит в том, что множество X решений неравенства, как правило, бесконечно (отрезок, луч, объединение нескольких отрезков). Сделать полную проверку ответа в этом случае нельзя. Поэтому, решая неравенство, нужно обязательно переходить к эквивалентному ему неравенству – имеющему в точности то же множество решений. Для этого, опираясь на основные свойства неравенств, надо проделывать лишь такие преобразования, которые сохраняют знак неравенства и обратимы. Скажем, можно применить к обеим частям операцию возвышения в куб, но нельзя – операции возвышения в квадрат (если только не

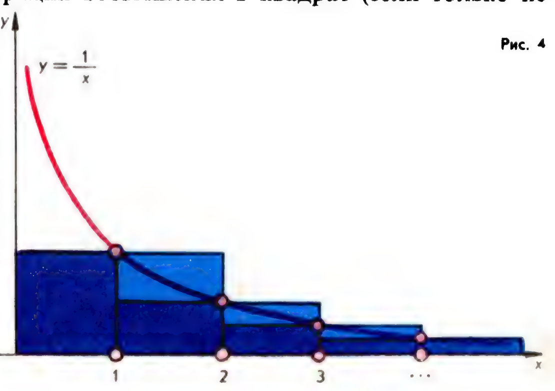


Рис. 4

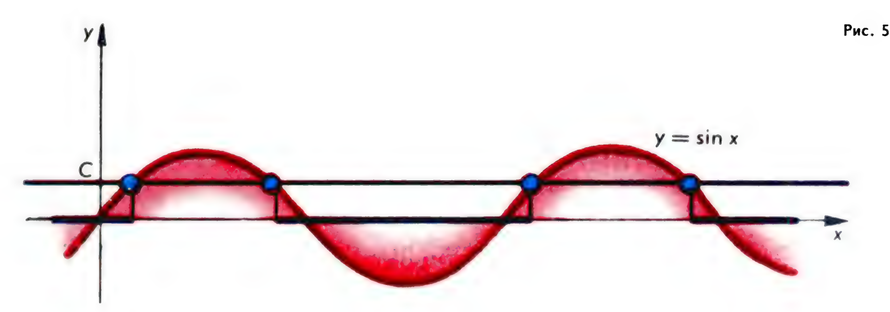


Рис. 5

известно, что обе части его заведомо положительны); вообще неравенства $f<g$ и $F(f)<F(g)$ эквивалентны, если функция F неубывающая.

Однако если мы умеем решать уравнение $f(x)=g(x)$, то решить неравенство $f(x)>g(x)$, как правило, не представляет труда: в этом помогает «метод интервалов». Будем говорить о неравенстве вида $f(x)>0$ (мы можем перенести все члены в левую часть). Пусть функция f определена и непрерывна на всей прямой или на области D, состоящей из нескольких (конечных или бесконечных) отрезков. Так будет для всех *элементарных функций*. Отметим корни уравнения $f(x)=0$; они разбивают область определения функции f на ряд интервалов, в каждом из которых f сохраняет знак. Какой именно знак имеет $f(x)$ в каждом из интервалов, можно выяснить, подставив в $f(x)$ одно (любое) значение x из этого интервала. Остается выбрать те интервалы, в которых $f(x)$ положительно,– это будет искомое множество X.

Например, чтобы решить неравенство

$$\frac{x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}>1,$$

заметим, что знаменатель $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$ обращается в 0 при $x=(-1\pm\sqrt{5})/2$ и $x=1$, а вся дробь обращается в 1 при $x=0$ и $x=2$. Остается на каждом из 6 кусочков, на которые делят прямую эти пять точек, найти знак дроби

$$\frac{2x-x^2}{x^3-2x+1},$$

как это и бывает обычно (кроме исключительных случаев «кратных корней»), знаки чередуются. (Ответ: X состоит из трех множеств: $x<(-1-\sqrt{5})/2$, $0<x<(-1+\sqrt{5})/2$ и $1<x<2$.)

Еще проще применять «метод интервалов», если заранее известно, где функция убывает, а где – возрастает, и известен ее *график*. Например, неравенство $\sin x\leqslant c$ будет выполнено на отрезках между корнями $x=(-1)^n\arcsin c+\pi n$ уравнения $\sin x=c$ (здесь $|c|\leqslant 1$), содержащих точки $-\pi/2+2\pi n$. На рис. 5 множество решений – объединение отрезков $[-\arcsin c+(2n-1)\pi;\ \arcsin c+2\pi n]$, $n=0,\ \pm 1\dots$.

НОМОГРАФИЯ

Номографией (от греческого *nomos* – «закон», *grapho* – «пишу») называется область вычислительной математики, в которой развивается теория построения номограмм – особых чертежей, служащих для расчета по данным формулам или для решения различных уравнений. Искомое значение величины или действительный корень уравнения можно отыскать непосредственно на самой номограмме, прикладывая линейку к определенным ее точкам.

Рис. 1

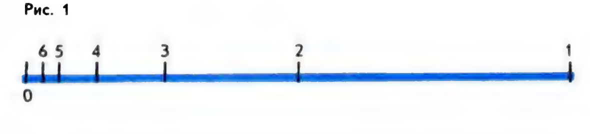
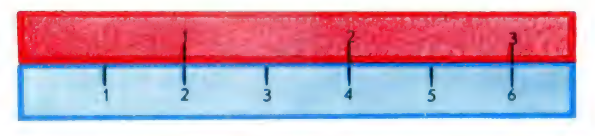


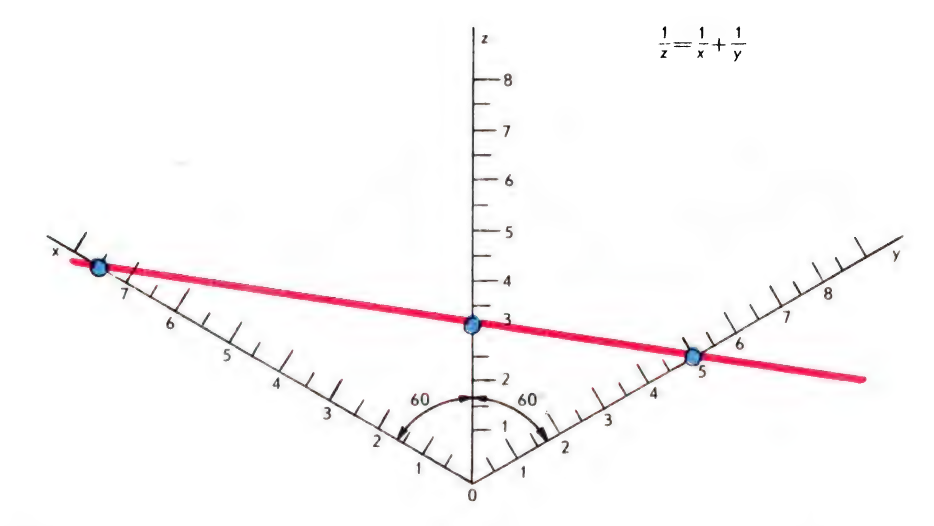
Рис. 2



Номограмма, таким образом, является готовым инструментом для проведения расчетов.

Обыкновенная линейка обладает тем свойством, что деления на ней составляют равномерную шкалу. Для решения ряда задач номографии приходится расширить понятие о шкале. Пусть нам дана некоторая функция $y=f(x)$. Возьмем прямую линию и будем откладывать на ней от некоторой фиксированной точки значения нашей функции, соответствующие различным значениям аргумента x, и в конце каждого из полученных отрезков поставим пометку, равную тому значению x, для которого получен этот отрезок. Нанесенные таким образом пометки уже не будут распределяться на прямой равномерно, их расположение зависит от выбранной функции $y=f(x)$. Эта прямая с нанесенными делениями называется функциональной шкалой. На рис. 1 показана функциональная шкала для функции $y=2^{-x}$.

Рис. 3



Простейшим приложением функциональной шкалы является использование ее для вычисления значений функции при разных значениях аргумента. Возьмем две шкалы: одну функциональную, другую равномерную, построенные в одном и том же масштабе. Приложим обе шкалы одну к другой так, чтобы их начальные точки совпадали. Если теперь взять на функциональной шкале точку с пометкой x, то пометка равномерной шкалы, лежащая против взятой пометки x, в точности дает значение функции $y=f(x)$. Обратно, зная значение функции, можно найти значение аргумента; для этого нужно найти соответствующую пометку на равномерной шкале и прочитать соответствующую пометку функциональной шкалы. Такое соединение двух шкал является простейшей номограммой и называется двойной шкалой (рис. 2). Одно из ее главнейших применений – *логарифмическая* (счетная) *линейка.* В инженерной практике используется также логарифмическая (полулогарифмическая) бумага, где обе оси (или одна ось) являются логарифмическими функциональными шкалами.

Рис. 4

На рис. 3 изображена номограмма для уравнения $1/x+1/y=1/z$, которая состоит из трех определенным образом расположенных равномерных шкал. Прикладывая линейку к двум пометкам на разных лучах, отвечающих, например, заданным значениям x и z, по номограмме находим значение y (на рис. 3 значение $x=7{,}5$, а $z=3$ и тем самым $y=5$). Разобранный пример демонстрирует нам новый тип номограмм – номограмму из выровненных точек. Такое название объясняется тем, что точки на номограмме, соответствующие данным числам и искомому числу, лежат на одной прямой.

На рис. 4 изображена номограмма из выровненных точек для приближенного отыскания положительных корней уравнения $x^2+px+q=0$. Она состоит из двух равномерных и одной неравномерной шкал. Если при помощи этой номограммы нам нужно приближенно найти положительный корень уравнения $x^2+p_0x+q_0=0$, нужно на оси p взять точку M с пометкой p_0, на оси q – точку N с пометкой q_0 и провести прямую (MN). Каждая точка пересечения (их может быть не больше двух) с криволинейной шкалой дает приближенное значение положительного корня заданного уравнения (на рис. 4 – случай $p=0$, $q=-9$). Построенная прямая (MN) может пересекаться с кривой Γ в двух точках (оба корня положительны), в одной точке (второй корень отрицателен), может касаться кривой (в этом случае у уравнения кратный положительный корень); наконец, она может не иметь с кривой Γ ни одной общей точки (в этом случае либо оба корня уравнения отрицательны, либо у него вообще нет действительных корней). Для получения отрицательных корней уравнения $x^2+px+q=0$ надо, сделав замену переменной $x=-t$, искать по той же номограмме положительные корни уже уравнения $t^2-pt+q=0$. Если зна-

чения коэффициентов p и q по модулю превосходят 12,6 (на рис. 4 предполагается $|p| \leqslant 12{,}6$, $|q| \leqslant 12{,}6$), то следует сделать замену переменной $x = kt$ и перейти от уравнения $x^2 + px + q = 0$ к уравнению

$$t^2 + \frac{p}{k}t + \frac{q}{k^2} = 0;$$

число k выбирается таким образом, чтобы числа p/k и q/k^2 были уже в указанных выше пределах. В случае, если оба корня уравнения $x^2 + px + q = 0$ близки к нулю, также выгодно сделать замену переменной $x = kt$. Так, для уравнения $x^2 - 0{,}89x + 0{,}16 = 0$ значения корней по номограмме найти трудно. Положив $x = 0{,}2t$, получим уравнение $t^2 - 4{,}45t + 4 = 0$; его корни $t_1 \approx 1{,}2$; $t_2 \approx 3{,}2$, откуда $x_1 \approx 0{,}24$, $x_2 \approx 0{,}64$.

Как в практическом, так и теоретическом плане значительный интерес представляют сетчатые номограммы. На рис. 5 показана такая номограмма для приближенного решения уравнений вида $x^2 + px + q = 0$. Она состоит из семейства прямых линий с некоторыми пометками, касающихся параболы

$$q = \frac{1}{4}p^2.$$

Пользуются этой номограммой следующим образом. Каждому уравнению $x^2 + px + q = 0$ однозначно ставится в соответствие точка (p; q) плоскости Opq, и в зависимости от расположения ее по отношению к «сетке» приближенно определяются корни соответствующего уравнения. Если точка (p, q) попадает внутрь параболы, т. е. если

$$q > \frac{1}{4}p^2,$$

то уравнение $x^2 + px + q = 0$ не имеет (действительных) корней. В случае, когда это уравнение имеет два различных действительных корня, точка (p, q) лежит во внешней области параболы $q < 1/4p^2$. Если $q = 1/4p^2$, т. е. точка (p, q) лежит на параболе, то уравнение имеет два совпадающих корня. Решим, например, уравнение $x^2 + 0{,}5x - 3 = 0$. Через точку (0,5; -3) проходят на номограмме две прямые с пометками -2 и 1,5; тем самым числа -2 и 1,5 являются корнями нашего уравнения.

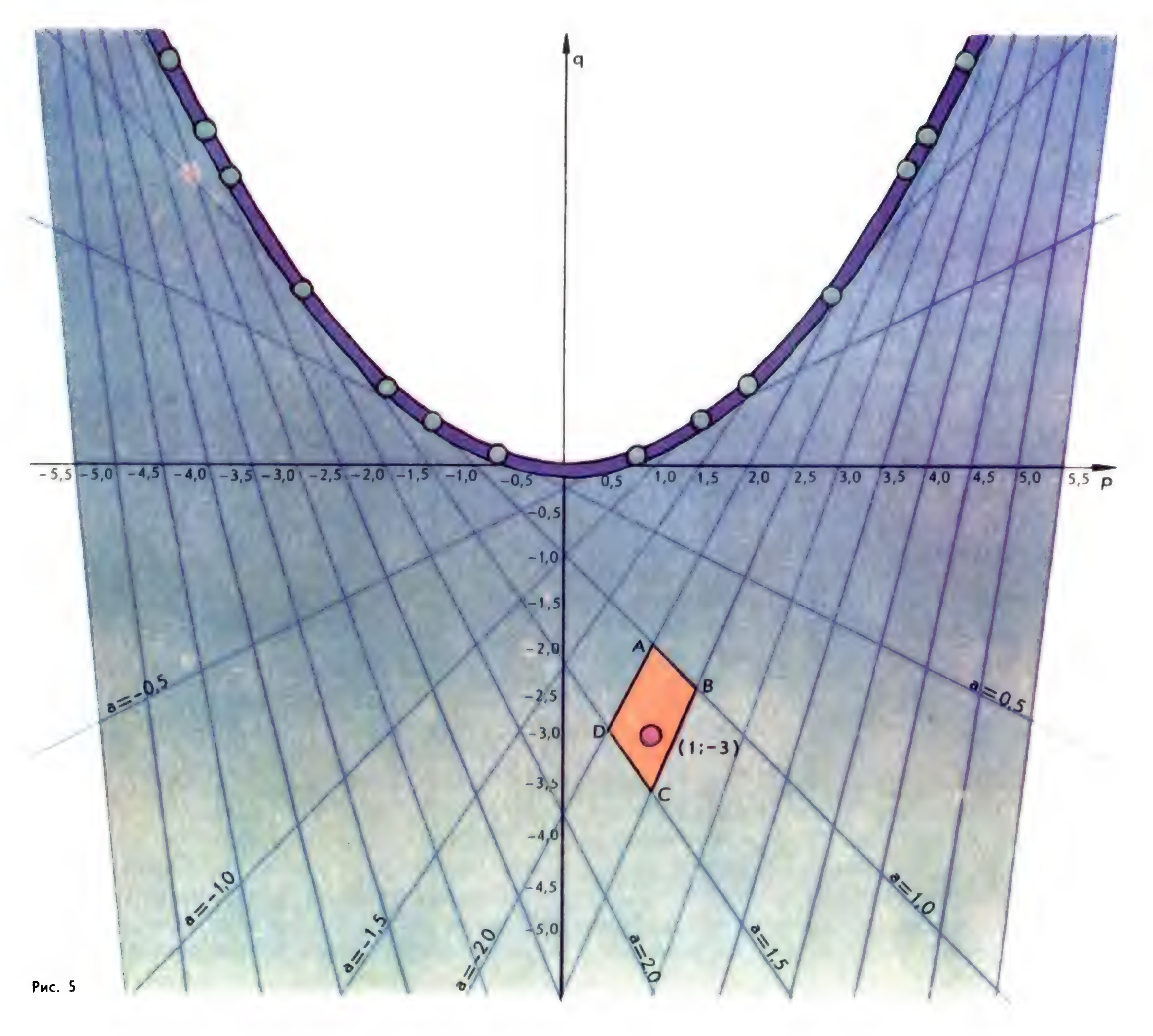


Рис. 5

Рассмотрим теперь уравнение $x^2 + x - 3 = 0$. Этому уравнению соответствует точка $(1;\ -3)$, и она не лежит ни на одной из прямых, показанных на рис. 5. В этом случае поступаем так. Заметим, что точка $(1;\ -3)$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$, образованного прямыми с пометками $-2{,}5;\ -2;\ 1$ и $1{,}5$ (рис. 5). Точкам этого четырехугольника соответствуют уравнения с двумя действительными корнями, один из которых попадает в интервал $]1;\ 1{,}5[$, а другой – в интервал $]-2{,}5;\ -2[$. Корни уравнения $x^2 + x - 3 = 0$ также лежат в указанных интервалах. Взяв их середины, мы получим приближенные значения искомых корней:

$$x_1 \approx \frac{1{,}5 + 1}{2} = 1{,}25; \quad x_2 \approx \frac{-2 - 2{,}5}{2} = -2{,}25.$$

Для того чтобы при помощи этой номограммы удобно было решать и уравнения с совпадающими корнями, парабола $q = 1/4p^2$ также снабжена пометками. Дело в том, что квадратному уравнению с корнями $x_1 = x_2 = a$ соответствует точка $(-2a,\ a^2)$, лежащая на этой параболе.

Различного рода номограммы широко применяются в разнообразных практических расчетах. Существуют промышленно изготовленные номограммы, например, для вычисления углов установки резца на заточном станке, для определения процентного содержания трех веществ в данной смеси, для расчета скорости течения воды в реках и каналах, для вычисления площадей и объемов, для расчета параметров радиоламп и т. д.

Разработка теории номографических построений началась в XIX в. Первой была создана теория прямолинейных сетчатых номограмм французским математиком Л. Лаланом в 1843 г. Основания общей теории заложил его соотечественник М. Оканы в 1884–1894 гг. Советскую номографическую школу создал Н. А. Глаголев (1888–1945). Ему принадлежит большая заслуга в деле организации номографирования инженерных расчетов.

НОРМАЛЬ

Нормаль – прямая, проходящая через заданную точку кривой перпендикулярно *касательной* к этой кривой (рис. 1). Так, нормалями к окружности будут прямые, идущие по ее радиусам. Уравнение нормали в точке $M(x_0, y_0)$ к кривой на плоскости, заданной уравнением $y = f(x)$, записывается через производную функции в виде

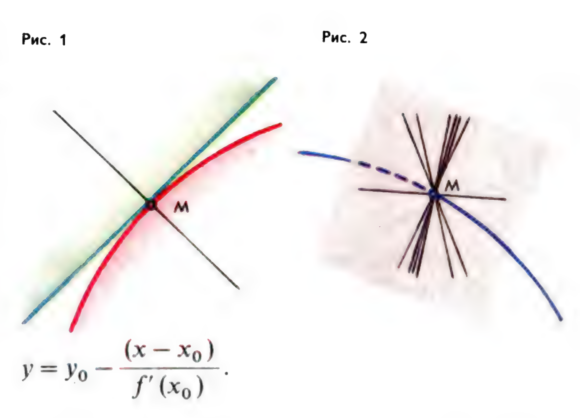


Рис. 1 Рис. 2

$$y = y_0 - \frac{(x - x_0)}{f'(x_0)}.$$

Если рассмотреть нормали к пространственной кривой в данной точке, то они заполнят целую плоскость – плоскость, перпендикулярную к касательной в данной точке; она называется нормальной плоскостью к кривой (рис. 2). Важную роль в приложениях имеет нормаль к поверхности в заданной ее точке – прямая, перпендикулярная касательной плоскости в этой точке (рис. 3). Когда мы говорим о силе трения, то выражаем ее через силу «нормального давления», т. е. давления, направленного по нормали к поверхности. В законе отражения света: угол падения равен углу отражения – рассматриваемые углы являются углами между нормалью в данной точке и направлениями падающего и отраженного лучей (рис. 4).

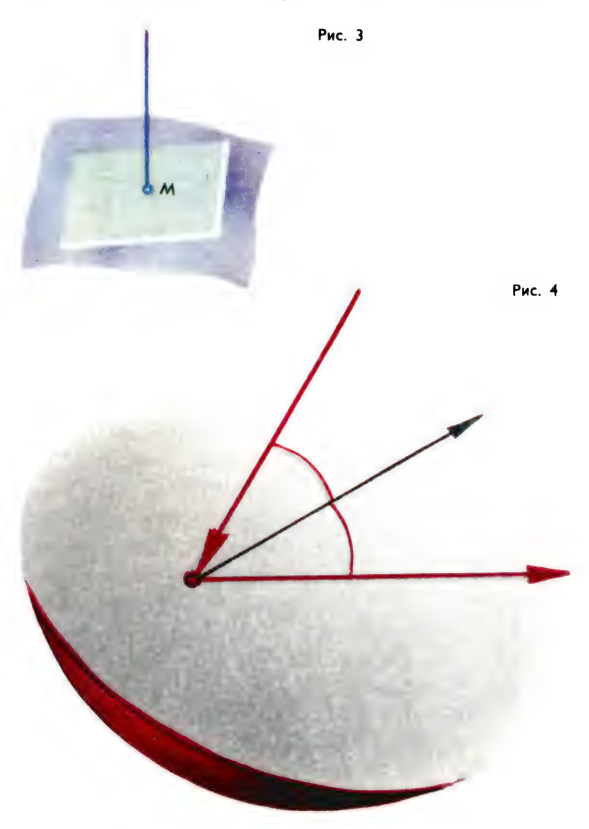


Рис. 3 Рис. 4

НУЛЬ

Нуль – это целое число, одна из цифр в десятичной системе счисления. Название «нуль» происходит от латинского слова *nullus*, что означает «никакой». Обозначается нуль знаком 0. Как цифра в записи многозначного числа или десятичной дроби нуль употребляется для обозначения отсутствия единиц определенного разряда (см. *Системы счисления*). Основное свойство, которое характеризует нуль как число, заключается в том, что любое число при сложении с нулем не меняется. Другие свойства числа нуль: $a \cdot 0 = 0$; $a - a = 0$; если $ab = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

У нуля своя долгая и интересная история. Уже в поздней вавилонской письменности (V в. до н. э.) был специальный знак ⋞ , обозначавший отсутствующий разряд в записи числа. Это – далекий предок нуля. Греческие астрономы переняли у вавилонян шестидесятеричную систему счисления, но вместо клиньев они для обозначения цифр употребляли буквы. При этом для обозначения пропущенного шестидесятеричного разряда они употребляли букву *о* – первую букву греческого слова «оуде́н», означающего «ничто». И наконец, запись чисел в десятичной системе с использованием того обозначения нуля, которым мы пользуемся теперь, появилась у индийцев в V–VI вв.

Долгое время нуль не признавали числом. Например, Диофант (III в.) не считал нуль корнем уравнения, так же как математики в средние века. Лишь к XVII в. с введением метода координат нуль начинает выступать наравне с остальными числами, положительными и отрицательными: все они изображаются точками числовой оси.

НЬЮТОНА БИНОМ

Бином Ньютона – название формулы, выражающей степень двучлена в виде суммы одночленов.

Формулу для квадрата двучлена $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ знали, по-видимому, еще математики Древнего Вавилона, а древнегреческие математики знали ее геометрическое истолкование (см. *Алгебра*). Если умножить обе части этой формулы на $a+b$ и раскрыть скобки, то получим:

$$(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3, \text{ т.е.}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Еще один такой шаг приводит к формуле $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Легко заметить закон образования коэффициентов: коэффициент 4 при a^3b есть сумма коэффициентов 3 и 1 при a^2b и a^3. Аналогично, коэффициент 6 при a^2b^2 является суммой $3+3$ коэффициентов при ab^2 и a^2b. По тому же закону получаем и коэффициент 4 при ab^3.

Таким образом, коэффициент C_n^k при $a^{n-k}b^k$ в разложении $(a+b)^n$ равен сумме коэффициентов C_{n-1}^{k-1} и C_{n-1}^k при $a^{n-k}b^{k-1}$ и при $a^{n-k-1}b^k$ в разложении $(a+b)^{n-1}$, а коэффициенты при a^n и при b^n равны единице.

Отсюда следует, что коэффициенты C_n^k в равенстве

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n \quad (1)$$

являются членами $(n+1)$-й строки треугольника Паскаля (см. *Паскаля треугольник*). Это утверждение было известно задолго до Паскаля – его знал живший в XI–XII вв. среднеазиатский математик и поэт Омар Хайям (к сожалению, его сочинение об этом до нас не дошло). Первое дошедшее до нас описание формулы бинома Ньютона содержится в появившейся в 1265 г. книге среднеазиатского математика ат-Туси, где дана таблица чисел C_n^k (биномиальных коэффициентов) до $n = 12$ включительно.

Европейские ученые познакомились с формулой бинома Ньютона, по-видимому, через восточных математиков. Детальное изучение свойств биномиальных коэффициентов провел французский математик и философ Б. Паскаль в 1654 г. Еще до этого было известно, что числа

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

являются в то же время числами «сочетаний без повторений» из n элементов по k (см. *Комбинаторика*).

В 1664–1665 гг. И. Ньютон установил, что формула (1) обобщается на случай произвольных (дробных и отрицательных) показателей, но при этом получается сумма из бесконечного множества слагаемых. Именно он показал, что при $|x| < 1$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}x^k + \ldots \quad (2)$$

При $n = -1$ формула (2) превращается в известную формулу для суммы бесконечной *геометрической прогрессии*:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^n + \ldots$$

О

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

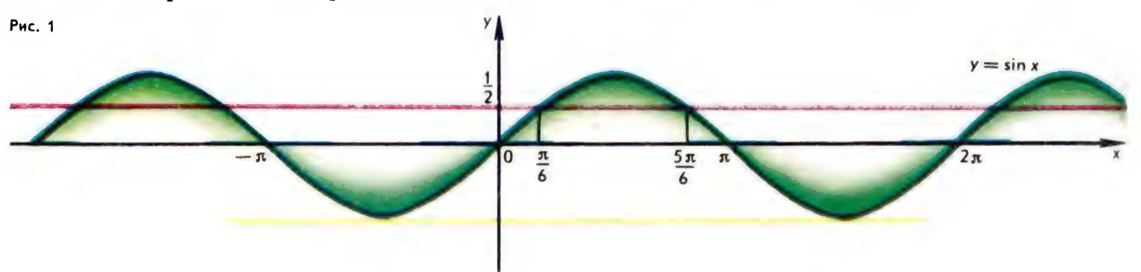
В ряде задач математики и ее приложений требуется по известному значению *тригонометрической функции* найти соответствующее значение угла, выраженное в градусной или в радианной мере. Известно, что одному и тому же значению синуса соответствует бесконечное множество углов, например, если $\sin\alpha = 1/2$, то угол α может быть равен и 30° и 150°, или в радианной мере $\pi/6$ и $5\pi/6$, и любому из углов, который получается из этих прибавлением слагаемого вида $360°\cdot k$, или соответственно $2\pi k$, где k – любое целое число. Это становится ясным и из рассмотрения графика функции $y = \sin x$ на всей числовой прямой (см. рис. 1): если на оси Oy отложить отрезок длины 1/2 и провести прямую, параллельную оси Ox, то она пересечет синусоиду в бесконечном множестве точек. Чтобы избежать возможного разнообразия ответов, вводятся обратные тригонометрические функции, иначе называемые круговыми, или аркфункциями (от латинского слова *arcus* – «дуга»).

Основным четырем тригонометрическим функциям $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ соответствуют четыре аркфункции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ (читается: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс). Рассмотрим функции $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$, поскольку две другие выражаются через них по формулам:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x, \quad \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x.$$

Равенство $y = \arcsin x$ по определению означает такой угол y, выраженный в радианной мере и заключенный в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен x, т.е. $\sin y = x$. Функция $\arcsin x$ является функцией, обратной функции $\sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, где эта функция монотонно возрастает и принимает все значения от -1 до $+1$. Очевидно, что аргумент y функции $\arcsin x$ может принимать значения лишь из отрезка $[-1, +1]$. Итак, функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1, +1]$, является монотонно возрастающей, и ее значения заполняют отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. График функции показан на рис. 2.

Рис. 1



При условии $-1 \leqslant a \leqslant 1$ все решения уравнения $\sin x = a$ представим в виде $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Например, если

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ то } x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Соотношение $y = \operatorname{arctg} x$ определено при всех значениях x и по определению означает, что угол y, выраженный в радианной мере, за-

Рис. 2

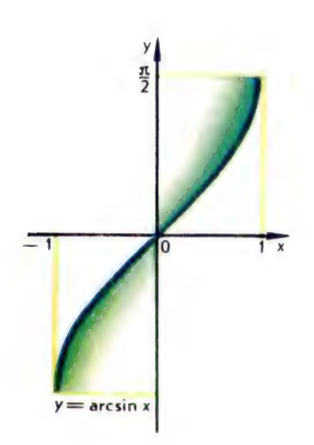
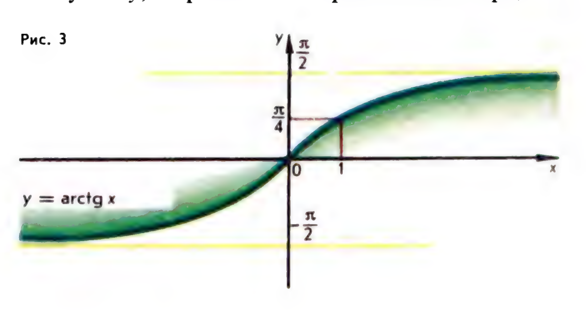


Рис. 3



ключен в пределах

$$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

и тангенс этого угла равен x, т.е. $\operatorname{tg} y = x$. Функция $\operatorname{arctg} x$ определена на всей числовой прямой, является функцией, обратной функции $\operatorname{tg} x$, которая рассматривается лишь на интервале

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастающая, ее график дан на рис. 3.

Все решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ могут быть записаны в виде $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Заметим, что обратные тригонометрические функции широко используются в математическом анализе. Например, одной из первых функций, для которых было получено представление бесконечным степенным рядом, была функция $\operatorname{arctg} x$. Из этого ряда Г. Лейбниц при фиксированном значении аргумента $x = 1$ получил знаменитое представление числа π бесконечным рядом

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

ОБЪЕМ

Объем – величина, характеризующая размер геометрического тела. В повседневной жизни нам часто приходится определять объемы различных тел. Например, нужно определить объем ящика, коробки. Это несложно подсчитать: объем прямоугольного параллелепипеда определяется как произведение величин длины, ширины и высоты. Все эти измерения должны быть выражены в одних и тех же линейных единицах.

Ребенок, не знающий формул, может подойти к измерению объема коробки и чисто опытным путем – плотно уложить в нее кубики с сантиметровым ребром. Их число и выразит собою объем коробки в кубических сантиметрах. В основе такого приема лежит правило: объем тела, составленного из непересекающихся тел, равен сумме их объемов.

В житейской практике единицами объема служили меры емкости, используемые для хранения сыпучих и жидких тел. Среди них английские меры бушель (36,4 дм^3) и галлон (4,5 дм^3), меры, когда-то применявшиеся в России,– ведро (12 дм^3) и бочка (490 дм^3) и др.

Поиск формул, позволяющих вычислять объемы тел, был долог. Например, в древнеегипетских папирусах, в вавилонских клинописных табличках встречаются правила для определения объема усеченной пирамиды, но не сообщаются правила для вычисления объема полной пирамиды. Определять объем *призмы*, пирамиды, *цилиндра* и *конуса* умели древние греки и до *Архимеда*. Но только он нашел общий метод, позволяющий определить любую площадь или объем. Идеи Архимеда легли в основу *интегрального исчисления*. Сам Архимед определил с помощью своего метода площади и объемы почти всех тел, которые рассматривались в античной математике. Он вывел, что объем шара составляет две трети от объема описанного около него цилиндра. Он считал это открытие самым большим своим достижением (см. *Вписанные и описанные фигуры*).

Если тело рассечь на части и потом сложить их по-иному, то объем полученного тела будет равен объему исходного (см. *Равновеликие и равносоставленные фигуры*). Этим правилом пользуются, отыскивая формулы объемов различных тел. Например, наклонный параллелепипед можно разбить на части и перекомпоновать их таким образом, чтобы получился прямоугольный параллелепипед. Отсюда следует, что объем наклонного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Применяют при вычислении объемов и принцип Кавальери (см. *Кавальери принцип*). В этом случае рассматриваются два тела. Они рассекаются плоскостями, параллельными некоторой данной плоскости и равноотстоящими от нее. Если оба получившихся сечения каждый раз будут одинаковы по площади, то будут равны и объемы обоих тел. На основании этого принципа нетрудно вывести формулу для объема призмы и шара.

Объемы сложных тел можно отыскивать, вписывая в них более простые тела. Например, определяя объем пирамиды, можно вписать в нее стопку призм и подсчитать их суммарный объем, затем вписать стопку призм, имеющих меньшую высоту, и вновь подсчитать их суммарный объем и т.д. Повторяя эту процедуру неограниченное число раз и устремляя к нулю высоту вписываемых призм, нетрудно получить в пределе известную формулу для объема пирамиды. Объем *цилиндра* можно определить похожим способом, вписывая в него призмы, у которых в основании лежат многоугольники со все увеличивающимся числом сторон. Вписывая такие же многоугольники в основание *конуса* и принимая их за основания пирамид, вписанных в конус, нетрудно определить и его объем.

Наиболее общие методы нахождения объемов тел дает *интегральное исчисление*.



ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

Формы круга, окружности мы встречаем повсюду: это и колесо машины, и линия горизонта, и диск Луны. Математики стали заниматься геометрической фигурой – кругом на плоскости – очень давно.

Кругом с центром O и радиусом R называется множество точек плоскости, удаленных от O на расстояние, не большее R. Круг ограничен окружностью, состоящей из точек, удаленных от центра O в точности на расстояние R. Отрезки, соединяющие центр с точками окружности, имеют длину R и также называются радиусами (круга, окружности). Части круга, на которые он делится двумя радиусами, называются круговыми секторами (рис. 1). Хорда – отрезок, соединяющий две точки окружности,– делит круг на два сегмента, а окружность – на две дуги (рис. 2). Перпендикуляр, проведенный из центра к хорде, делит ее и стягиваемые ею дуги пополам. Хорда тем длиннее, чем ближе она расположена к центру; самые длинные хорды – хорды, проходящие через центр,– называются диаметрами (круга, окружности).

Рис. 1

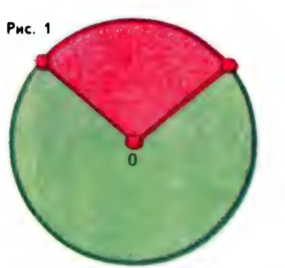
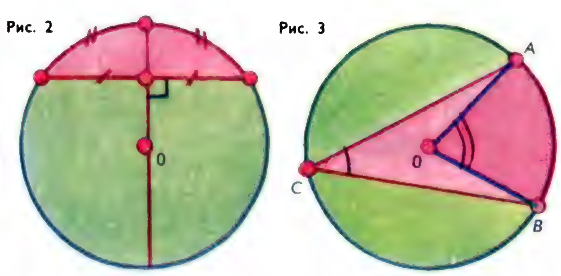




Рис. 2 Рис. 3



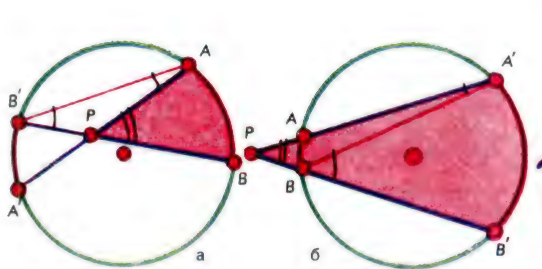
Если прямая удалена от центра круга на расстояние d, то при $d > R$ она не пересекается с кругом, при $d < R$ пересекается с кругом по хорде и называется секущей, при $d = R$ имеет с кругом и окружностью единственную общую точку и называется *касательной*. Касательная характеризуется тем, что она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. К кругу из точки, лежащей вне его, можно провести две касательные, причем их отрезки от данной точки до точек касания равны.

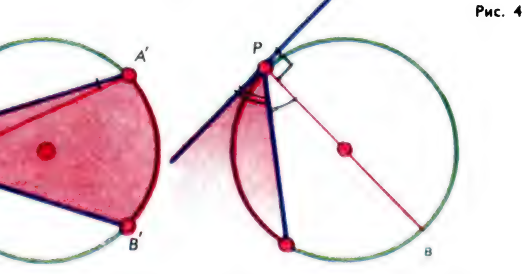
Дуги окружности, как и углы, можно измерять в градусах и его долях. За градус принимают 1/360 часть всей окружности. Центральный угол AOB (рис. 3) измеряется тем же числом градусов, что и дуга AB, на которую он опирается; вписанный угол ACB измеряется половиной дуги AB. Если вершина P угла APB лежит внутри круга, то этот угол в градусной мере равен полусумме дуг AB и $A'B'$ (рис. 4, *а*). Угол с вершиной P вне круга (рис. 4, *б*), высекающий на окружности дуги AB и $A'B'$, измеряется полуразностью дуг $A'B'$ и AB. Наконец, угол между касательной и хордой равен половине заключенной между ними дуги окружности (рис. 4, *в*).

Круг и окружность имеют бесконечное множество осей симметрии.

Из теорем об измерении углов и подобия треугольников следуют две теоремы о пропорциональных отрезках в круге. Теорема о хордах говорит, что если точка M лежит внутри круга, то произведение длин отрезков $AM \cdot BM$ проходящих через нее хорд постоянно. На рис. 5, *а* $AM \cdot BM = A'M \cdot B'M$. Теорема о секущей и касательной (имеются в виду длины отрезков – частей этих прямых) утверждает, что если точка M лежит вне круга, то произведение секущей MA на ее внешнюю часть MB тоже неизменно и равно квадрату касательной MC (рис. 5, *б*).

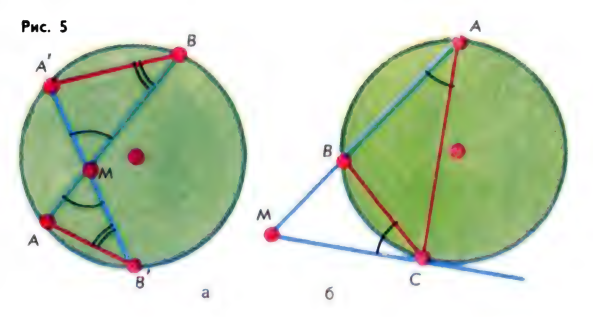
Рис. 4

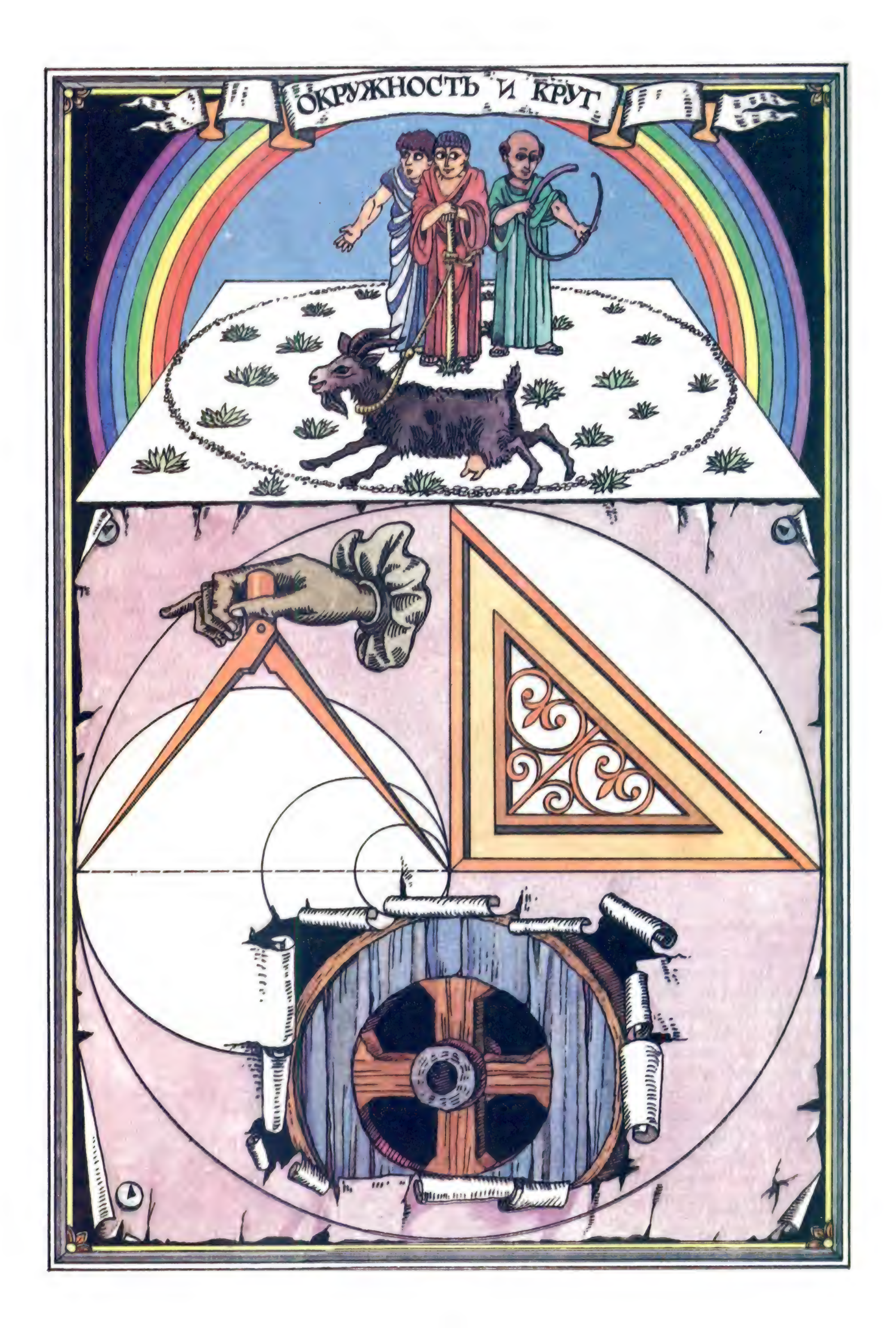




Еще в древности пытались решить задачи, связанные с кругом,– измерить длину окруж-

Рис. 5




ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ

ности или ее дуги, площадь круга или сектора, сегмента. Первая из них имеет чисто «практическое» решение: можно уложить вдоль окружности нить, а потом развернуть ее и приложить к линейке или же отметить на окружности точку и «прокатить» ее вдоль линейки (можно, наоборот, «обкатить» линейкой окружность). Так или иначе измерения показывали, что отношение длины окружности L к ее диаметру $d = 2R$ одно и то же для всех окружностей. Это отношение принято обозначать греческой буквой π («пи» – начальная буква греческого слова *perimetron*, которое и означает «окружность»).

Однако древнегреческих математиков такой эмпирический, опытный подход к определению длины окружности не удовлетворял: окружность – это линия, т.е., по Евклиду, «длина без ширины», а таких нитей не бывает. Если же мы катим окружность по линейке, то возникает вопрос: почему при этом мы получим длину окружности, а не какую-нибудь другую величину? К тому же такой подход не позволял определить площадь круга.

Выход был найден такой: если рассмотреть вписанные в круг K правильные n-угольники M_n, то при n, стремящемся к бесконечности, M_n в пределе стремятся к K. Поэтому естественно ввести следующие, уже строгие, определения: длина окружности L – это предел последовательности периметров P_n правильных вписанных в окружность n-угольников, а площадь круга S – предел последовательности S_n их площадей. Такой подход принят и в современной математике, причем по отношению не только к окружности и кругу, но и к другим кривым или ограниченным криволинейными контурами областям: вместо правильных *многоугольников* рассматривают последовательности ломаных с вершинами на кривых или контурах областей, а предел берется при стремлении длины наибольшего звена ломаной к нулю.

Аналогичным образом определяется длина дуги окружности: дуга делится на n равных частей, точки деления соединяются ломаной и длина дуги l полагается равной пределу периметров l_n таких ломаных при n, стремящемся к бесконечности. (Подобно древним грекам, мы не уточняем само понятие предела – оно относится уже не к геометрии и было вполне строго введено лишь в XIX в.)

ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК



У каждого треугольника имеется, и притом единственная, окружность девяти точек. Это – окружность, проходящая через следующие три тройки точек, положение которых определено для треугольника (рис. 1): основания его высот D_1, D_2 и D_3, основания его медиан D_4, D_5 и D_6, середины D_7, D_8 и D_9 отрезков прямых от точки пересечения его высот H до его вершин.

Эта окружность, найденная в XVIII в. великим ученым Л. Эйлером (поэтому ее часто также называют окружностью Эйлера), была заново открыта в следующем столетии учителем провинциальной гимназии в Германии. Звали этого учителя Карл Фейербах (он был родным братом известного философа Людвига Фейербаха). Дополнительно К. Фейербах выяснил, что окружность девяти точек имеет еще четыре точки, тесно связанные с геометрией любого данного треугольника. Это – точки ее касания с четырьмя окружностями специального вида (рис. 2). Одна из этих окружностей вписанная, остальные три – вневписанные. Они вписаны в углы треугольника и касаются внешним образом его сторон. Точки касания этих окружностей с окружностью девяти точек D_{10}, D_{11}, D_{12} и D_{13} называются точками Фейербаха. Таким образом, окружность девяти точек является в действительности окружностью тринадцати точек.

Окружность эту очень легко построить, если знать два ее свойства. Во-первых, центр окружности девяти точек лежит в середине отрезка, соединяющего центр описанной около треугольника окружности с точкой H – его ортоцентром (точка пересечения его высот). Во-вторых, ее радиус для данного треугольника равен половине радиуса описанной около него окружности.

Рис. 1

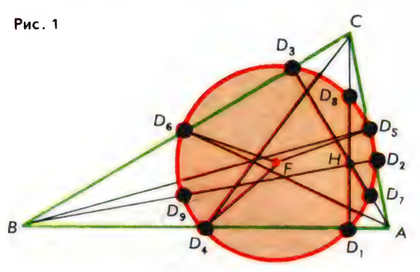
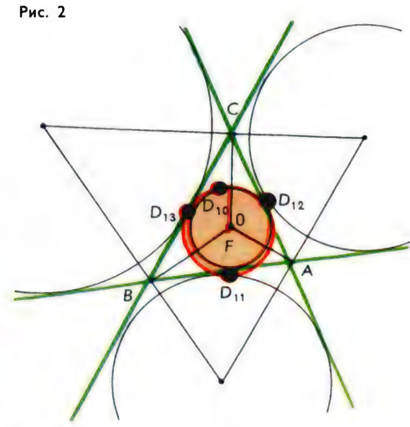


Рис. 2



Из самого определения числа π следует формула для длины окружности:

$$L = \pi d = 2\pi R.$$

Для длины дуги можно записать аналогичную формулу: поскольку для двух дуг Γ и Γ' с общим центральным углом из соображений подобия вытекает пропорция $l_n : l'_n = R : R'$, а из нее – пропорция $l_n : R = l'_n : R'$, после перехода к пределу мы получаем независимость (от радиуса дуги) отношения $l/R = l'/R' = \alpha$. Это отношение определяется только центральным углом AOB и называется радианной мерой этого угла и всех отвечающих ему дуг с центром в O. Тем самым получается формула для длины дуги:

$$l = \alpha R,$$

где α – радианная мера дуги.

Записанные формулы для L и l – это всего лишь переписанные определения или обозначения, но с их помощью получаются уже далекие от просто обозначений формулы для площадей круга и сектора:

$$S = \pi R^2, \quad S = \frac{1}{2}\alpha R^2.$$

Для вывода первой формулы достаточно перейти к *пределу* в формуле для площади вписанного в круг правильного n-угольника:

$$S_n = \frac{1}{2} P_n h_n.$$

По определению левая часть стремится к площади круга S, а правая – к числу

$$\frac{1}{2} LR = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

(апофема h_n, конечно, стремится к R). Совершенно аналогично выводится и формула для площади сектора s:

$$s = \lim S_n = \lim \left(\frac{1}{2} l_n h_n\right) = \frac{1}{2} \lim l_n \cdot \lim h_n =$$

$$= \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} \alpha R^2$$

(lim – читается «предел»). Тем самым решена и задача определения площади сегмента с хордой AB, ибо она представляется как разность или сумма (рис. 1, 2) площадей соответствующих сектора и треугольника AOB.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение – математическое предложение, предназначенное для введения нового понятия на основе уже известных нам понятий. В определении обычно содержится слово «называется». Например, определение ромба формулируется следующим образом: «Ромбом называется параллелограмм, две смежные стороны которого равны между собой». В этом определении новое понятие «ромб» введено на основе ряда понятий, уже

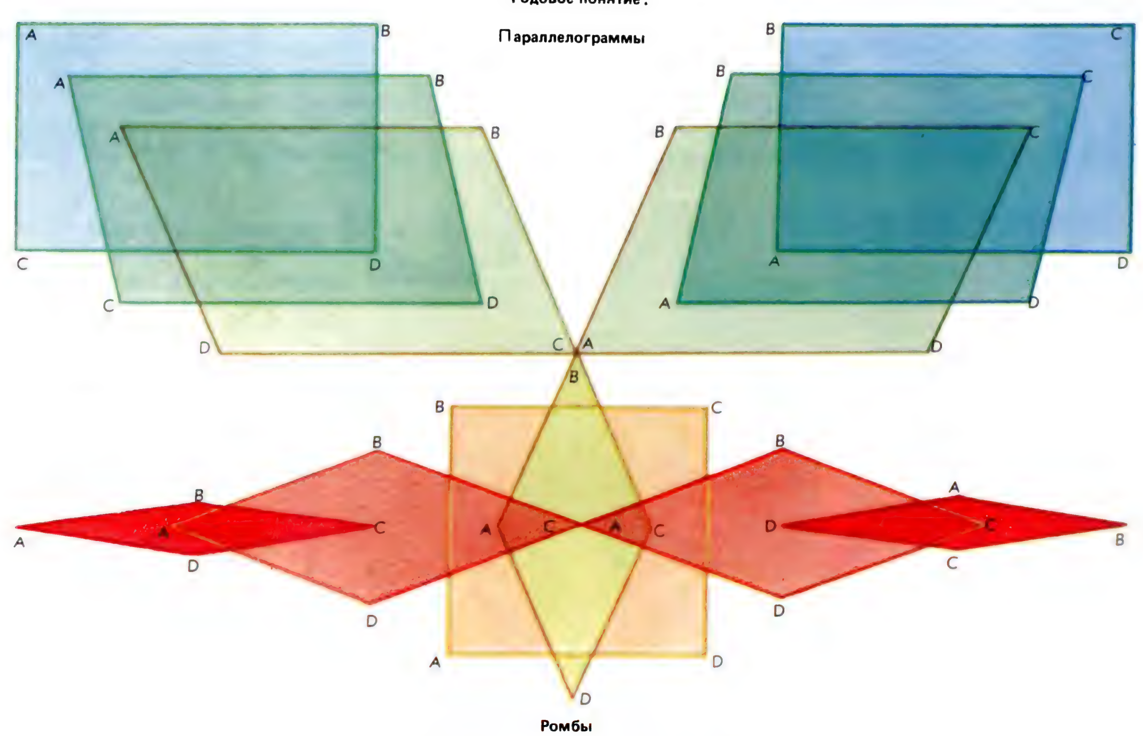


Рис. 1

известных к этому времени: «параллелограмм», «сторона», «смежные стороны», «равенство отрезков». Эти ранее введенные понятия, в свою очередь, определяются через предыдущие. Например, «параллелограмм» определяется через ранее введенные понятия «четырехугольник», «противоположные стороны четырехугольника», «параллельные прямые». В конце концов мы приходим к небольшому числу первоначальных понятий, через которые можно определить все встречающиеся в курсе геометрии понятия. Сами же первоначальные понятия не определяются, а их свойства описываются *аксиомами*.

Данное выше определение ромба можно записать в виде:

(дан параллелограмм $ABCD$)
$(AB = BC) \underset{\text{опр}}{\Rightarrow} (ABCD - \text{ромб})$.

Эта запись похожа на запись *теоремы* (см. *Необходимое и достаточное условия*), но здесь назначение частей этой записи иное. Первая часть записи (аналогичная разъяснительной части теоремы) указывает родовое понятие, с помощью которого вводится новое понятие. В данном случае родовым понятием является параллелограмм, т.е. ромбы выделяются из множества всех параллелограммов. Вторая часть определения (аналогичная условию теоремы) указывает видовые отличия, т.е. те свойства, которыми должен обладать параллелограмм, чтобы его можно было назвать ромбом. Наконец, третья часть определения (аналогичная заключению теоремы) вводит новый термин, т.е. название вводимого понятия – в данном случае «ромб». То, что $ABCD$ является ромбом (при выполнении видовых отличий), доказывать не нужно – это справедливо по определению. Поэтому под знаком $\Rightarrow$ ставят запись «опр.», которая указывает, что мы имеем дело с определением, а не с теоремой.

Еще один пример: квадратом называется ромб, один из углов которого – прямой. Это можно записать так:

(дан ромб $ABCD$) $(\angle A = 90^\circ) \underset{\text{опр.}}{\Rightarrow} (ABCD - \text{квадрат})$.

Здесь родовое понятие – ромб, видовое отличие задается равенством $\angle A = 90^\circ$ (т.е. один из углов – прямой), а новый термин (т.е. название вводимого понятия) – квадрат (рис. 1).

Аналогично могут быть рассмотрены и другие определения. Например, при рассмотрении *поля* родовым понятием является множество, а видовыми отличиями – аксиомы поля (см. *Аксиоматика и аксиоматический метод*).

В принципе можно обойтись вовсе без определений, излагая какую-либо математическую теорию. Например, можно изгнать термин «гипотенуза» из школьного курса геометрии, заменив его всюду на «сторона треугольника, лежащая против прямого угла». Уже из этого примера видно, насколько такая замена удлиняет текст (и осложняет его понимание), а ведь мы заменяем только одно слово! Легко представить себе, что было бы, если бы мы захотели излагать геометрию (и не только геометрию) вовсе без определений!

Давая определения, нужно следить за тем, чтобы не возникло порочного круга. Такой порочный круг возникнет, например, если мы определим простое число как число, не являющееся составным, а затем определим составное число как число, не являющееся простым. Ясно, что такие «определения», по сути дела, ничего не определяют. Другими словами, нельзя, чтобы какое-то понятие A_1 определялось через A_2, A_2 – через A_3, ..., A_{k-1} – через A_k, а A_k – снова через A_1

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

Определитель – число, поставленное по определенным правилам в соответствие квадратной *матрице*.

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называют число

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

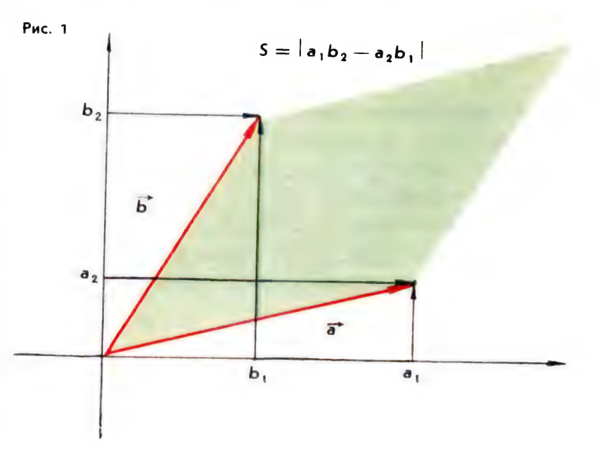
Его обозначают det A, или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Часто вместо слова «определитель» говорят «детерминант», откуда и взялось указанное обозначение.

Определитель третьего порядка определим через определители второго порядка:

Рис. 1



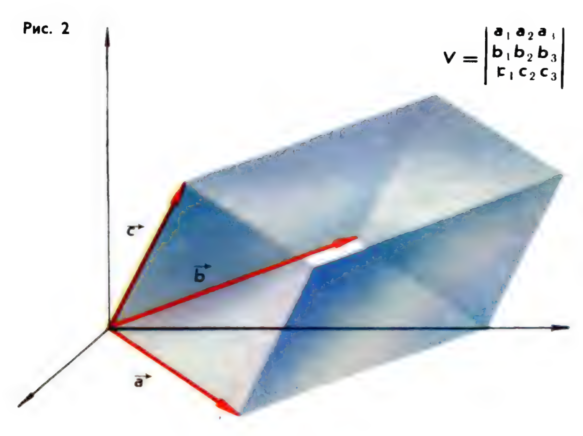


Рис. 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Здесь первые множители в знакочередующейся сумме – числа первой строки, а вторые множители – определители матриц, полученных вычеркиванием строки и столбца, которым принадлежит первый множитель.

Порядок определителя можно увеличивать и дальше. Пусть определены определители матриц вплоть до $(n-1)$-го порядка. Определителем матрицы n-го порядка

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

назовем число

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix},$$

где вновь имеем знакочередующуюся сумму произведений, в которых один из множителей – элемент первой строки, а другой – определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит первый множитель.

Вычислим, например, определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(5\cdot 3-(-7)(-1)) - 2(4\cdot 3-(-7)\cdot 2) + 1(4(-1)-5\cdot 2) = 24-52-14 = -42.$$

Определители играют важную роль в решении систем *линейных уравнений*.

Любопытно, что если составить из координат двух векторов $\vec{a}=(a_1, a_2)$ и $\vec{b}=(b_1, b_2)$ определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

то его величина, с точностью до знака, равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 1), а для трех векторов в пространстве $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $b=(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$ определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

равен, опять с точностью до знака, объему параллелепипеда, построенного на этих векторах (рис. 2).

ОТРЕЗОК И ИНТЕРВАЛ

Отрезок – одна из основных геометрических фигур. Отрезком называется часть прямой, лежащая между точками A и B, включая и сами эти точки. Отрезок обозначается $[AB]$. Точки A и B называются его концами. Любая точка отрезка, лежащая между его концами, называется внутренней точкой отрезка. Длина отрезка равна *расстоянию* между его концами и обозначается $|AB|$.

Если рассматриваемая прямая является числовой прямой и ее точкам A и B соответствуют числа a и b ($a < b$), то отрезком будет множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, он обозначается $[a, b]$. Множество точек x, для которых справедливы неравенства $a < x < b$, называется интервалом и обозначается $]a, b[$ или (a, b). Длина отрезка и интервала равна числу $b-a$. Вся числовая прямая обозначается бесконечным интервалом $]-\infty, +\infty[$, бесконечные интервалы $]-\infty, a[$ и $]b, +\infty[$ есть соответственно лучи: первый состоит из всех чисел, меньших a, второй – из всех чисел, больших b.

Хотя разница между отрезком и интервалом, казалось бы, невелика, однако свойства *непрерывных функций* различаются в зависимости от того, рассматриваем мы их на отрезке или интервале. В частности, функция, непрерывная на отрезке, обязана быть ограниченной, а функция, непрерывная на интервале, может ограниченной и не быть.

П

ПАРАБОЛА

Парабола – одно из *конических сечений*. Эту кривую можно определить как фигуру, состоящую из всех тех точек M плоскости, расстояние каждой из которых до заданной точки F, называемой фокусом параболы, равно ее расстоянию до заданной прямой l, называемой директрисой параболы (рис. 1). Ближайшая к директрисе точка параболы называется вершиной параболы; прямая, проходящая через фокус перпендикулярно директрисе,– это ось симметрии параболы. Ее называют просто осью параболы.

Определение параболы наводит на идею конструкции чертежного прибора, способного вычерчивать параболу. На листе бумаги (рис. 2) нужно закрепить линейку (ее край будет директрисой будущей параболы), в точке F, которая станет фокусом параболы, булавкой прикрепить конец нити, другой конец которой закрепить в вершине острого угла чертежного треугольника, притом так, чтобы длина нити равнялась катету этого треугольника. Перемещая второй катет вдоль линейки и прижимая нить острием карандаша к первому катету треугольника, мы получим кривую, точки которой находятся на одинаковых расстояниях от края линейки и от точки F, т. е. параболу.

В геометрии принято записывать уравнение параболы в системе координат, осью абсцисс которой является ось параболы, а осью ординат – перпендикулярная ей прямая, проходящая через вершину параболы. Такое уравнение имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Число p в записи уравнения параболы называется параметром параболы; фокус параболы находится в точке $(p/2, 0)$, число p – длина отрезка FK (рис. 1).

В математическом анализе принята другая запись уравнения параболы:

$$y = ax^2,$$

т. е. ось параболы выбрана за ось ординат. Параболой же будет и график любого квадратного трехчлена.

Хорошо известно, что траектория камня, брошенного под углом к горизонту, летящего футбольного мяча или артиллерийского снаряда будет параболой (при отсутствии сопротивления воздуха). Однако мало кто знает, что зона достижимости для пущенных нами камней вновь будет параболой. В данном случае мы говорим об огибающей кривой траекторий камней, выпущенных из данной точки (рис. 3) под разными углами, но с одной и той же начальной скоростью. Если рассматривать такую огибающую в пространстве, то возникнет поверхность, образованная вращением этой параболы вокруг ее оси. Такая поверхность носит название параболоида вращения.

Как и другие конические сечения, парабола обладает оптическим свойством: все лучи, исходящие из источника света, находящегося в фокусе параболы, после отражения оказываются направленными параллельно ее оси. Это свойство параболы используется при изготовлении прожекторов, автомобильных фар, карманных фонариков, зеркала которых имеют вид параболоидов вращения (рис. 4).

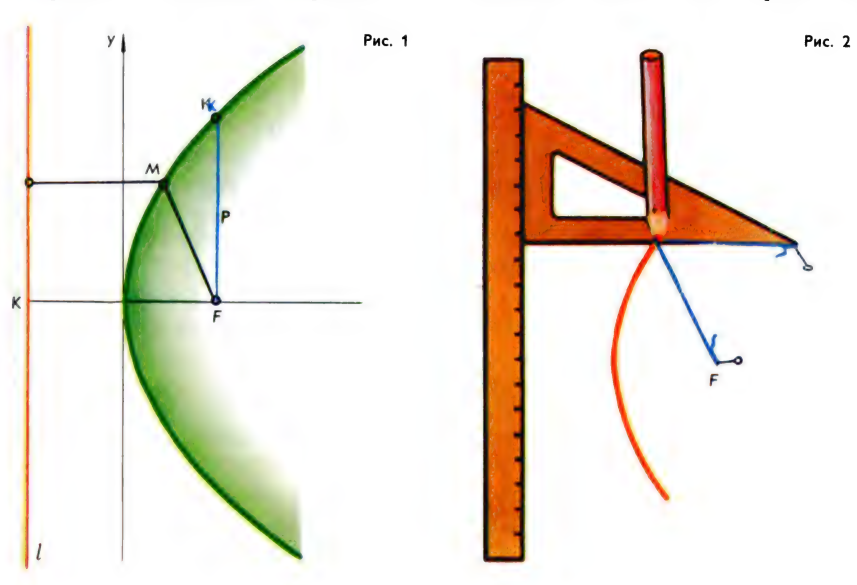
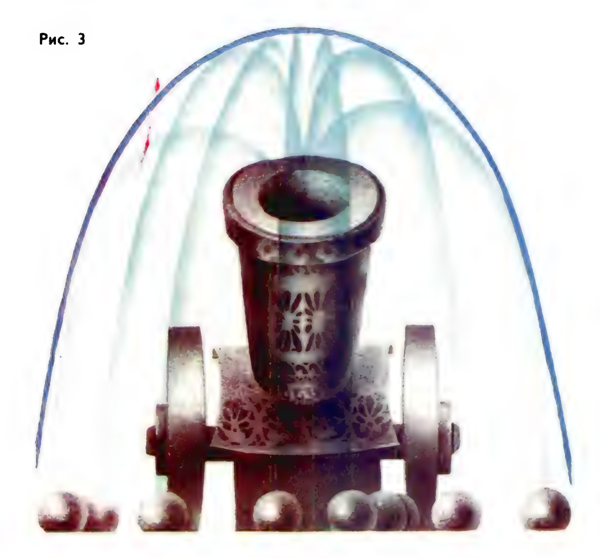


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3



Очевидно, что пучок параллельных лучей, двигающийся вдоль оси параболы, отражаясь, собирается в ее фокусе. На этом основана идея телескопов-рефлекторов, зеркала которых выполнены в виде параболоидов вращения. Любопытно, что параболоид вращения образует поверхность жидкости в цилиндрическом сосуде, если его вращать относительно своей оси.

Если параболоид вращения равномерно сжать к одной из плоскостей, проходящих через его ось, то получается поверхность, которая называется эллиптическим параболоидом. Это название объясняется тем, что любое плоское сечение этой поверхности – либо *эллипс*, либо парабола (рис. 5). Уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

Если $a=b$, то такой эллиптический параболоид будет параболоидом вращения.

Существует еще один тип параболоидов – гиперболический. Это седлообразная поверхность, интересная особенность которой – наличие прямых, целиком принадлежащих этой поверхности, как и у однополостного гиперболоида (рис. 6). Ее плоскими сечениями будут параболы и гиперболы. Если секущая плоскость касается поверхности, то гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых. Уравнение гиперболического параболоида имеет вид

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Слово «парабола» применяют часто ко всем кривым, уравнение которых является *степенной функцией*. Так, график функции $y=x^3$ называется кубической параболой, график функции $y=x^4$ – параболой четвертой степени, а график функции $y=x^{3/2}$ – полукубической параболой.

Знание свойств параболы помогает и при изучении корней *квадратного уравнения*, поскольку они являются точками пересечения параболы – графика *квадратного трехчлена* с осью абсцисс.

Рис. 4



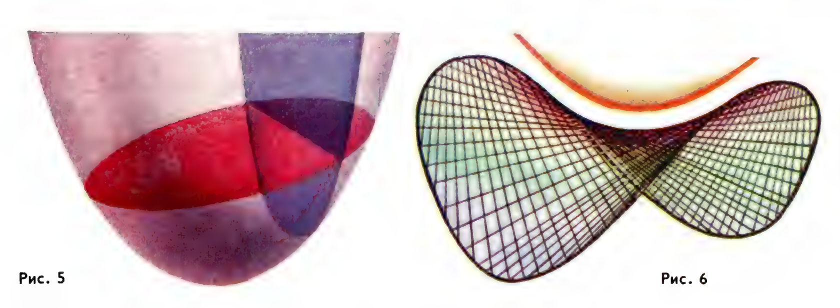


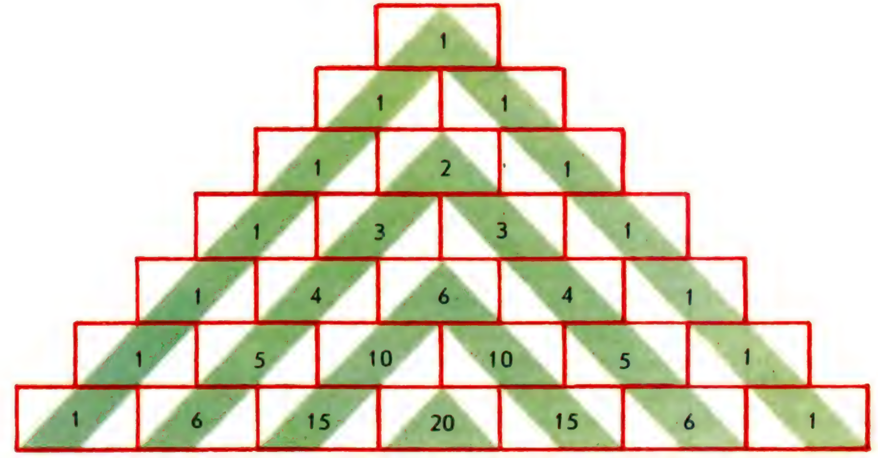
Рис. 5

Рис. 6

ПАСКАЛЯ ТРЕУГОЛЬНИК

На рис. 1 изображено несколько первых строк числового треугольника, образованного по следующему правилу: по краям каждой строки стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух стоящих над ним чисел предыдущей строки. По этому правилу легко выписывать одну за другой новые строки этого треугольника. Именно в такой форме он приведен в «Трактате об арифметическом треугольнике» французского математика Б. Паскаля (1623–1662), опубликованном в 1665 г., уже после смерти автора. Но не-

Рис. 1



сколько иные варианты этой числовой таблицы встречались столетием раньше у итальянского математика Н. Тартальи, а за несколько веков до этого у среднеазиатского ученого и поэта Омара Хайяма, некоторых

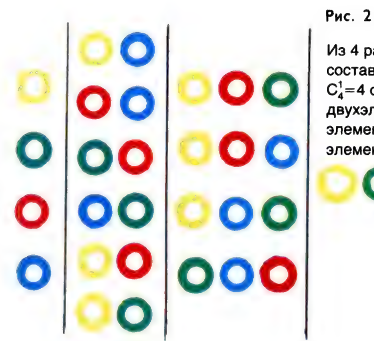
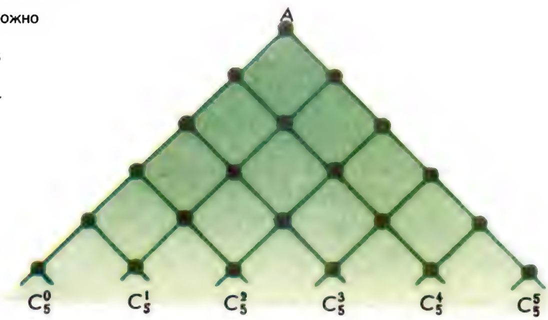


Рис. 2

Из 4 различных элементов можно составить такие множества $C_4^1=4$ одноэлементных, $C_4^2=6$ двухэлементных, $C_4^3=4$ трехэлементных и $C_4^4=1$ четырехэлементное

Рис. 3



китайских и индийских ученых.

Популярность чисел, составляющих треугольник Паскаля, не удивительна: они возникают в самых естественных задачах алгебры, комбинаторики, теории вероятностей, математического анализа, теории чисел.

Сколько различных k-элементных множеств (сочетаний) можно образовать из данных n элементов? (рис. 2).

Каковы коэффициенты многочлена $(1+x)^n$?

Сколько существует строчек из n единиц и нулей, в которых ровно k единиц?

Сколькими разными путями можно спуститься из верхней точки A на рис. 3 в k-й перекресток n-го ряда?

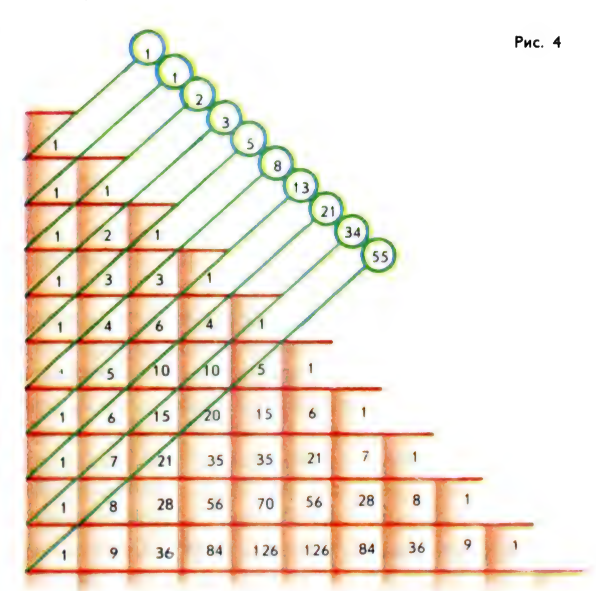
На все эти вопросы ответ дают числа C_n^k треугольника Паскаля. Обозначение C_n^k предполагает, что верхняя строка треугольника Паскаля состоит из одного числа $C_0^0=1$, следующая (первая) – из двух чисел $C_1^0=C_1^1=1$, и вообще n-я строка состоит из $n+1$ чисел:

$$C_n^0=1,\ C_n^1=n,\ C_n^2=\frac{n(n-1)}{2},\ \ldots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n.$$

Числа C_n^k называют обычно числами сочетаний из n элементов по k, или биномиальными коэффициентами (см. *Ньютона бином*); в некоторых книгах для них используют обозначение $\binom{n}{k}$. Оно удобно для запоминания простой формулы, позволяющей по заданным номерам n и k сразу вычислить, какое число стоит на k-м месте в n-й строке треугольника Паскаля:

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k\ \text{чисел}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}.$$

Рис. 4



Используя обозначение факториала $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$, эту формулу можно записать еще короче:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

В «равнобедренной» форме треугольника Паскаля на рис. 1 очевидно свойство симметрии каждой строки $C_n^k = C_n^{n-k}$; при этом посередине строки стоит самое большое число $C_n^{n/2}$ (если n четно) или два самых больших числа $C_n^{n/2-1} = C_n^{n/2+1}$ (если n нечетно), а к краям числа монотонно убывают.

Если записать тот же треугольник в «прямоугольной» форме (рис. 4), то целый ряд свойств треугольника Паскаля, связанный с суммами его чисел, будет удобнее наблюдать. В частности, сумма нескольких первых чисел каждого столбца равна идущему за ними числу следующего столбца:

$$1 + 2 + \ldots + (m-1) = C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2};$$

$$C_2^2 + C_3^2 + \ldots + C_{m-1}^2 = C_m^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}$$

(числа $C_m^2 = m(m-1)/2$ называются треугольными числами, а числа C_m^3 – пирамидальными; см. *Фигурные числа*); и вообще, при $m > k$

$$C_k^k + C_{k+1}^k + \ldots + C_{m-1}^k = C_m^{k+1}.$$

Суммы чисел по «восходящим» (зеленым) диагоналям на рисунке 4 равны последовательным числам Фибоначчи (см. *Фибоначчи числа*).

Для применений в теории вероятностей особенно важны асимптотические формулы для чисел треугольника Паскаля, т. е. приближенные оценки этих чисел при больших n.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ДРОБЬ

Периодическая дробь – это бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого места, периодически повторяется определенная группа цифр. Например, 2,51313... . Обычно такую дробь записывают короче: 2,5(13), т. е. помещают повторяющуюся группу цифр в скобки и говорят: «13 в периоде». Примером непериодической бесконечной дроби может служить дробь 0,1010010001..., у которой количество нулей между единицами все время увеличивается на 1, а также дробь, представляющая собой любое другое иррациональное число, например $\sqrt{3}$. Если в периодической дроби повторяющаяся группа цифр расположена непосредственно после запятой, то такую дробь называют чистой, в противном случае – смешанной. Всякую периодическую дробь можно обратить в обыкновенную, т. е. периодические дроби являются числами рациональными. Чистая периодическая дробь, меньшая 1, равна такой правильной обыкновенной дроби, в числителе которой стоит период, а в знаменателе – число, изображенное цифрой 9, которая написана столько раз, сколько цифр в периоде.

Так, $0,(12) = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$. Теперь нетрудно обратить в обыкновенную дробь любую периодическую дробь. Покажем, как это делается, на примере:

$$3,1(3) = 3 + 0,1 + 0,0(3) = 3 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{47}{15}.$$

Вывод этого правила основан на формуле суммы бесконечно убывающей *геометрической прогрессии*. При решении обратной задачи (обращение обыкновенной дроби в десятичную) всегда получается либо конечная десятичная дробь, либо периодическая дробь. При этом конечная десятичная дробь получается тогда, когда знаменатель несократимой обыкновенной дроби не содержит никаких простых множителей, кроме 2 и 5; чистая периодическая – когда знаменатель несократимой обыкновенной дроби не делится ни на 2, ни на 5; во всех остальных случаях получается смешанная периодическая дробь.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Изучая явления природы, решая технические задачи, мы сталкиваемся с периодическими процессами, которые можно описать функциями особого вида.

Функция $y = f(x)$ с областью определения D называется периодической, если существует хотя бы одно число $T > 0$, такое, при котором выполняются следующие два условия:

1) точки $x + T$, $x - T$ принадлежат области определения D для любого $x \in D$;

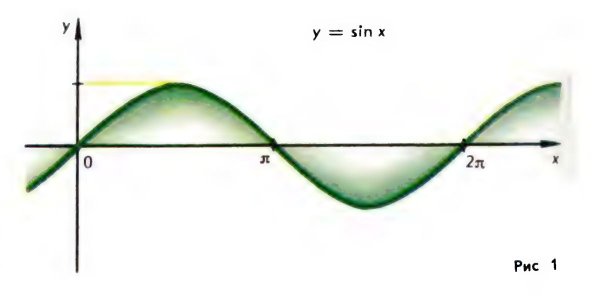
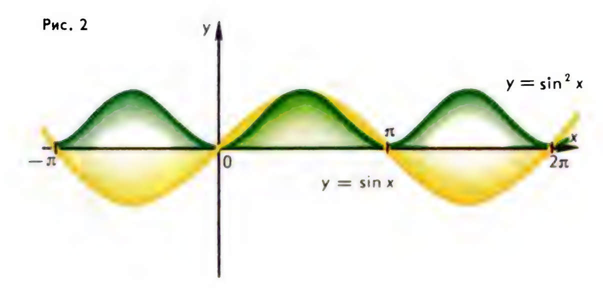


Рис 1

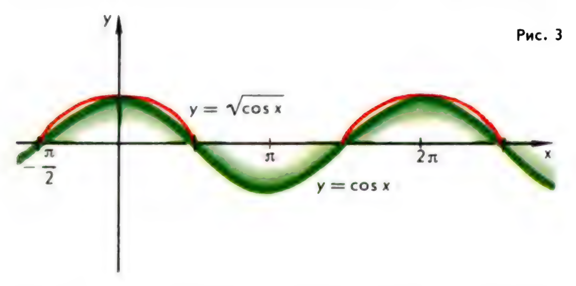


2) для каждого x из D имеет место соотношение

$$f(x)=f(x+T)=f(x-T).$$

Число T называется периодом функции $f(x)$. Иными словами, периодической функцией является такая функция, значения которой повторяются через некоторый промежуток. Например, функция $y=\sin x$ – периодическая (рис. 1) с периодом 2π.

Заметим, что если число T является периодом функции $f(x)$, то и число $2T$ также будет ее периодом, как и $3T$, и $4T$ и т.д., т.е. у периодической функции бесконечно много раз-



ных периодов. Если среди них имеется наименьший (не равный нулю), то все остальные периоды функции являются кратными этого числа. Заметим, что не каждая периодическая функция имеет такой наименьший положительный период; например, функция $f(x)=1$ такого периода не имеет. Важно также иметь в виду, что, например, сумма двух периодических функций, имеющих один и тот же наименьший положительный период T_0, не обязательно имеет тот же самый положительный период. Так, сумма функций $f(x)=\sin x$ и $g(x)=-\sin x$ вообще не имеет наименьшего положительного периода, а сумма функций $f(x)=\sin x+\sin 2x$ и $g(x)=-\sin x$, наименьшие периоды которых равны 2π, имеет наименьший положительный период, равный π.

Если отношение периодов двух функций $f(x)$ и $g(x)$ является рациональным числом, то сумма и произведение этих функций также будут периодическими функциями. Если же отношение периодов всюду определенных и непрерывных функций f и g будет иррациональным числом, то функции $f+g$ и fg уже будут непериодическими функциями. Так, например, функции $\cos x\cdot\sin\sqrt{2}x$ и $\cos\sqrt{2}x+\sin x$ являются непериодическими, хотя функции $\sin x$ и $\cos x$ периодичны с периодом 2π, функции $\sin\sqrt{2}x$ и $\cos\sqrt{2}x$ периодичны с периодом $\sqrt{2}\pi$.

Отметим, что если $f(x)$ – периодическая функция с периодом T, то сложная функция (если, конечно, она имеет смысл) $F(f(x))$ является также периодической функцией, причем число T будет служить ее периодом. Например, функции $y=\sin^2 x$, $y=\sqrt{\cos x}$ (рис. 2, 3) периодические функции (здесь: $F_1(z)=z^2$ и $F_2(z)=\sqrt{z}$). Не следует, однако, думать, что если функция $f(x)$ имеет наименьший положительный период T_0, то и функция $F(f(x))$ будет иметь такой же наименьший положительный период; например, функция $y=\sin^2 x$ имеет наименьший положительный период, в 2 раза меньший, чем функция $f(x)=\sin x$ (рис. 2).

Нетрудно показать, что если функция f периодична с периодом T, определена и дифференцируема в каждой точке действительной прямой, то функция $f'(x)$ (производная) есть также периодическая функция с периодом T, однако первообразная функция $F(x)$ (см. *Интегральное исчисление*) для $f(x)$ будет периодической функцией только в том случае, когда

$$F(T)-F(0)=\int_0^T f(x)\,dx=0.$$

ПЕРСПЕКТИВА

Слово «перспектива» происходит от латинского глагола *perspicio* – «ясно вижу». В изобразительном искусстве перспектива – способ изображения пространственных фигур на плоскости такими, какими они видны из одной неподвижной точки. Из опыта мы знаем, что при удалении предмета его видимые размеры уменьшаются, уходящие вдаль параллельные прямые (например, два рельса железнодорожного пути) представляются нам сходящимися в одной точке на горизонте, а круглое озеро выглядит с берега как вытянутый овал.

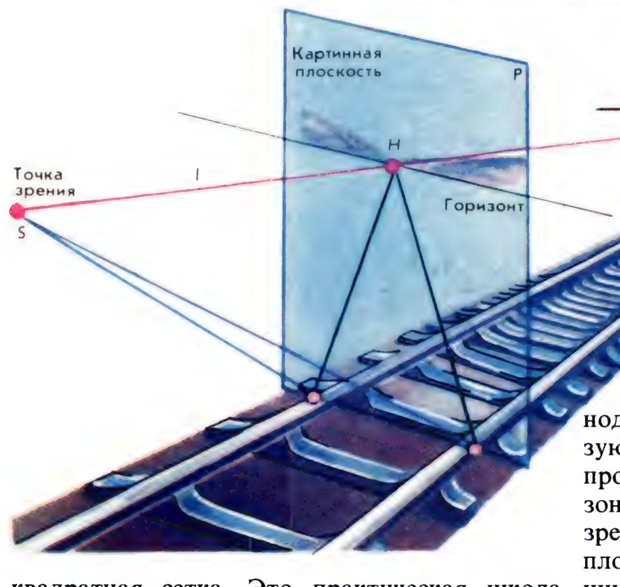
Точные законы перспективы разрабатывали архитекторы, художники и ученые эпохи Возрождения начиная с XV в., среди них – Ф. Брунеллески, П. Уччелло, Пьеро делла Франческо, Леонардо да Винчи, А. Дюрер и другие.

На одной из гравюр А. Дюрера изображено, как художник рисует лютню. Перед ним стоит прибор, который состоит из рамки с натянутой на нее квадратной сеткой и прикрепленным перед ней глазком; глядя в этот глазок на лютню, художник переносит ее изображение на лежащий перед ним лист бумаги, на котором нанесена такая же, как на рамке,

Гравюра А. Дюрера «Построение перспективы лютни».



Рис. 1



квадратная сетка. Это практическая школа перспективы.

Сформулируем математическую задачу построения перспективного изображения. Представим себе прозрачную плоскость p картины, расположенную между точкой S, откуда идет наблюдение, называемой точкой зрения (глазом художника), и изображаемым предметом. Каждая точка M предмета должна изображаться точкой M' картины, в которой прямая линия MS пересекает плоскость p. Отсюда предложенное Леонардо да Винчи название линейная перспектива (в отличие от воздушной перспективы, объясняющей и использующей уменьшение контрастности и изменение окраски удаленных предметов). Свойства линейной перспективы – это свойства центральной проекции (см. *Проекция*) на плоскость p с центром S. На рис. 1 показано, как получается изображение двух параллельных железнодорожных рельсов: две плоскости, образующие «крышу домика» (в которых лежат проецирующие лучи), пересекаются по горизонтальной прямой l, проходящей через точку зрения S. В точке H пересечения l с картинной плоскостью сходятся две прямые, изображающие рельсы на картине.

Вообще, для каждого семейства параллельных прямых их изображения сходятся в одной точке H; если эти прямые горизонтальны, то H лежит на «линии горизонта» – прямой, по которой проходящая через S горизонтальная плоскость пересекает картину. Такое семейство прямых хорошо видно на рисунке к статье «Проективная геометрия» (см. стр. 256, верхний рисунок).

Построить для пространственной и даже для плоской фигуры ее точное перспективное изображение не всегда простая задача. Такие задачи относятся к начертательной геометрии, которую изучают в архитектурных, некоторых технических и художественных учебных заведениях. Приведем несколько примеров.

На двух рисунках 2 *а*, *б* изображены ряды равноотстоящих телеграфных столбов, уходя-

Рис. 2

а

Н

б

Н

P

S_1

S_2

S_1
Точка удаления

S_2
Точка удаления

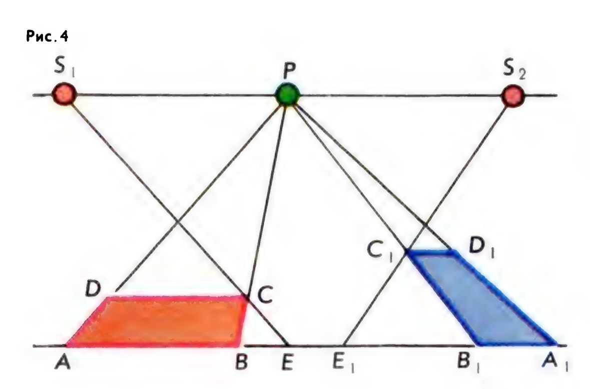
45°

45°

S

Рис. 3

Рис. 4



щих к «бесконечно удаленной» точке H на линии горизонта. Какой из них правильный? Может быть, оба? Наш зрительный опыт подсказывает, что правилен рис. 2*а*. Можно доказать, что расстояния от H до оснований столбов (и также высоты столбов) должны убывать, как числа, обратные к членам арифметической прогрессии, а на левом рисунке эти величины ведут себя как члены геометрической прогрессии – каждый раз убывают вдвое.

В ряде задач практически удобно переносить изображение с плана на перспективную картину с помощью сетки квадратов (на рис. 3 по горизонтальной плоскости разбросаны одинаковые шары; их видимые размеры пропорциональны их видимым расстояниям от горизонта). Заметим, что изображения сторон квадратов, перпендикулярных картине, все сходятся в «центральной перспективной точке P», а их диагонали – в «точках удаления» S_1 и S_2. Названия этих точек объясняются тем, что расстояния $|PS_1| = |PS_2|$ как раз равны расстоянию от художника S до картинной плоскости. Для построения перспективы можно не рисовать всю сетку квадратов, а использовать лишь точки удаления. Итальянский художник и архитектор А. Поццо на первых страницах своего классического трактата «Перспектива живописцев и архитекторов», изданного в Риме в 1693 г., пишет, как правильно построить перспективное изображение «продолговатого прямоугольника»: «...посредством циркуля на основной линии откладываем ширину AB прямоугольника; рядом откладываем его длину BE. От точек A и B проводим оптические линии к центральной перспективной точке P и от точки E – прямую к точке удаления S_1 и затем (из точки C пересечения ES_1 и BP) – прямую, параллельную линии AB, после чего прямоугольник предстанет в перспективе» (рис. 4; рядом справа изображен прямоугольник, у которого длина больше ширины).



Занимаясь геометрическими построениями перспективных изображений, нетрудно заметить, что некоторые прямые сами собой проходят через одну точку (как, скажем, диагонали и стороны квадратов на рис. 2). За этим фактом можно обнаружить интересные геометрические теоремы. Именно, разрабатывая теорию перспективы, французский архитектор Ж. Дезарг (1593–1662) ввел понятие бесконечно удаленной точки и доказал замечательные геометрические теоремы о конфигурациях точек и прямых, положившие начало новому разделу математики – *проективной геометрии*.

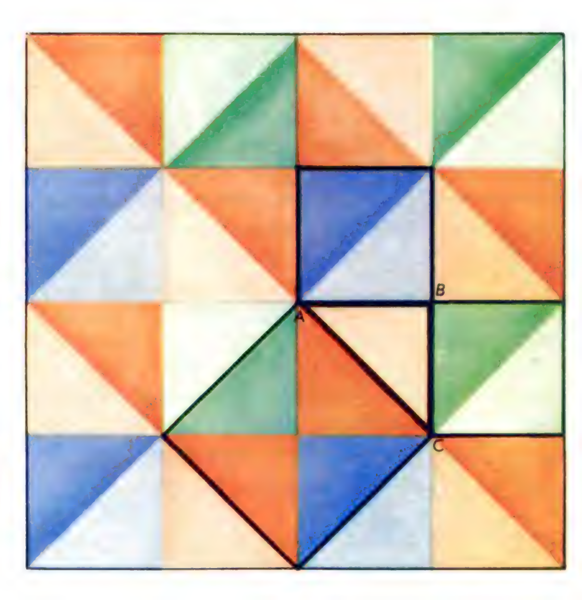
ПИФАГОРА ТЕОРЕМА

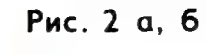
Теорема Пифагора – важнейшее утверждение геометрии. Теорема формулируется так: площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

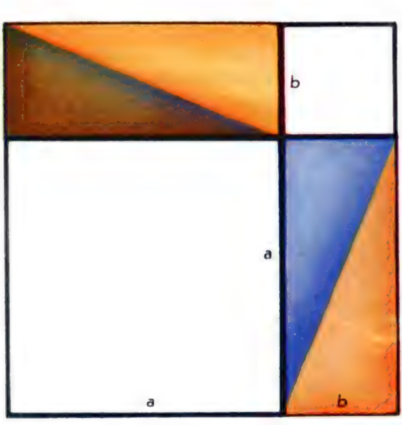
Обычно открытие этого утверждения приписывают древнегреческому философу и математику Пифагору (VI в. до н. э.). Но изучение вавилонских клинописных таблиц и древних китайских рукописей (копий еще более древних манускриптов) показало, что это утверждение было известно задолго до Пифагора, возможно, за тысячелетие до него. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он открыл доказательство этой теоремы.

Вероятно, факт, изложенный в теореме Пифагора, был сначала установлен для равнобедренных прямоугольных треугольников. Достаточно взглянуть на мозаику из черных и светлых треугольников, изображенную на рис. 1, чтобы убедиться в справедливости теоремы для треугольника ABC: квадрат, построенный на гипотенузе, содержит 4 треугольника, а на каждом катете построен

Рис. 1







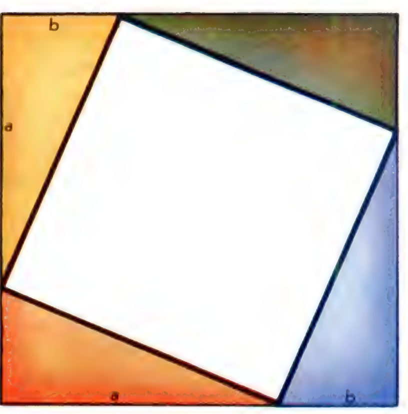


Рис. 2 а, б

квадрат, содержащий 2 треугольника. Для доказательства общего случая в Древней Индии располагали двумя способами: в квадрате со стороной $a+b$ изображали четыре прямоугольных треугольника с катетами длин a и b (рис. 2, *а* и 2, *б*), после чего писали одно слово «Смотри!». И действительно, взглянув на эти рисунки, видим, что слева свободна от треугольников фигура, состоящая из двух квадратов со сторонами a и b, соответственно ее площадь равна a^2+b^2, а справа – квадрат со стороной c – его площадь равна c^2. Значит, $a^2+b^2=c^2$, что и составляет утверждение теоремы Пифагора.

Однако в течение двух тысячелетий применяли не это наглядное доказательство, а более сложное доказательство, придуманное Евклидом, которое помещено в его знаменитой книге «Начала» (см. *Евклид и его «Начала»*). Евклид опускал высоту BH из вершины прямого угла на гипотенузу и доказывал, что ее продолжение делит построенный на гипотенузе квадрат на два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих квадратов, построенных на катетах (рис. 3). Чертеж, применяемый при доказательстве этой теоремы, в шутку называют «пифагоровы штаны». В течение долгого времени он считался одним из символов математической науки.

ГИППОКРАТОВЫ ЛУНОЧКИ

Гиппократовы луночки – фигуры, ограниченные дугами двух окружностей, и притом такие, что по радиусам и длине общей хорды этих окружностей с помощью циркуля и линейки можно построить равновеликие им квадраты.

Из обобщения теоремы Пифагора на полукруги следует, что сумма площадей розовых луночек, изображенных на рисунке слева, равна площади голубого треугольника. Поэтому, если взять равнобедренный прямоугольный треугольник, то получатся две луночки, площадь каждой из которых будет равна половине площади треугольника. Пытаясь решить задачу о квадратуре круга (см. *Классические задачи древности*), древнегреческий математик Гиппократ (V в. до н. э.) нашел еще несколько луночек, площади которых выражены через площади прямолинейных фигур.

Полный перечень гиппократовых луночек был получен лишь в XIX–XX вв. благодаря использованию методов теории Галуа.

Рис. 1

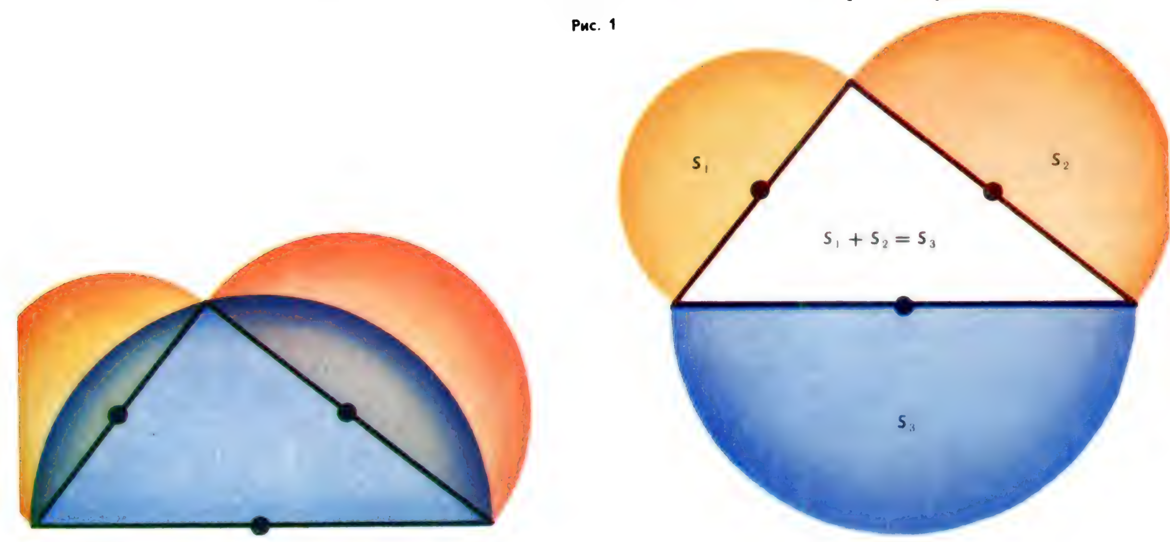
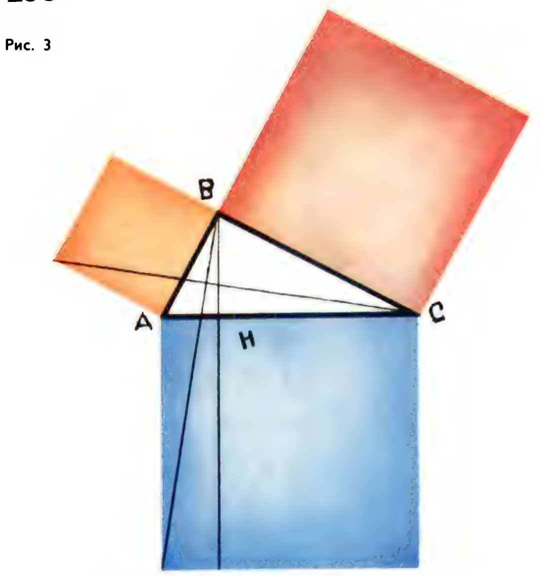


Рис. 3



В наши дни известно несколько десятков различных доказательств теоремы Пифагора. Одни из них основаны на разбиении квадратов, при котором квадрат, построенный на гипотенузе, состоит из частей, входящих в разбиения квадратов, построенных на катетах; другие – на дополнении до равных фигур; третьи – на том, что высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, делит прямоугольный треугольник на два подобных ему треугольника.

Теорема Пифагора лежит в основе большинства геометрических вычислений. Еще в Древнем Вавилоне с ее помощью вычисляли длину высоты равнобедренного треугольника по длинам основания и боковой стороны, стрелку сегмента по диаметру окружности и длине хорды, устанавливали соотношения между элементами некоторых правильных многоугольников. С помощью теоремы Пифагора доказывается ее обобщение, позволяющее вычислить длину стороны, лежащей против острого или тупого угла:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \qquad (1)$$

Из этого обобщения следует, что наличие прямого угла C в $\triangle ABC$ является не только достаточным, но и необходимым условием для выполнения равенства $c^2 = a^2 + b^2$. Из формулы (1) следует соотношение $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ между длинами диагоналей и сторон параллелограмма, с помощью которого легко найти длину медианы треугольника по длинам его сторон.

На основании теоремы Пифагора выводится и формула, выражающая площадь любого треугольника через длины его сторон (см. *Герона формула*). Разумеется, теорему Пифагора применяли и для решения разнообразных практических задач.

Вместо квадратов на сторонах прямоугольного треугольника можно строить любые подобные между собой фигуры (равносторонние треугольники, полукруги и т. д.). При этом площадь фигуры, построенной на гипотенузе, равна сумме площадей фигур, построенных на катетах. Другое обобщение связано с переходом от плоскости к пространству. Оно формулируется так: квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений (длины, ширины и высоты). Аналогичная теорема верна и в многомерном и даже бесконечномерном случаях.

Теорема Пифагора существует только в евклидовой геометрии. Ни в геометрии Лобачевского, ни в других неевклидовых геометриях она не имеет места. Не имеет места аналог теоремы Пифагора и на сфере. Два меридиана, образующие угол 90°, и экватор ограничивают на сфере равносторонний сферический треугольник, все три угла которого прямые. Для него $a^2 + b^2 = 2c^2$, а не c^2, как на плоскости.

С помощью теоремы Пифагора вычисляют расстояние между точками $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ координатной плоскости по формуле

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

После того как была открыта теорема Пифагора, возник вопрос, как отыскать все тройки натуральных чисел, которые могут быть сторонами прямоугольных треугольников (см. *Ферма великая теорема*). Они были открыты еще пифагорейцами, но какие-то общие методы отыскания таких троек чисел были известны еще вавилонянам. Одна из клинописных табличек содержит 15 троек. Среди них есть тройки, состоящие из настолько больших чисел, что не может быть и речи о нахождении их путем подбора.

ПЛОЩАДЬ

Площадью называется величина, характеризующая размер геометрической фигуры.

Определение площадей геометрических фигур – одна из древнейших практических задач. Правильный подход к их решению был найден не сразу. Древние вавилоняне полагали, например, что площадь всякого четырехугольника равна произведению полусумм противоположных сторон. Формула явно неверна: из нее вытекает, в частности, что площади всех ромбов с равными сторонами одинаковы. Между тем очевидно, что у таких ромбов площади зависят от углов при вершинах. Но уже древние греки умели правильно находить площади многоугольников.

Когда каменщики определяют площадь

«Все сведения о телах и их свойствах должны содержать точные указания на число, вес, объем, размеры. Практика рождается из тесного соединения физики и математики».

Ф. Бекон



прямоугольной стены дома, они перемножают высоту и ширину стены. Таково принятое в геометрии определение: площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон. Обе эти стороны должны быть выражены в одних и тех же линейных единицах. Их произведение и составит площадь прямоугольника, выраженную в соответствующих квадратных единицах. Скажем, если высота и ширина стены измерены в дециметрах, то произведение обоих измерений будет выражено в квадратных дециметрах. И если площадь каждой облицовочной плитки составляет квадратный дециметр, то полученное произведение укажет число плиток, нужное для облицовки. Это вытекает из утверждения, положенного в основу измерения площадей: площадь фигуры, составленной из непересекающихся фигур, равна сумме их площадей.

Площадь составной фигуры не изменится, если ее части расположить по-другому, но опять без пересечения (см. *Равносоставленные и равновеликие фигуры*). Поэтому можно, исходя из формулы площади прямоугольника, находить формулы площадей других фигур. Например, треугольник разбивается на такие части, из которых затем можно составить равновеликий ему прямоугольник. Из этого построения следует, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Прибегая к подобной перекройке, нетрудно доказать, что площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, площадь трапеции – произведению полусуммы оснований на высоту.

Формулу площади параллелограмма можно обосновать и с помощью принципа Кавальери (см. *Кавальери принцип*). Согласно ему площади двух фигур равны, если равны между собой длины любых двух сечений, проведенных в той и другой фигуре параллельно некоторой прямой и на одинаковом от нее расстоянии.

Иначе можно вывести и формулу площади трапеции, разбивая ее на треугольники. Путем разбиения на треугольники нетрудно определить площадь любого *многоугольника*, поэтому известны точные формулы площади для правильных многоугольников. Математики античности и средневековья вычисляли площадь *круга*, рассматривая ее как предел площадей вписанных в этот круг и описанных около него правильных многоугольников, число сторон у которых удваивается неограниченно.

Когда каменщикам приходится облицовывать стену сложной конфигурации, они могут определить площадь стены, подсчитав число пошедших на облицовку плиток. Некоторые плитки, естественно, придется обкалывать, чтобы края облицовки совпали с кромкой стены. Число всех пошедших в работу плиток оценивает площадь стены с избытком, число необломанных плиток – с недостатком. С уменьшением размеров плиток количество отходов уменьшается, и площадь стены, определяемая через число плиток, вычисляется все точнее.

Этот прием применяется и на практике, правда не строительной. Фигуру, площадь которой требуется измерить, вычерчивают на миллиметровой бумаге и подсчитывают сначала число укладывающихся в границы фигуры сантиметровых квадратиков, потом миллиметровых... Если бы существовала миллиметровая бумага с делениями, кратными сколь угодно высокой степени десятки, такая процедура, продолженная неограниченно долго, приводила бы к точному значению площади. Методы нахождения площадей произвольных фигур дает *интегральное исчисление.*

Существуют и механические приборы для вычисления площадей плоских фигур – так называемые планиметры.

ПОЛЕ

Поле – множество элементов, для которых определены арифметические операции.

Если учитель предложит разложить на множители многочлен x^2–3, то ученик 6-го класса ответит, что этот многочлен на множители неразложим. Ученик же 7-го класса легко справится с этой задачей, записав разложение в виде $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$. С разложением на множители многочлена $x^2 + 4$ справятся лишь немногие школьники старших классов, которые знают *комплексные числа*: $x^2 + 4 = (x - 2i) \cdot (x + 2i)$. А если пользоваться лишь действительными числами, то такое разложение осуществить невозможно.

Таким образом, решение вопроса, можно ли разложить данный многочлен на множители, зависит от того, какими числами разрешается пользоваться: только рациональными, или всеми действительными, или, наконец, комплексными числами. При этом, выполняя различные операции над многочленами, их коэффициенты приходится складывать и вычитать, умножать и делить друг на друга. Поэтому в алгебре приходится пользоваться не произвольными множествами коэффициентов, а лишь множествами чисел, обладающих следующим важным свойством: вместе с двумя числами a и b этим множествам принадлежат сумма, разность, произведение и частное чисел a и b (разумеется, кроме случая, когда приходится делить на нуль).

Поскольку в таких множествах операции выполняются без ограничений, т.е. в них

можно «перемещаться» без препон, как по ровной местности, условились называть числовые множества с описанным выше свойством неограниченной выполнимости арифметических операций числовыми полями. Полями являются множество Q всех рациональных чисел, множество R всех действительных чисел и множество *C* всех *комплексных чисел* (обозначения происходят от французских слов *quotient* – «отношение», *réel* – «действительный» и *complexe* – «комплексный»).

Но этими тремя полями не исчерпывается все многообразие числовых полей. Например, числа вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, образуют поле, равно как и числа вида $a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}$, где коэффициенты a, b, c рациональны. Проверить, что сумма, разность и произведение чисел такого вида имеют аналогичный вид, совсем несложно. Несколько сложнее доказать, что и операция деления приводит к подобным числам. Про поле чисел вида $a+b\sqrt{2}$ говорят, что оно получено присоединением числа $\sqrt{2}$ к полю Q, а поле чисел вида $a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}$ получается из Q присоединением числа $\sqrt[3]{5}$ (число $\sqrt[3]{25}$ равно $(\sqrt[3]{5})^2$).

Введение понятия числового поля позволило уточнить многие утверждения алгебры многочленов, глубже изучить свойства алгебраических уравнений – эти свойства зависят от того, над какими полями рассматривают эти многочлены и уравнения, т.е. какие коэффициенты считаются допустимыми. Но математики, введя то или иное полезное понятие, стараются выяснить, от каких его свойств зависят все остальные свойства, т.е. какими аксиомами определяется это понятие. Общими свойствами всех числовых полей являются следующие:

1) для любых элементов a и b поля F определены их сумма $a+b$ и произведение ab;

2) в поле существуют нуль (0) и единица (1);

3) для любого числа a из поля F в F есть противоположное ему число $-a$, а если $a \neq 0$, то и – обратное ему число $1/a$;

4) выполняются тождества:

$a+b=b+a$,	$ab=ba$,
$(a+b)+c=$ $=a+(b+c)$,	$(ab)c=a(bc)$
$a+0=a$,	$a\cdot 1=a$,
$a+(-a)=0$,	$a\cdot\dfrac{1}{a}=1$,
	$a(b+c)=ab+ac$,

выражающие коммутативность и ассоциативность операций сложения и умножения, дистрибутивность умножения относительно сложения и свойства нуля, единицы, противоположного и обратного элементов. Другие равенства, например такие, как $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ или $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, можно уже вывести из указанных основных тождеств, следовательно, они справедливы для любого поля.

Оказалось, что операции сложения и умножения с указанными свойствами можно определять не только для чисел, но и для иных объектов.

Очень интересный вид полей открыл французский математик *Э. Галуа*. Эти поля состоят лишь из конечного числа элементов. Простейшими примерами таких полей Галуа являются поля вычетов по простому модулю (см. *Сравнения*).

Многочисленные тождества, изучаемые в курсе алгебры средней школы и наполняющие учебники и задачники по алгебре, являются следствиями основных тождеств, входящих в определение поля, и потому эти тождества верны для любых полей.

Для полей можно строить не только алгебру, но и арифметику. Для этого нужно сначала определить, какие элементы поля называются целыми. Целыми алгебраическими числами называют числа, которые удовлетворяют уравнению вида $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$, где коэффициенты a_1, ..., a_n – обычные целые числа. Например, $\sqrt[3]{5}$ – целое алгебраическое число, так как оно является корнем уравнения $x^3-5=0$.

Сумма, разность и произведение целых алгебраических чисел тоже являются целыми алгебраическими числами, а частное, вообще говоря, целым уже не является. Любое множество чисел, содержащее вместе с двумя числами их сумму, разность и произведение, называют числовым кольцом. Примерами числовых колец могут служить множества чисел вида $a+b\sqrt{2}$ или $a+b\sqrt[3]{5}+c\sqrt[3]{25}$, где коэффициенты a, b, c – обычные целые числа. Обобщая понятие числового кольца, математики ввели общее понятие кольца: множества элементов, в котором определены операции сложения и умножения, причем сложение обладает свойствами коммутативности и ассоциативности, умножение дистрибутивно относительно сложения, а каждый элемент a имеет противоположный $-a$. Умножение в кольцах, вообще говоря, не обязано быть коммутативным или ассоциативным. Примером некоммутативного кольца является множество квадратных *матриц* n-го порядка.

Арифметика в числовых кольцах имеет особенности, отличающие ее от обычной арифметики целых чисел. Например, в числовом кольце всех целых алгебраических чисел нет ни одного простого числа – каждое число α можно разложить на множители: $\alpha=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha}$.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

Последовательность – одно из основных понятий математики. Последовательность может быть составлена из чисел, точек, функций, векторов и т.д. Последовательность считается заданной, если указан закон, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие элемент x_n некоторого множества. Последовательность записывается в виде x_1, x_2, ..., x_n, или кратко (x_n). Элементы x_1, x_2, ..., x_n называются членами последовательности, x_1 – первым, x_2 – вторым, x_n – общим (n-м) членом последовательности.

Наиболее часто рассматривают числовые последовательности, т.е. последовательности, члены которых – числа. Аналитический способ – самый простой способ задания числовой последовательности. Это делают с помощью формулы, выражающей n-й член последовательности x_n через его номер n. Например, если

$$x_n = \frac{2n-1}{n+2}, \text{ то } x_1 = \frac{1}{3}, \; x_2 = \frac{3}{4},$$

$$x_3 = 1, \; x_{10} = \frac{19}{12}.$$

Другой способ – рекуррентный (от латинского слова *recurrens* – «возвращающийся»), когда задают несколько первых членов последовательности и правило, позволяющее вычислять каждый следующий член через предыдущие. Например:

$$x_1 = \sqrt{2}, \; x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}. \qquad (1)$$

Примеры числовых последовательностей – *арифметическая прогрессия* и *геометрическая прогрессия*.

Интересно проследить поведение членов последовательности при неограниченном возрастании номера n (то, что n неограниченно возрастает, записывается в виде $n \to \infty$ и читается: «n стремится к бесконечности»).

Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = 1/n$: $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2$; $x_3 = 1/3$, ..., $x_{100} = 1/100$, ... Все члены этой последовательности отличны от нуля, но чем больше n, тем меньше x_n отличается от нуля. Члены этой последовательности при неограниченном возрастании n стремятся к нулю. Говорят, что число нуль есть предел этой последовательности.

Другой пример: $x_n = (-1)^n/n$ – определяет последовательность

$$x_1 = -1, \; x_2 = \frac{1}{2}, \; x_3 = -\frac{1}{3}, \; x_4 = \frac{1}{4}, \; \ldots.$$

Члены этой последовательности также

Рис. 1



стремятся к нулю, но они то больше нуля, то меньше нуля – своего предела.

Рассмотрим еще пример: $x_n = (n-1)/(n+1)$. Если представить x_n в виде

$$x_n = 1 - \frac{2}{n+1}, \qquad (2)$$

то станет понятно, что эта последовательность стремится к единице.

Дадим определение предела последовательности. Число a называется пределом последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε можно указать такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Если a есть предел последовательности (x_n), то пишут $x_n \to a$, или $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (lim – три первые буквы латинского слова *limes* – «предел»).

Это определение станет понятнее, если ему придать геометрический смысл. Заключим число a в интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (рис. 1). Число a есть предел последовательности (x_n), если независимо от малости интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ все члены последовательности с номерами, бо́льшими некоторого N, будут лежать в этом интервале. Иными словами, вне любого интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ может находиться лишь конечное число членов последовательности.

Для рассмотренной последовательности $x_n = (-1)^n/n$ в ε-окрестность точки нуль при $\varepsilon = 1/10$ попадают все члены последовательности, кроме первых десяти, а при $\varepsilon = 1/100$ – все члены последовательности, кроме первых ста.

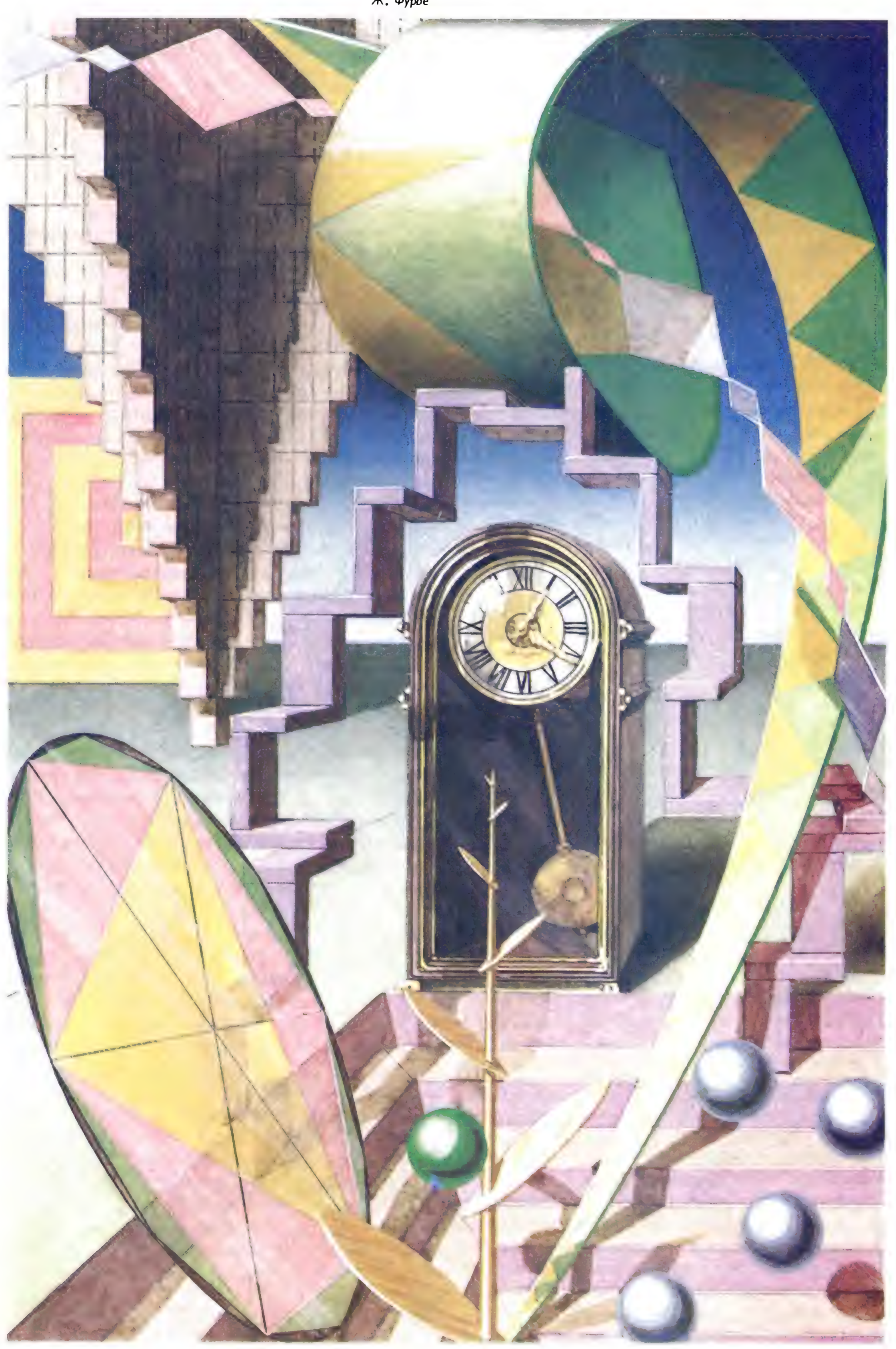
Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела – расходящейся. Вот пример расходящейся последовательности: $x_n = (-1)^n$. Ее члены попеременно равны $+1$ и -1 и не стремятся ни к какому пределу.

Если последовательность сходится, то она ограничена, т.е. существуют такие числа c и d, что все члены последовательности удовлетворяют условию $c \leqslant x_n \leqslant d$. Отсюда следует, что все неограниченные последовательности расходящиеся. Таковы последовательности:

$$(n^2), \; (2^n), \; \left(\frac{n+(-1)^n}{2}\right).$$

«Пристальное, глубокое изучение природы есть источник самых плодотворных открытий математики».

Ж. Фурье



Стремящаяся к нулю последовательность называется бесконечно малой. Понятие бесконечно малой может быть положено в основу общего определения предела последовательности, так как предел последовательности (x_n) равен a тогда, и только тогда, когда x_n представимо в виде суммы $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая.

Рассмотренные последовательности $(1/n)$, $((-1)^n/n)$ являются бесконечно малыми. Последовательность $(n-1)/(n+1)$, как следует из (2), отличается от 1 на бесконечно малую $2/(n+1)$, и потому предел этой последовательности равен 1.

Большое значение в математическом анализе имеет также понятие бесконечно большой последовательности. Последовательность (x_n) называется бесконечно большой, если последовательность $(1/x_n)$ бесконечно малая. Бесконечно большую последовательность (x_n) записывают в виде $x_n \to \infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, и говорят, что она «стремится к бесконечности». Вот примеры бесконечно больших последовательностей:

$$(n^2), \quad (2^n), \quad (\sqrt{n+1}), \quad (n-n^2).$$

Подчеркнем, что бесконечно большая последовательность не имеет предела.

Рассмотрим последовательности (x_n) и (y_n). Можно определить последовательности с общими членами $x_n + y_n$, $x_n - y_n$, $x_n y_n$ и (если $y_n \neq 0$) x_n/y_n. Справедлива следующая теорема, которую часто называют теоремой об арифметических действиях с пределами: если последовательности (x_n) и (y_n) сходящиеся, то сходятся также последовательности $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$, (x_n/y_n) и имеют место равенства:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

В последнем случае необходимо потребовать, кроме того, чтобы все члены последовательности (y_n) были отличны от нуля, еще и чтобы выполнялось условие $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Применяя эту теорему, можно находить многие пределы. Найдем, например, предел последовательности с общим членом

$$x_n = \frac{2n^2 - 1}{3n + n^2}.$$

Представив x_n в виде

$$x_n = \frac{n^2\left(2 - \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\dfrac{3}{n} + 1\right)} = \frac{2 - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n} + 1},$$

установим, что предел числителя и знаменателя существует:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 2,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n} + 1\right) = 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

поэтому получим:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2/1 = 2.$$

Важный класс последовательностей – монотонные последовательности. Так называют последовательности возрастающие ($x_{n+1} > x_n$ при любом n), убывающие ($x_{n+1} < x_n$), неубывающие ($x_{n+1} \geqslant x_n$) и невозрастающие ($x_{n+1} \leqslant x_n$). Последовательность $(n-1)/(n+1)$ возрастающая, последовательность $(1/n)$ убывающая. Можно доказать, что рекуррентно заданная последовательность (1) монотонно возрастает.

Представим себе, что последовательность (x_n) не убывает, т. е. выполняются неравенства

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots,$$

и пусть, кроме того, эта последовательность ограничена сверху, т. е. все x_n не превосходят некоторого числа d. Каждый член такой последовательности больше предыдущего или равен ему, но все они не превосходят d. Вполне очевидно, что эта последовательность стремится к некоторому числу, которое либо меньше d, либо равно d. В курсе математического анализа доказывается теорема, что неубывающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел (аналогичное утверждение справедливо для невозрастающей и ограниченной снизу последовательности). Эта замечательная теорема дает достаточные условия существования предела. Из нее, например, следует, что последовательность площадей правильных n-угольников, вписанных в окружность единичного радиуса, имеет предел, так как является монотонно возрастающей и ограниченной сверху. Предел этой последовательности обозначается π.

С помощью предела монотонной ограниченной последовательности определяется играющее большую роль в математическом анализе число e – основание натуральных логарифмов:

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n.$$

Последовательность (1), как уже отмечалось, монотонная и, кроме того, ограничена сверху. Она имеет предел. Мы легко найдем этот предел. Если он равен a, то число a должно удовлетворять равенству $a = \sqrt{2 + a}$. Решая это уравнение, получаем $a = 2$.

ПРЕДЕЛ

Предел - важнейшее понятие математики. Говорят, что число a есть предел переменной величины x, если в процессе своего изменения x неограниченно приближается к a. Поясним это примерами.

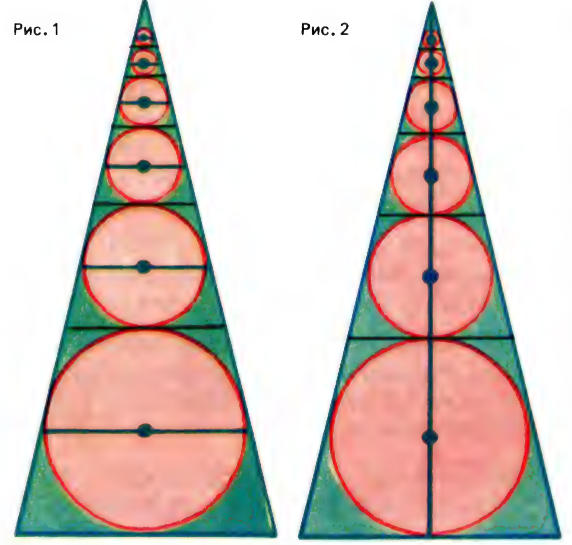
В равнобедренный треугольник впишем окружность (рис. 1), диаметр этой окружности обозначим x_1. К окружности параллельно основанию проведем касательную и получим треугольник, подобный данному. В этот треугольник снова впишем окружность, диаметр ее обозначим x_2, проведем к ней касательную, параллельную основанию, и в полученный меньший треугольник опять впишем окружность. И так далее. Такие построения можно продолжать неограниченно долго и в результате получить последовательность вписанных все уменьшающихся окружностей и соответствующую им последовательность длин их диаметров: x_1, x_2, x_3 ....

Эта последовательность длин диаметров дает пример переменной величины x_n, которая в процессе своего изменения, т.е. с возрастанием номера n, неограниченно приближается к нулю. Предел этой последовательности равен нулю: $a = 0$.

С рассмотренной последовательностью вписанных окружностей свяжем другую переменную величину y_n - последовательность сумм их диаметров:

$y_1 = x_1$,
$y_2 = x_1 + x_2$,
$y_3 = x_1 + x_2 + x_3$,
. . . .

Будет ли эта переменная стремиться к какому-нибудь пределу? Утвердительный ответ последует, если мы рассмотрим рис. 2 (здесь все диаметры повернуты на угол 90°): предел последовательности y_n равен h - длине высоты равнобедренного треугольника, $a = h$.


Рис. 1 Рис. 2

Теперь представим себе математический маятник (рис. 3). Выведем его из положения равновесия - отклоним от вертикальной прямой и отпустим. Маятник начнет совершать колебания относительно положения равновесия, причем из-за трения и сопротивления воздуха размах колебаний будет постепенно уменьшаться. Если характеризовать положение маятника величиной x его отклонения от вертикальной прямой (амплитудой), считая x положительной справа и отрицательной слева, то получим пример переменной величины x, которая в процессе своего изменения стремится к нулю. Ее предел a равен нулю. Заметим, что переменная x есть функция времени, а поскольку время течет непрерывно, то говорят, что это функция непрерывного аргумента.

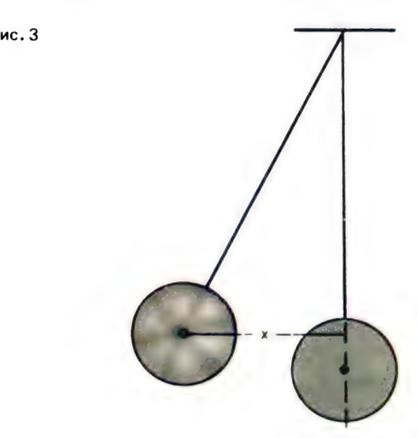


Рис. 3

Все эти примеры показывают, что приближение переменной величины к своему пределу может быть различным. Последовательность (x_n) диаметров стремится к нулю, оставаясь все время больше нуля. Последовательность y_n сумм диаметров, напротив, все время меньше длины высоты h, к которой она стремится. А переменная величина x то больше нуля, то меньше нуля, то равна нулю - своему пределу. Общее же в этих примерах то, что абсолютная величина разности предельного значения и значения переменной, т.е. величина $|x - a|$, в каждом случае становится и остается меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа.

Понятие предела опирается на интуитивное представление о процессе изменения и неогра-

ниченного приближения и, конечно, в таком виде не является математически строгим. Точное математическое определение предела оформилось в математике лишь в начале XIX в. В связи с этим потребовалось уяснить понятие функции, а также развить теорию действительного числа. До этого почти два столетия в математике существовало интуитивное представление о пределе, однако и оно оказалось чрезвычайно плодотворным, так как внесло в математику совершенно новый метод рассуждений – метод пределов. Его применение и развитие привели к созданию *дифференциального исчисления* и *интегрального исчисления*, к созданию *математического анализа.*

Суть этого метода состоит в том, что для определения неизвестной величины находят ее приближения, при этом не одно-два, а неограниченное число таких приближений. Если эти приближения становятся все более точными, отличаются от определяемой величины все меньше и меньше, то сама величина находится как предел этих приближений.

Подобных рассуждений древнегреческая математика не знала. Если в ней и рассматривались приближения, как, например, у Евдокса и Архимеда в их «методе исчерпывания» при определении площадей и объемов, то число этих приближений было невелико, и, кроме того, установление равенства между искомой площадью (или объемом) и уже известной проводилось элементарными геометрическими методами (см. *Кавальери принцип*). Теперь же, в методе пределов, строятся бесконечные приближения и неизвестная величина определяется как предел.

Чтобы дать представление о методе пределов, рассмотрим задачу, которая не может быть решена методами элементарной математики. Требуется определить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, дугой параболы, уравнение которой $y=x^2$, и прямой $x=a$ (рис. 4). Разделим отрезок $[0;\ a]$ на n равных частей длиной $h=a/n$, на каждой из этих частей построим прямоугольник, левая вершина которого лежит на параболе. Найдем сумму площадей всех таких прямоугольников, т.е. найдем площадь заштрихованной фигуры:

$$S_n=0\cdot h+h^2\cdot h+(2h)^2\cdot h+\ldots+((n-1)h)^2h=$$

$$=h^3(1+2^2+\ldots+(n-1)^2)=$$

$$=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

(здесь использована формула для суммы квадратов первых k натуральных чисел, известная еще Архимеду).

Преобразуем выражение для S_n к виду

$$S_n=\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{6}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{a^3}{2}\cdot\frac{1}{n}.$$

Легко понять, что сумма двух последних слагаемых стремится к нулю при неограниченном увеличении n и, значит, S_n стремится к величине $a^3/3$. Как видно из рис. 4, сумма площадей заштрихованных прямоугольников при неограниченном увеличении числа n таких прямоугольников будет стремиться к площади криволинейной фигуры. Следовательно, искомая площадь также равна $a^3/3$, т.е. равна пределу последовательности S_n.

Метод пределов не возник в математике сам собой, он оформился постепенно в результате труда многих математиков, которые начали рассматривать новые для своего времени задачи, не решаемые элементарными методами. Это были задачи определения размеров тел и центра их тяжести, нахождения длин кривых, построения касательных к кривым, нахождения мгновенной скорости при неравномерном движении. Постепенно накапливался опыт и вырабатывались приемы решения подобных задач в общей постановке, например задач, когда требовалось определить мгновенную скорость не в данном конкретном движении, а в любом, если только была известна зависимость пути от времени. Это привело к формированию на основе понятия предела новых понятий интеграла и производной, к созданию математического анализа. Очевидно, что с применением метода пределов потребовалось развить способы вычисления пределов, установить правила действий с пределами, т.е. создать теорию пределов. Основным понятием в этой теории стало понятие бесконечно малой – переменной, предел которой равен нулю. В этот период математический анализ назывался анализом бесконечно малых.

Если предел переменной величины x равен a, то пишут $x\to a$ (читается: «x стремится к a») либо $\lim x=a$ (читается: «предел x равен a»); lim – это первые три буквы латинского слова *limes*, которое и означает «предел». Слово *limes* для обозначения предела впервые употребил И. Ньютон, символ lim ввел французский ученый С. Люилье в 1786 г., а выражение $\lim\limits_{n\to\infty}$ первым записал англичанин У. Гамильтон в 1853 г. Для последовательности, как правило, под знаком предела ставят символ $n\to\infty$, т.е. пишут $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, что означает «предел x_n при неограниченном возрастании n». Для функции под знаком предела указывают, к какому значению стремится аргумент, т.е. пишут $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)$. Это читается так: «предел функции $x(t)$ при стремлении t к t_0».

В теории пределов изучаются свойства пределов, устанавливаются условия, при ко-

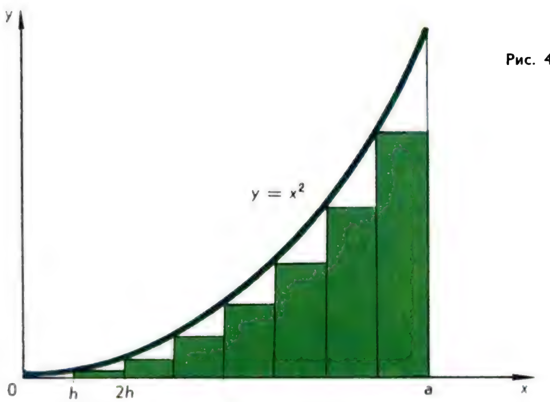


Рис. 4

торых предел переменной существует, находятся правила, по которым, зная пределы нескольких простых переменных величин, можно вычислять пределы функций этих величин.

Сформулируем некоторые теоремы теории пределов.

1. Переменная в заданном процессе изменения может иметь только один предел.

2. Для того чтобы предел переменной x был равен a, необходимо и достаточно, чтобы разность $x - a$ была бесконечно малой.

Пусть переменные x, y, z рассматриваются в одном и том же процессе изменения (это могут быть последовательности x_n, y_n, z_n или функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$), тогда:

3. если $\lim x = \lim y = a$ и в каждый момент изменения выполняется неравенство $x \leqslant z \leqslant y$, то $\lim z = a$;

4. если $\lim x = a$, $\lim y = b$, а c – постоянная, то переменные $x + y$, $x - y$, cx, xy имеют предел и

$$\lim (x + y) = a + b, \ \lim (x - y) = a - b,$$

$$\lim (cx) = ca, \ \lim (xy) = a \cdot b.$$

Кроме того, если $b \neq 0$, то $\lim x/y = a/b$.

В примере определения площади между дугой параболы и осью абсцисс S_n было представлено в виде

$$S_n = \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{6} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{a^3}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a^3}{3} + \alpha_n.$$

Используя очевидный предел $\lim\limits_{n \to \infty} 1/n = 0$ и теорему 4, можем показать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, действительно,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a^3}{6} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{a^3}{2} \cdot \frac{1}{n} \right) = \frac{a^3}{6} \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^2 -$$

$$- \frac{a^3}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{a^3}{6} \cdot 0 - \frac{a^3}{2} \cdot 0 = 0.$$

А так как разность $S_n - a^3/3 = \alpha_n$ есть бесконечно малая, то заключаем: $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = a^3/3$.

Вернемся к рис. 1.

Если взять равнобедренный треугольник, у которого длина боковой стороны в 2 раза больше основания, то для значения длины диаметра x_n и суммы длин диаметров y_n получим выражения:

$$x_n = \frac{2h}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1}, \ y_n = h - h \left(\frac{3}{5} \right)^n.$$

В теории пределов доказывается, что $q^n \to 0$, если положительное число q меньше 1, отсюда следует, что

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{2h}{3} \left(\frac{3}{5} \right)^n = \frac{2h}{3} \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \left(h - h \left(\frac{3}{5} \right)^n \right) = h - h \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n = h.$$

Важный случай представляет собой отношение двух переменных x/z, когда обе одновременно стремятся к нулю, говорят, что тогда имеет место неопределенность вида 0/0.

Рассмотрим функцию $y = (\sin x)/x$, которая, если считать, что x измеряется в радианной мере, определена для всех отличных от нуля x, а при стремлении x к нулю имеет неопределенность вида 0/0.

Возьмем несколько значений углов, близких к нулю: 10^0, 5^0, 2^0, 1^0, $30'$. По тригонометрическим таблицам найдем соответствующие значения синусов, пересчитаем эти углы в радианной мере (напомним, что градусная мера угла φ связана с его радианной мерой x следующим образом:

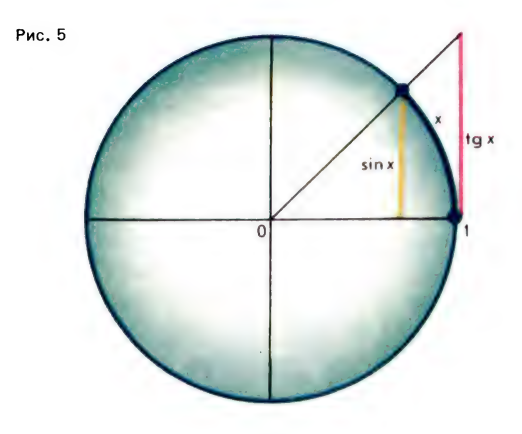
$$x = \frac{\pi}{180} \varphi = 0{,}0174(\varphi))$$

и найдем значения отношения $(\sin x)/x$. Полученные данные представим таблицей (значения даны с точностью до 0,0001):

Величина угла в градусной мере	Величина угла в радианной мере	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
10°	0,1745	0,1736	0,9948
5°	0,0873	0,0872	0,9988
2°	0,0349	0,0349	1
1°	0,0175	0,0175	1
30′	0,0087	0,0087	1

Данные этой таблицы приводят к мысли, что предел отношения $(\sin x)/x$ при стремлении x к 0 равен 1. Доказательство этого может быть получено из неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, верного, как видно из рис. 5, для всех положительных x из первой четверти. Из левого неравенства следует $(\sin x)/x < 1$, а из правого $\cos x < (\sin x)/x$. Таким образом, получаем, что $\cos x < (\sin x)/x < 1$.

Рис. 5



Заметим, что функция $y=(\sin x)/x$ четная, поэтому это неравенство оказывается верным и для отрицательных x.

Выражение $(\sin x)/x$ оказалось заключенным между $\cos x$ и 1, следовательно, отличается от 1 меньше, чем от нее отличается $\cos x$. А так как при стремлении x к нулю $\cos x$ стремится к 1, то

$$\frac{\sin x}{x} \to 1.$$

Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ называется замечательным пределом и используется для вычисления многих других пределов. Заметим, что для нахождения пределов отношений с неопределенностью вида 0/0 в теории пределов разработаны методы раскрытия неопределенностей.

В развитии теории пределов принимали участие И. *Ньютон*, Г. *Лейбниц*, Ж. Даламбер, Л. *Эйлер*. Современная теория предела основана на строгом определении предела, данном О. Коши, и была существенно продвинута работами математиков XIX в. К. Вейерштрасса и Б. Больцано (о пределе последовательности см. *Последовательность*).

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

В практической деятельности мы постоянно имеем дело с приближенными величинами, равенствами, формулами: строим по точкам графики, извлекаем корни из чисел, решаем уравнения и т. д. В теории приближенных вычислений, которая в наши дни быстро развивается, особое значение имеют методы, пригодные для решения широкого класса математических задач. Расскажем о некоторых таких методах.

Вычисление длины окружности при помощи формул удвоения – конкретный пример алгоритма для получения приближенных значений числа π. Этот метод интересен и с исторической точки зрения, так как, возможно, это один из самых старых приемов приближенных вычислений. Формула удвоения связывает длины сторон a_n и a_{2n} правильных n- и $2n$-угольников, вписанных в окружность (диаметр равен 1):

$$a_{2n}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-a_n^2}},\ n\geqslant 3,$$

и позволяет, начав с правильного шестиугольника, длина стороны которого равна 1/2, вычислять последовательно a_{12}, a_{24}, a_{48}, ..., пока не придем к значению периметра, отвечающему заданной точности вычислений. При этом можно доказать, что

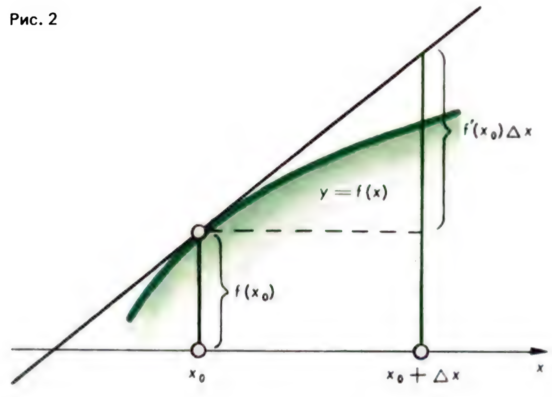
$$\pi-na_n<\frac{6}{n^2},\ n\geqslant 3.$$

Это неравенство позволяет не только установить тот факт, что процесс сходится (т. е. $\pi-na_n\to 0$ при $n\to\infty$), но и спланировать вычисления заранее. Так, если нам нужно обеспечить точность вычислений, равную 10^{-3}, то достаточно взять n таким, чтобы выполнялось неравенство $6/n^2<10^{-3}$, т. е. $n>\sqrt{6000}$, или $n\geqslant 78>\sqrt{6000}$.

Метод вилки, применяемый при нахождении корней уравнения $f(x)=0$ для непрерывных функций f, носит довольно общий характер. Пусть f определена и непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, имеет там единственный корень и $f(a)<0$, $f(b)>0$. Рассмотрим значение $f(z)$, где $z=(a+b)/2$ – середина отрезка $[a,\ b]$. Если $f(z)=0$, то z – искомый корень. Если же $f(z)\neq 0$, то из двух отрезков $[a,\ z]$ и $[z,\ b]$ выберем тот, для которого значения функции f на его концах имеют разные знаки (на рис. 1 это отрезок $[a,\ z]$), и обозначим его через $[a_1,\ b_1]$; тем самым $f(a_1)<0$ и $f(b_1)>0$. Если теперь взять точку $z_1=(a_1+b_1)/2$, то снова или $f(z_1)=0$, или $f(z_1)\neq 0$. Во втором случае из двух отрезков $[a_1,\ z_1]$ и $[z_1,\ b_1]$ выбираем тот, на концах которого функция f принимает значения разных знаков (на рис. 1, $[a_2,\ b_2]=[a,\ z_1]$). Если мы будем продолжать этот

Рис. 1

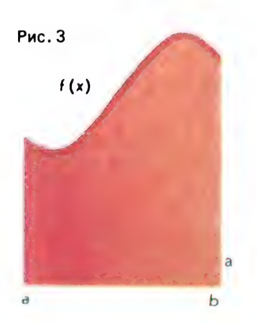
Рис. 2

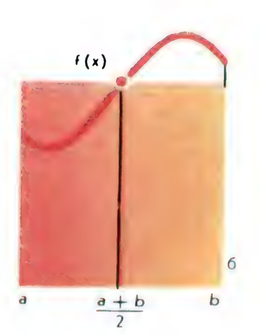


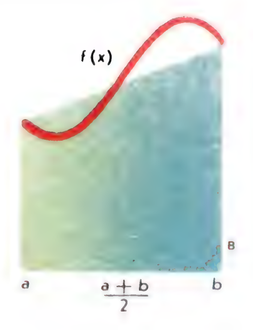
процесс, то он или оборвется на некотором шаге, или мы получим последовательность вложенных отрезков $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., для которых $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$, причем всегда $f(a_n) < 0$ и $f(b_n) > 0$. Из геометрических соображений ясно, что

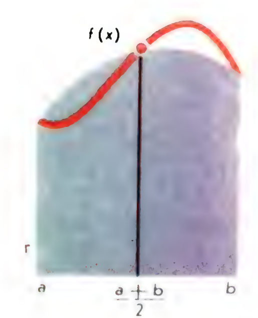
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,\ f(c) = 0.$$

Рис. 3









Кроме того, имеем неравенства:

$$c - a_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}, \quad b_n - c \leqslant \frac{b-a}{2^n},$$

которые позволяют планировать расчеты с заданной точностью.

Применение производной при изучении поведения функции позволяет получить много полезных формул для приближенного вычисления значений функций. Из определения производной следует, что при малых приращениях Δx аргумента x_0 для функции f можно написать приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Геометрически это означает, что вблизи точки $x = x_0$ мы график функции $y = f(x)$ заменили графиком касательной к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ (рис. 2).

Так, например, получаются приближенные формулы (эффективные для малых Δx):

1. $\sqrt[n]{1 + \Delta x} \approx 1 + \Delta x/n \quad (f(x) = \sqrt[n]{x},\ x_0 = 1).$

2. $\sin \Delta x \approx \Delta x \quad (f(x) = \sin x,\ x_0 = 0).$

3. $\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x \quad (f(x) = \ln x\ x_0 = 1).$

Метод касательных Ньютона для приближенного решения уравнений $f(x) = 0$ состоит в следующем. Предположим, что функция f имеет единственный корень c в интервале $]a, b[$ и дифференцируема в каждой точке интервала $]a, b[$ и $f' \neq 0$ в этом интервале. Возьмем произвольную точку $x_0 \in]a, b[$ и напишем уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x = x_0$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Графики $f(x)$ и ее касательной близки между собой при малых $x - x_0$, и поэтому естественно ожидать, что точка x_1 пересечения графика касательной с осью абсцисс будет расположена недалеко от корня c (рис. 2). Имеем:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Продолжая этот процесс, мы получим последовательность (x_n) точек, определенных при помощи формулы

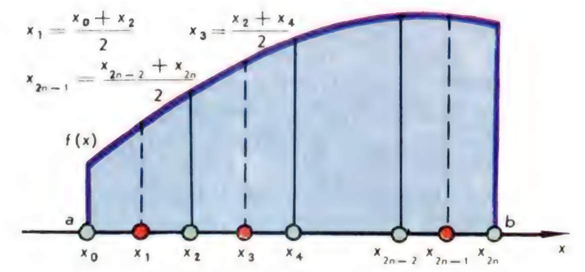
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 1, 2, 3\dots .$$

Известно, что имеет место также неравенство $|x_{n+1} - c| \leqslant A \cdot |x_n - c|^2$,

где $A > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от n. Это неравенство показывает, что уже при достаточно малых n получается достаточно высокая точность приближений.

Приближенное вычисление площадей (интегралов) криволинейных трапеций (рис. 3,*а*) основано на простых геометрических рассмотрениях. Если отрезок $[a, b]$, $a < b$, до-

Рис. 4



статочно мал, то для вычисления площади S криволинейной трапеции для заданной непрерывной функции f на этом отрезке можно, заменив криволинейную трапецию прямоугольником (рис. 3, *б*) или прямолинейной трапецией (рис. 3, *в*), написать следующие приближенные равенства:

$$S \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$S \approx (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$

Если заменить график функции на отрезке $[a, b]$ не прямолинейным отрезком, а графиком параболы (рис. 3, *г*) и в качестве приближения для S взять площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой этой параболы, то получим формулу

$$S \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).$$

Интегральное исчисление дает возможность более точно вычислить площадь криволинейной трапеции.

Чтобы добиться возможно меньшей ошибки при приближенных вычислениях S, промежуток от a до b разбивают предварительно на $2n$ равных частей. Тогда дуга графика $y=f(x)$ разбивается на n частей (рис. 4). Если теперь для каждой из этих маленьких дуг использовать предыдущие способы приближения, то для площади S получатся приближенные значения в виде сумм площадей n криволинейных трапеций; имеем:

$$S \approx \Pi_n = \frac{b-a}{n}(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}),$$

$$S \approx T_n = \frac{b-a}{n}(1/2 f(a)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2n-2})+$$

$$+1/2 f(b)),$$

$$S \approx S_n = \frac{b-a}{6n}((f(a)+f(b))+$$

$$+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2}))+$$

$$+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1})).$$

Первые две формулы носят названия формулы прямоугольников и формулы трапеций, а последняя – формулы Симпсона, по имени английского математика Т. Симпсона (1710–1761).

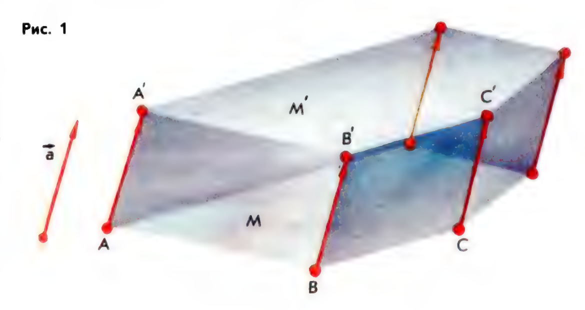
Оценки погрешности в этих приближенных формулах на практике подсчитываются следующим образом. Выбирают число n, кратное 4, и находят значение S по формуле Симпсона (более точной из этих трех) с числом точек n и $n/2$ (S_n и $S_{n/2}$) и приближенно определяют ошибку вычислений при помощи соотношения

$$S - S_n \approx 1/15\,(S_n - S_{n/2}).$$

ПРИЗМА

Пусть $M = ABC\ldots$ – плоский n-угольник, а многоугольник $M' = A'B'C'\ldots$ получается из M параллельным переносом на вектор $\vec{a}$, не параллельный плоскости M. Многогранник, ограниченный многоугольниками M и M' и параллелограммами $ABB'A'$, $BCC'B'$, ... (рис. 1), называется n-угольной призмой (от греческого слова *prisma* – «отпиленный кусок») с основаниями M и M', боковыми гранями $ABB'A'$, $BCC'B'$, ... и боковыми ребрами AA', BB', ... Если боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований, то призма называется прямой, а в противном случае – наклонной. Наконец, призма называется правильной, если она прямая и в основаниях имеет правильные многоугольники.

Рис. 1



Правильная n-угольная призма совмещается сама с собой при поворотах около своей оси – прямой, проходящей через центры оснований O и O' (рис. 2). Через ось проходят



Рис. 2

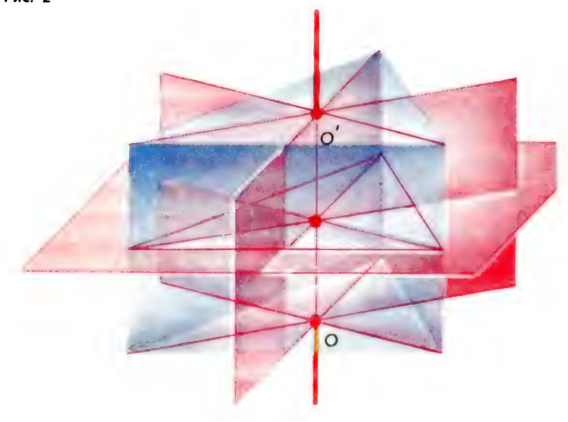
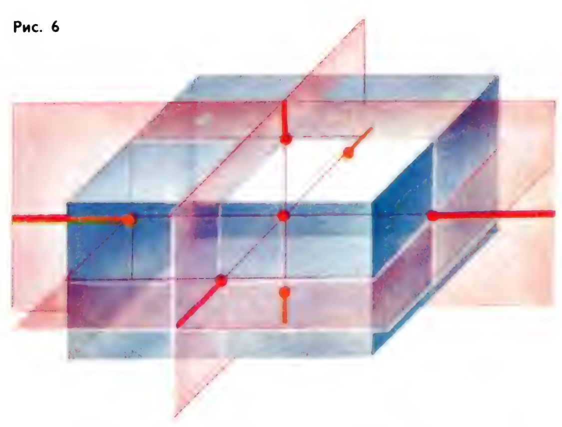




Рис. 3

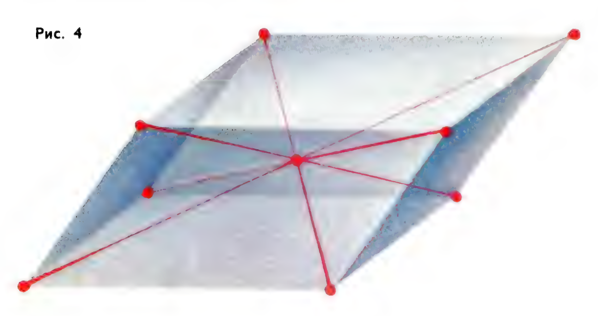


Рис. 6



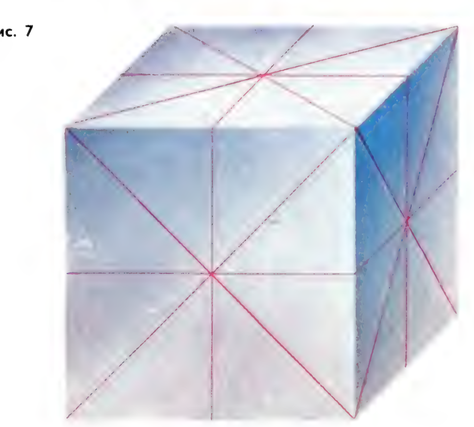
n плоскостей симметрии призмы, а еще одна плоскость симметрии проходит через середину отрезка OO' перпендикулярно ему. Точно такие же плоскости симметрии имеет двойственный к правильной n-угольной призме диэдр, или бипирамида,– многогранник, ограниченный $2n$ треугольниками с вершинами в центрах оснований и боковых граней призмы (рис. 3). Встречающиеся в природе монокристаллы часто имеют форму правильных, возможно усеченных, призм и диэдров (в силу кристаллографических ограничений число n для кристаллических форм может равняться лишь 3, 4 или 6).

Рис. 4



Еще один частный случай симметричных призм – параллелепипед, т.е. призма с параллелограммами в основаниях. Параллелепипед имеет 4 диагонали, которые пересекаются в одной точке O – центре симметрии параллелепипеда. В этой точке диагонали делятся пополам (рис. 4). Прямые параллелепипеды имеют еще и ось симметрии, проходящую через центры оснований (рис. 5). Если основаниями прямого параллелепипеда являются прямоугольники, то он называется прямоугольным. Прямоугольные параллелепипеды преобладают среди окружающих нас многогранных форм: это всевозможные коробки, комнаты, здания и т. д. Эти параллелепипеды имеют по три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, пересекающиеся по трем осям симметрии (рис. 6). Среди прямоугольных параллелепипедов еще более симметричными являются правильные четырехугольные призмы (5 плоскостей симметрии) и куб (9 плоскостей симметрии – на рис. 7 показано, как они разрезают поверхность куба).

Рис. 7



Существует интересная связь между параллелепипедами и тетраэдрами: если через каждые два скрещивающихся ребра тетраэдра провести пару параллельных плоскостей, то получающиеся шесть плоскостей будут ограничивать описанный около тетраэдра параллелепипед (рис. 8). При этом правильному те-

Рис. 5

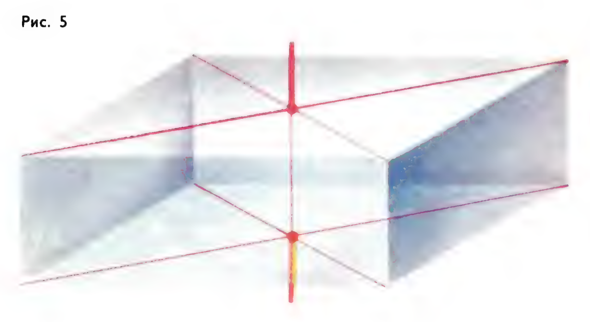
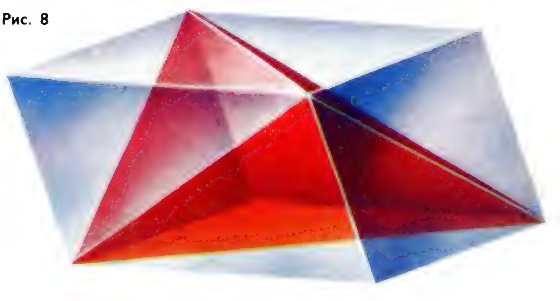


Рис. 8



траэдру отвечает куб, равногранным тетраэдрам – прямоугольные параллелепипеды.

Объем произвольной призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т.е. на расстояние между плоскостями оснований. Есть еще одна формула для объема призмы $V = S_1 \cdot l$, где l – длина бокового ребра, а S_1 – площадь перпендикулярного боковым ребрам сечения призмы.

ПРОГРАММА ДЛЯ ЭВМ

Программа для вычислительной машины (от греческого слова *programma* – «объявление», «предписание», «указание», «распоряжение») – это запись на языке, понятном вычислительной машине, точно сформулированного задания на выполнение ей работы по обработке информации.

Понятие программы для вычислительной машины является по существу синонимом понятия *алгоритм*: добавляется лишь требование, что запись должна быть понятна вычислительной машине. Это требование, во-первых, ограничивает класс рассматриваемых процессов только обработкой информации, а во-вторых, ограничивает способ описания процессов исключительно *языками программирования*.

Программа обязательно содержит три раздела:

исходные данные или указание, где они находятся и откуда их можно взять (ввод);

правила получения результата по исходным данным (обработка);

указание, что нужно делать с полученным результатом (вывод).

Процесс составления программы называется программированием.

Программирование обычно начинается с формального математического или словесного описания процесса решения задачи. Затем это описание постепенно уточняется с учетом специфики языка программирования, на котором должна быть записана программа, а если этим языком является машинный, то с учетом особенностей машины и системы ее команд. Уточнение проводится до тех пор, пока не получится запись на языке программирования.

Наглядным вспомогательным средством, широко применяемым для составления программ, служат так называемые блок-схемы программ (алгоритмов). Элементами блок-схем являются блоки, соединенные стрелками. Стрелки определяют последовательность проведения вычислений, а внутри блоков указывается, в чем именно эти вычисления состоят. Основные типы блоков изображены на рисунке.

Блок-схема алгоритма Евклида.

Условные обозначения основных типов блоков

Процесс (вычислительный блок), от него может отходить только одна стрелка; блок означает выполнение операции или группы операций, в результате которых изменяется значение данных.

Решение (логический блок) имеет 2 выходные стрелки – плюс-стрелку и минус-стрелку. Плюс-стрелка указывает последующий блок для этого логического блока при выполнении условия, указанного внутри блока, а минус-стрелка – в противном случае.

Ввод – вывод – это блок для обозначения операций ввода и вывода данных; от этого блока может отходить только одна стрелка.

Пуск – останов – блок для обозначения начала (в этом случае блок не имеет входных стрелок) или конца (в этом случае блок не имеет выходных стрелок) процесса обработки данных или выполнения программы.

Например, словесная запись *алгоритма Евклида* (нахождения наибольшего общего делителя d для двух целых чисел a и b, таких, что $a > b \geqslant 0$) приведена в левой части табл. 1; в правой части – соответствующие строки программы на русском диалекте языка программирования АЛГОЛ-60. Блок-схема алгоритма (программы) изображена на рисунке. Цифры, стоящие на блоках, соответствуют номерам пунктов в таблице.

Таблица 1

Словесная запись	Программа
1. Взять два целых числа a и b, перейти на следующий пункт (далее переход на следующий пункт будет подразумеваться, если, конечно, явно не указано противоречащее действие)	ВВОД (A, B)
2. Если $b \neq 0$, то перейти на пункт 6 (иначе, т.е. если $b = 0$, то на следующий пункт)	П2: **если** $B \neq 0$, **то на** П6
3. Значение числа d сделать равным значению числа a	$D := A$
4. Наибольший общий делитель чисел a и b есть число d	ВЫВОД (D)
5. Закончить работу	СТОП
6. Найти остаток r от деления числа a на число b	П6: $R :=$ ОСТАТОК (A, B)
7. Значение числа a сделать равным значению числа b	$A := B$
8. Значение числа b сделать равным значению числа r	$B := R$
9. Перейти на пункт 2	**на** П2

Таблица 2

Словесная запись	Программа
6.1. Найти частное s от деления числа a на число b	П6: $S := A/B$
6.2. Найти число q, являющееся целой частью числа s	$Q :=$ EN TIER (S)
6.3. Найти остаток r от деления числа a на число b	$R := A - Q \times B$

Легко увидеть, что пункт 6 в левой части табл. 1 и, разумеется, в правой тоже требует уточнения. Это уточнение приведено в табл. 2. Если его внести в правую часть табл. 1, то полученная запись алгоритма будет вполне понятна вычислительной машине, снабженной транслятором, т.е. как бы переводчиком, с соответствующего языка программирования.

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издавна художники изображали на картинах *перспективу* при помощи линий, пересекающихся на горизонте. Один из замечательных этапов в истории геометрии начался, когда французский математик и архитектор Ж. Дезарг (1593–1662) решил придать этим представлениям художников точный математический смысл. Он предложил добавить к обычным конечным точкам плоскости еще дополнительные бесконечно удаленные точки, в которых пересекаются параллельные прямые. Бесконечно удаленные точки называли несобственными или идеальными, чтобы подчеркнуть их отличие от настоящих точек. Но дальше Дезарг призывал как можно быстрее забыть об этом различии, утверждая, что только тогда может быть польза от рассмотрения бесконечно удаленных точек.

Сколько бесконечно удаленных точек нужно добавить к плоскости? Естественно было бы считать, что все параллельные друг другу прямые пересекаются в одной бесконечно удаленной точке, которую и нужно добавить к точкам этих прямых. Важно было догадаться, что все эти точки для разных направлений прямых заполнят одну бесконечно удаленную прямую, которой на картинах художников служит линия горизонта. Полученная в результате плоскость называется расширенной или проективной.

В евклидовой геометрии взаимное положение точек и прямых регулируется двумя утверждениями: через две различные точки проходит единственная прямая, а две различные прямые или пересекаются в единственной точке, или параллельны. На расширенной плоскости эти утверждения становятся проще, поскольку любые две прямые там пересекаются, при этом различные свойства параллельных прямых превращаются в частные случаи утверждений для пересекающихся прямых. Пусть, например, мы имеем две точки: одну – конечную A, а другую – бесконечно удаленную B. Для задания B достаточно указать какую-нибудь прямую l, которой принадлежит B (все параллельные прямые пересекаются в B). Тогда утверждение о том, что через A и B проходит, и притом единственная, прямая, равносильно тому, что через точку A, не лежащую на l, проходит единственная прямая, параллельная l. Рассмотрев еще несколько подобных ситуаций, нетрудно убедиться, что очень удобно считать параллельность частным случаем пересечения.

В этих рассуждениях мы решительно разделяли конечные и бесконечно удаленные точки. Чтобы стереть эти различия, Дезарг предлагает рассуждать следующим образом. Различные плоскости в трехмерном пространстве воспринимаются как образы одной и той же плоскости, а картинки на этих плоскостях сравниваются при помощи центрального проектирования. А именно, фиксируется точка O в пространстве (рис. 1); точки A на плоскости α и A' на плоскости β считаются соответствующими друг другу (изображениями одной и той же точки на разных «картинах»),

«Основная идея этой чистой геометрии родилось из желания художников Возрождения создать «зрительную» геометрию. Как выглядят предметы в действительности и как их можно изобразить в плоскости чертежа?».

С. Г. Гульд



если A и A' лежат на одной прямой, проходящей через O. Так что если на α имеется некоторая фигура Г, то ее точки соединяются с O прямыми, а из пересечений этих прямых с плоскостью β собирается фигура Γ^1 на β, соответствующая Г (Γ^1 называется центральной проекцией на β из точки O фигуры Г). Такого рода преобразования фигур уже возникали раньше при построении изображений.

Присмотритесь более внимательно к возникающему преобразованию. Может случиться так, что прямая, соединяющая точку O с точкой A, будет параллельна плоскости β и в результате точка A' на плоскости β не будет соответствовать никакой точке. Дезарг предлагает считать, что образом A тогда является бесконечно удаленная точка на β (образ «ушел на бесконечность»). Если провести через O плоскость, параллельную β, то в пересечении с α получится прямая l, которой в силу сказанного естественно поставить в соответствие на плоскости β бесконечно удаленную прямую. Если же, напротив, провести через точку O плоскость, параллельную α, то при пересечении с β получится прямая m, в точки которой при проектировании не будут переходить никакие конечные точки плоскости α, и принимается, что в m переходит бесконечно удаленная прямая плоскости α. Итак, по Дезаргу, одни и те же фигуры по-разному изображаются на разных плоскостях в пространстве. В частности, одна и та же прямая на одной плоскости предстанет перед нами как бесконечно удаленная, а на другой – как конечная. Поэтому если мы не хотим, чтобы точки на одних картинах исчезали, а на других возникали из ничего, то мы должны рассматривать расширенную (проективную) плоскость.

Для того чтобы сделать эту точку зрения рабочей, надо выяснить, насколько же различаются изображения одних и тех же объектов. Ясно, что искажение при центральном проектировании весьма велико, но присущи ли различным изображениям хоть какие-то общие черты? Прежде всего сохраняется прямолинейность: прямые переходят в прямые, пересекающиеся прямые – в пересекающиеся (параллельность – частный случай!). Обратите внимание на то, сколько исключений пришлось бы оговорить уже здесь, не введи мы бесконечно удаленных элементов.

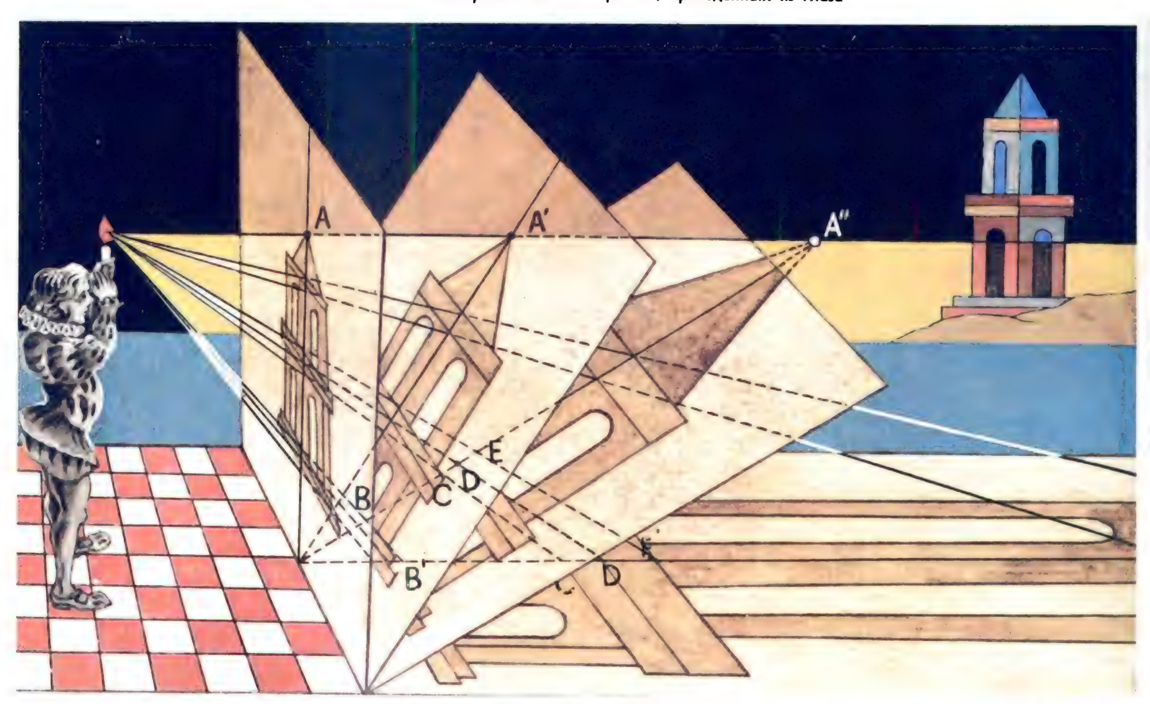
Замечательная догадка Дезарга заключалась в том, что имеются содержательные геометрические утверждения, в которых речь идет лишь о пересечениях прямых. Теорема, приведенная ниже, носит его имя. Пусть для треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ прямые (рис. 2), соединяющие вершины, A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 пересекаются в одной точке E. Тогда точки M, N, P пересечения соответствующих сторон (A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2) лежат на одной прямой. Верна и обратная теорема. Самое известное сегодня доказательство теоремы Дезарга очень красиво и связано с переходом к ее пространственному варианту. Весьма поучителен и другой способ рассуждения. Поскольку в теореме речь идет лишь о взаимном положении точек

«Художнику необходима математика его искусства. Учение о перспективе — это и вожатый, и врата; без него ничего хорошего в живописи создать невозможно».

Леонардо да Винчи

Внизу.
«Рисунок предмета — это сечение конуса, состоящего из прямых, проведенных из глаза художника к различным точкам изображаемого предмета».

С. Г. Гульд



и прямых, сохраняющихся при центральном проектировании, из справедливости теоремы в одной картине следует ее справедливость в любой другой. Другими словами, можно сделать центральную проекцию так, чтобы ситуация стала особенно простой. Например, если сделать точки M, N бесконечно удаленными (соответствующие стороны будут параллельны), то получится элементарное утверждение, которое легко доказать, пользуясь подобием треугольников. Общий случай будет получаться автоматически!

Следует заметить, что в проективной геометрии понятие треугольника нуждается в уточнении. Собственно говоря, надо прежде всего уточнить понятие отрезка. Проективную прямую следует себе мыслить как замыкающуюся через свою бесконечно удаленную точку, и пара точек определяет на прямой два отрезка (с точки зрения евклидовой геометрии, отрезок и его дополнение — пару лучей). Как всегда, проверка правильности определения производится при помощи центральной проекции. Ясно, что если точки A, B переходят в A', B' и какая-то точка отрезка AB уходит при проектировании на бесконечность, то AB переходит при проектировании во внешность отрезка $A'B'$, т. е. действительно, в проективной геометрии отрезки и их внешности нельзя различать. Соответственно три точки A, B,



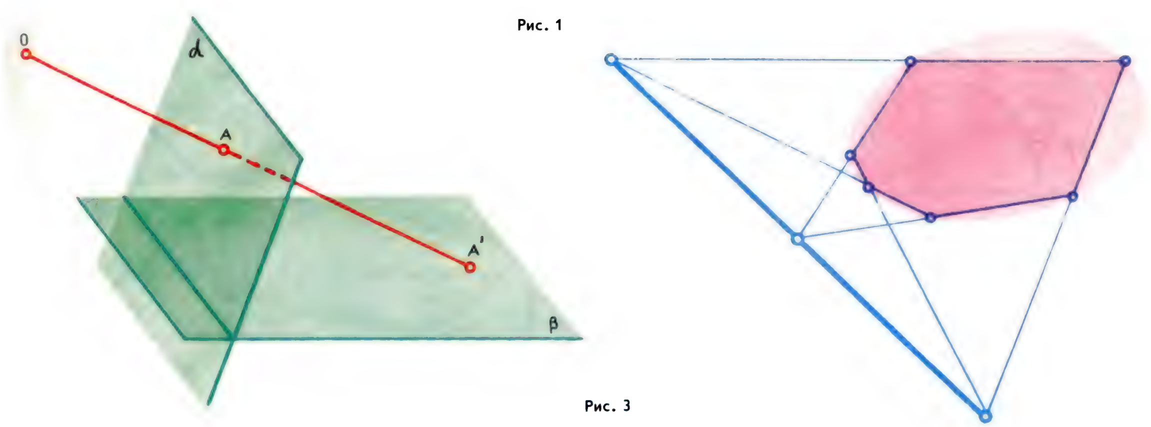


Рис. 1

Рис. 3

С на проективной плоскости (не лежащие на одной прямой) определяют 4 треугольника. Впрочем, для теоремы Дезарга это несущественно, так как в ней фактически фигурируют лишь вершины и прямые, на которых лежат стороны.

Мы обсудили ситуацию с взаимным положением точек и прямых в проективной геометрии. А как обстоит дело с другими фигурами? Например, окружность при центральном проектировании, хотя и не остается окружностью, все же не искажается «бесконтрольно»: она всегда изображается *коническим сечением* (эллипсом, гиперболой или параболой). Проективная геометрия открыла новую эпоху в изучении конических сечений. Одну из первых теорем в этом направлении доказал Б. Паскаль (1623–1662) в возрасте 16 лет: три точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой (рис. 3). Заметим, что центральная проекция позволяет свести случай произвольного конического сечения к случаю окружности.

О замечательных работах Ж. Дезарга и Б. Паскаля забыли на полтора века. Новая жизнь проективной геометрии началась с работ французских математиков Г. Монжа (1746–1818) и его ученика Ж. Понселе (1788–1867). Последний задумался над вопросом, почему эллипсы обычно пересекаются в четырех точках, а окружности – только в двух. Он обнаружил, что мы не замечаем двух других точек пересечения в случае окружностей, поскольку они являются не только бесконечно удаленными, но и мнимыми. Таким образом в геометрии появились комплексные числа.

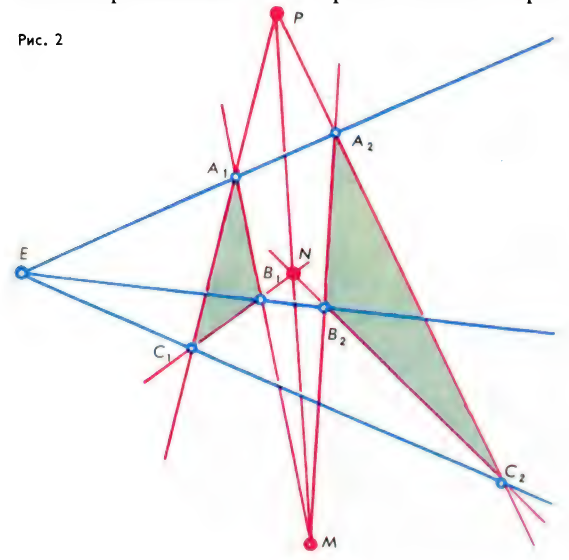


Рис. 2

Дальнейшее развитие проективной геометрии состояло в том, что геометры находили соотношения, не изменяющиеся при центральном проектировании. Очень непросто было обнаружить числовые соотношения, обладающие этим свойством, ведь расстояния изменяются существенно. Оказывается, что если взять четыре точки B, C, D, E на одной прямой (верхний рисунок на стр. 255) и составить так называемое сложное, или двойное отношение четырех точек $BD \cdot DE/CD \cdot BE$, то оно не будет изменяться при центральных проектированиях и их композициях – проективных преобразованиях (см. *Геометрические преобразования*). Не нужно опасаться, что некоторые из приведенных здесь расстояний могут принимать бесконечные значения: если бесконечность есть в числителе, то она есть и в знаменателе, и нужно условиться формально сокращать их. Двойное отношение четырех точек A, B, C, D равно величине

$$\frac{\sin \angle AOC \cdot \sin \angle BOD}{\sin \angle BOC \cdot \sin \angle AOD},$$

которая называется двойным отношением четырех прямых OA, OB, OC, OD, проходящих через одну точку O (оно также сохраняется при проективных преобразованиях).

Для каждого понятия и утверждения проективной геометрии, в котором участвуют точки, прямые, а также конические сечения, можно построить двойственное утверждение, в котором роль точек будут играть прямые и наоборот, а принадлежность точек прямым сохраняется; при этом множеству точек кони-

Рис. 4

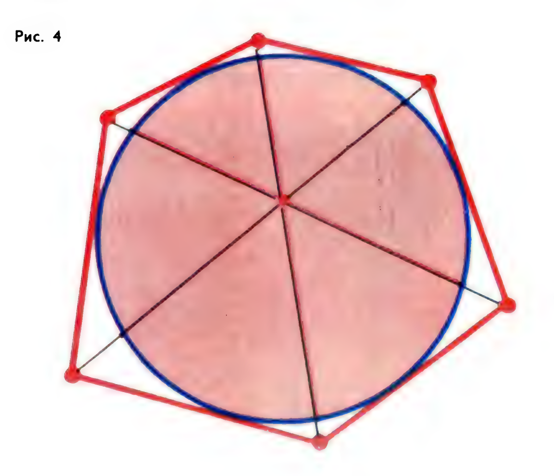
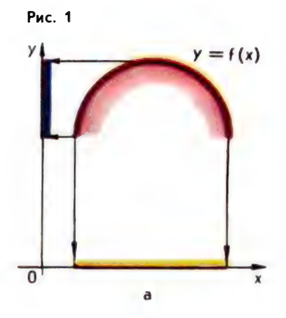
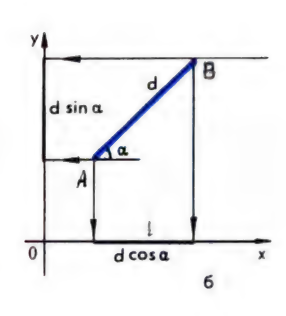


Рис. 1





ческого сечения будет двойственно множество всех касательных к коническому сечению прямых. Например, теореме Паскаля (рис. 3) двойственна такая теорема Брианшона (рис. 4): три прямые, соединяющие вершины шестиугольника, описанного вокруг конического сечения, пересекаются в одной точке. Конфигурация Дезарга из 10 точек и 10 прямых (рис. 2) двойственна самой себе.

Обобщения понятия проективной плоскости – конечные проективные плоскости, *n*-мерные (вещественные и комплексные) проективные пространства – в наши дни широко применяются в различных разделах математики и ее приложениях – комбинаторике, теории алгебраических кривых и поверхностей.

ПРОЕКЦИЯ

Проекцию фигуры (или тела) в пространстве можно представить себе как тень, отбрасываемую этой фигурой. За этим наглядным образом стоит несколько различных понятий: прямоугольная, или ортогональная, проекция, параллельная проекция, центральная проекция и др. Эти понятия широко используются в геометрии и других разделах математики, черчении, архитектуре и изобразительном искусстве, технике, географии, физике и астрономии. Не случайно и слово «проекция» и слово «проект» происходят от латинского слова *projectio* – «бросание вперед». Составляя описание будущего здания, сооружения, механизма – его проект, чертят план или общий вид – проекцию.

Определения разных видов проекций совпадают в одном: проекция фигуры – это множество проекций всех отдельных точек фигуры; при этом, конечно, разные точки могут проектироваться в одну.

В школьном курсе математики и в техническом черчении мы прежде всего встречаемся с прямоугольной проекцией. Пусть на плоскости задана прямая l. Проекцией точки M на прямую l называется основание M' перпендикуляра MM', проведенного из M к этой прямой. Например, проекцией круга на прямую в его плоскости будет всегда отрезок, равный по длине диаметру этого круга. Проекция на ось Ox точки (x, y) – это точка с координатой x; таким образом, проекцией графика функции $y = f(x)$ на ось Ox служит область определения этой функции на ось Oy – множество ее значений (рис. 1, *а*). Проекция отрезка AB на ось Ox – отрезок длины $AB \cdot \cos\alpha$, а на оси Oy – отрезок длины $AB\ \sin\alpha$, где α – величина угла между прямой AB и осью Ox (рис. 1, *б*).

Аналогично определяется прямоугольная (ортогональная) проекция в пространстве: проекция точки M на плоскость p – основание M' перпендикуляра $MM' \perp p$. Площадь плоской фигуры при проектировании умножается

Рис. 2

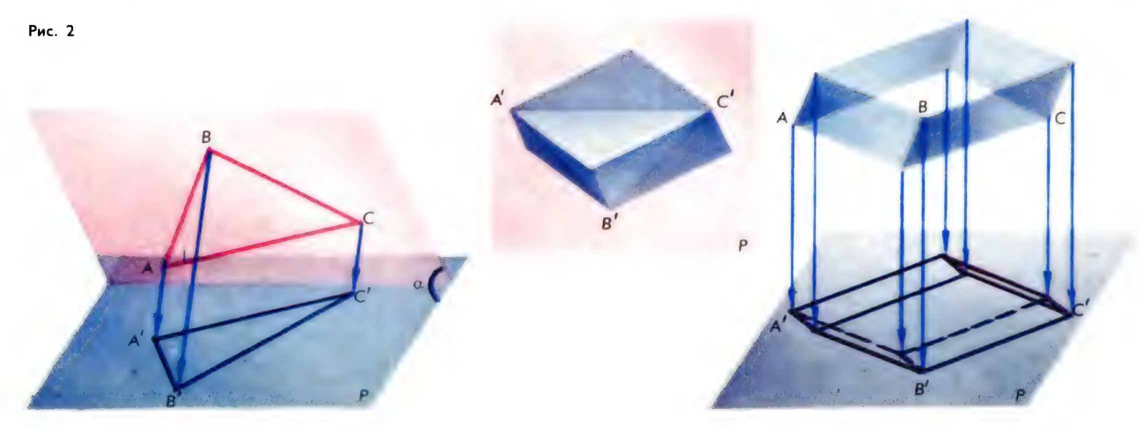


Рис. 3

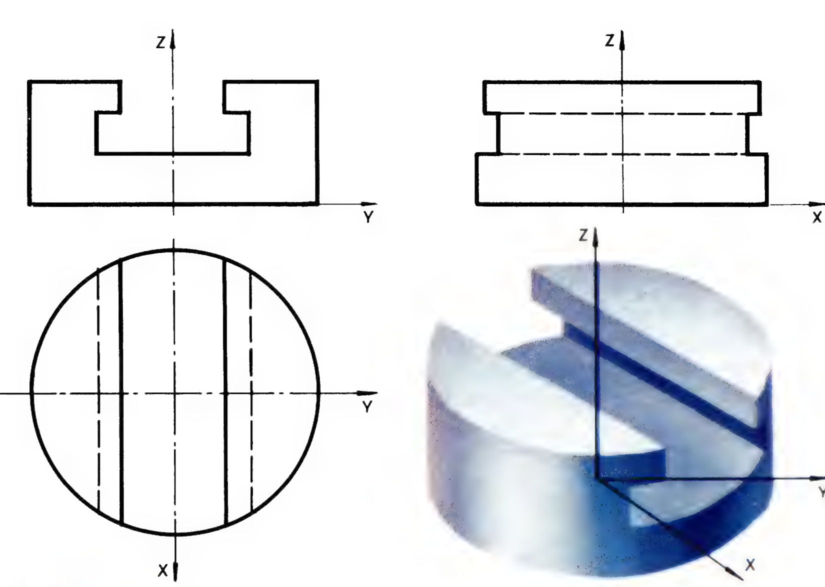
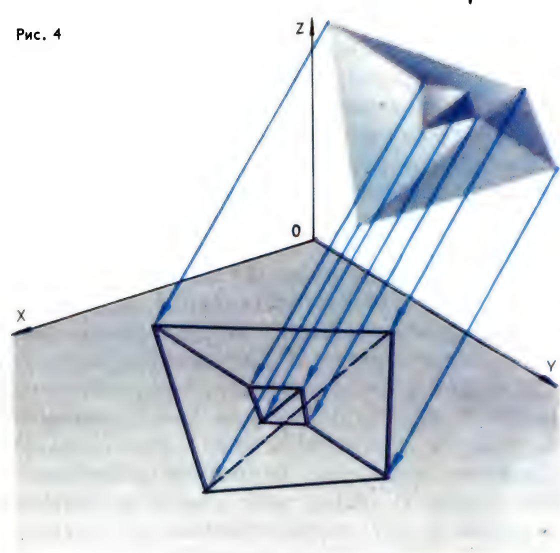


Рис. 4



на $\cos\alpha$, где α – величина угла между плоскостью фигуры и плоскостью ее проекции. Проекцией параллелепипеда на плоскость будет в общем случае шестиугольник (составленный из трех параллелограммов – проекций трех граней); в частном случае он может выродиться в параллелограмм. В одной из задач Московской математической олимпиады школьников спрашивалось: при каком положении прямоугольного параллелепипеда площадь его проекции на горизонтальную плоскость будет наибольшей? Для ее решения (рис. 2) достаточно сравнить площадь проекции S' с площадью треугольника $A'B'C'$, являющегося проекцией сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через три несмежные вершины A, B, C: $S' = 2S_{A'B'C'}$ и $S_{A'B'C'} \leqslant S_{ABC}$, причем равенство достигается тогда, когда плоскость ABC горизонтальна;

Рис. 5





в этом положении площадь S' и будет наибольшей.

Наряду с проекцией на плоскость можно говорить также о проекции на прямую l в пространстве. Ортогональная проекция точки M на прямую l – это точка M' пересечения l с плоскостью, проходящей через M и перпендикулярной l; например, проекция точки (x, y, z) пространства $Oxyz$ на ось Oz – это точка на оси Oz с координатой z, а ее проекция на плоскость Oxy – точка с координатами (x, y). Аналогичная связь имеется между координатами вектора и координатами его проекций.

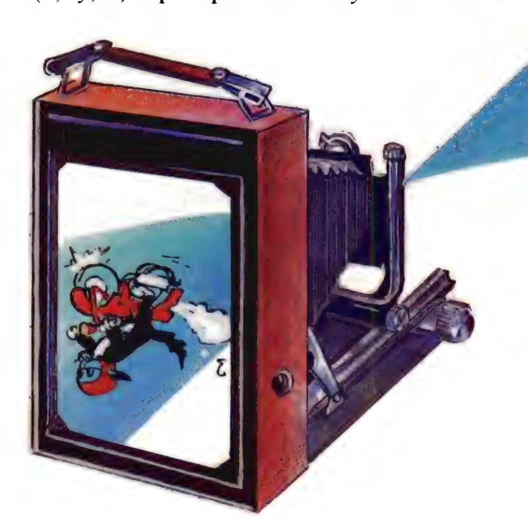


Рис. 6

Прямоугольную проекцию тела на горизонтальную плоскость можно сравнить с его тенью от солнца, находящегося в зените. Если же солнце склоняется к горизонту, тень удлиняется. Эта тень и будет наклонной или параллельной проекцией на горизонтальную плоскость p по направлению α (α – прямая, задающая направление солнечных лучей); проекцией точки M при параллельной проекции по направлению α называется точка пересечения плоскости p с прямой, проходящей через M и параллельной α.

В технических чертежах часто приводят три проекции детали на взаимно ортогональные плоскости Ozy, Oyx, Oxz (рис. 3): вид спереди (анфас), вид сверху (план) и вид сбоку (профиль). Но для большей наглядности рядом помещают еще аксонометрическое изображение детали – ее параллельную проекцию на некоторую «наклонную» плоскость вместе с проекциями на эту плоскость трех осей Ox, Oy, Oz. Конечно, одна аксонометрическая проекция еще не задает формы тела и его расположения по отношению к осям координат, поэтому часто вместе с ней чертят также вторичную проекцию: аксонометрическое изображение одной из проекций тела и основных проецирующих лучей (на рис. 4 показана аксонометрия тела и его проекция на плоскость Oxy).

При параллельной проекции, (разумеется, как и при ортогональной) искажаются углы между прямыми, но выполняются такие условия: (1) параллельные прямые переходят в параллельные прямые; (2) сохраняются отношения длин параллельных отрезков (и отрезков одной прямой); (3) площади фигур, расположенных в одной плоскости, уменьшаются в одном и том же отношении. Пользуясь свойствами (1), (2) и зная проекции четырех точек A, B, C, O в пространстве, не лежащих в одной плоскости (или, что то же самое, зная проекции трех непараллельных одной плоскости векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$), можно построить проекцию любой другой точки. При этом проекции A', B', C', O' могут занимать произвольные положения: для любого тетраэдра и любых четырех точек плоскости A', B', C', O' можно расположить в пространстве тетраэдр $ABCO$, подобный данному, вершины которого проецируются как раз в точки A', B', C', O'.

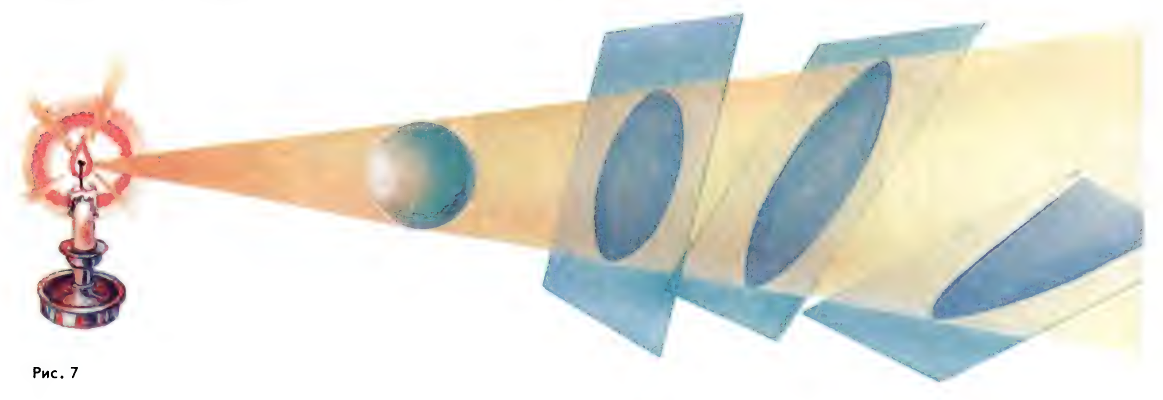


Рис. 7

Этот факт называется теоремой Польке–Шварца, по именам немецких математиков К. Польке и Г. Шварца, доказавших ее в середине XIX в.

Параллельная проекция плоскости на другую плоскость определяется образами O', A', B' трех точек O, A, B (двух векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$); точка M, для которой $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, переходит в точку M', для которой $\overrightarrow{O'M'} = x\overrightarrow{O'A'} + y\overrightarrow{O'B'}$. Свойства (1), (2), (3) показывают, что такая проекция – аффинное отображение одной плоскости на другую (и любое аффинное преобразование можно получить как композицию параллельных проекций (см. *Геометрические преобразования*).

Но свойства (1)–(3) уже не будут выполняться для центральной проекции. Центральной проекцией точки M с центром S на плоскость p называется точка M' пересечения прямой MS с плоскостью p. С этим видом проекции мы также сталкиваемся на каждом шагу. Тень от лампы, которую отбрасывает предмет на стену (рис. 5),– пример, когда фигура расположена между центром S и плоскостью проекции. Изображение в фотоаппарате (с некоторым приближением) – центральная проекция, центр которой расположен между предметом и плоскостью проекций p (изображение здесь получается перевернутым, рис. 6). Центральная проекция (ее также называют «линейная *перспектива*») играет большую роль и в изобразительном искусстве: скажем, рисуя на картине тень человека, отбрасываемую на асфальт от уличного фонаря, мы имеем дело с композицией двух центральных проекций: одна – проекция человека с центром в лампочке фонаря на плоскость тротуара, вторая – проекция тени с центром в глазу художника на плоскость холста. Тут может спасти от ошибки лишь одно главное свойство центральной проекции: любую прямую она переводит в прямую. Изображением окружности при центральной проекции может быть не только *эллипс* (как при ортогональной или параллельной проекции), но также *парабола* или *гипербола* (рис. 7). Свойства фигур, сохраняющиеся при центральном проектировании,– предмет изучения *проективной геометрии*.

ПРОПОРЦИЯ

Пропорцией называют равенство отношений двух или нескольких пар чисел или величин. Например, размеры модели машины или сооружения отличаются от размеров оригинала одним и тем же множителем, задающим масштаб модели. Поэтому если выбрать на оригинале четыре точки A, B, C и D и обозначить через A', B', C', D' соответствующие точки на модели, то будет выполняться равенство $A'B'/AB = C'D'/CD$ (оба отношения равны масштабу). Такое равенство двух отношений и будет пропорцией. Справедлива и другая пропорция $AB/CD = A'B'/C'D'$, которая показывает, что отношения расстояний точек оригинала такие же, как и отношения расстояний соответствующих точек модели.

В древности в неявной форме идеей пропорциональности пользовались при решении задач методом ложного положения: давали искомой величине произвольное значение, вычисляли, какое значение должна при этом иметь одна из данных величин, и сравнивали с условием задачи. Отношение величин давало коэффициент, на который надо умножить выбранное значение, чтобы получить правильный ответ.

Систематически пропорции начали изучать в Древней Греции. Сначала рассматривали лишь пропорции, составленные из натуральных чисел, и поэтому считали, что числа a, b, c, d образуют пропорцию, если a является тем же кратным (той же долей или той же дробью) от b, что и c от d. В этот период не различали пропорции, составленные из величин, и пропорции, составленные из чисел. Открытие несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны заставило рассматривать такие пропорции как разные объекты. В IV в. до н. э. древнегреческий математик Евдокс дал определение пропорции, составленной из величин любой природы.

Древнегреческие математики превратили пропорции в весьма гибкий аппарат исследования. С их помощью решали задачи, которые в наши дни решают с помощью уравнений, а место алгебраических преобразований занял переход от одной пропорции к другой. Например, было известно, что если справедлива пропорция $a/b = c/d$, то справедливы и следующие производные пропорции:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\quad (\text{при } a>b),$$

$$\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

и многие иные.

Роль теории пропорций заметно уменьшилась после того, как было осознано, что отношение величин является числом (быть может, иррациональным), а потому пропорция – это просто равенство чисел. Это позволило применять вместо пропорции уравнения, а вместо преобразования пропорций – алгебраические преобразования.

ПРОСТОЕ ЧИСЛО

Натуральные числа, отличные от единицы, подразделяют на простые и составные. Простым называется такое натуральное число, делителями которого являются только оно само и *единица*. Остальные числа называются составными. Евклид определял простые числа так: «Простое число есть измеряемое только единицей, составное число есть измеряемое некоторым числом». Примеры простых чисел: 2, 5, 37, 1987. Числа же 4, 6, 162, 2553 составные. Число 1 не относят ни к простым, ни к составным. Простых чисел, так же как и составных, бесконечно много.

Каждое составное натуральное число можно разложить на простые множители. Например: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $162 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $2553 = 3 \cdot 23 \cdot 37$. Можно сказать, что простые числа представляют собой как бы элементарные кирпичики, из которых строятся остальные числа.

«Основная теорема арифметики» утверждает, что любые два разложения данного натурального числа на простые множители одинаковы, если не обращать внимание на порядок следования сомножителей.

Для того чтобы доказать, что данное натуральное число N простое, достаточно установить, что оно не делится ни на одно из чисел от 2 до $\sqrt{N}$. Если же N делится на одно из таких чисел, то N составное.

Более удобный способ «отсеивания» составных чисел основан на следующем наблюдении. Если выписать подряд последовательные натуральные числа, то, зачеркивая каждое второе число из следующих за числом 2, мы отсеем все числа, кратные числу 2; зачеркивая каждое третье число из следующих за числом 3, мы отсеем все числа, кратные 3, и, вообще, какое бы натуральное число k мы ни взяли, зачеркивая каждое k-е число из стоящих за k, мы отсеем все числа, кратные k. Поэтому если нам нужно отыскать все простые числа, не превосходящие данного числа N, то выпишем подряд все числа от 2 до N. Отметим число 2 как первое простое. Затем по способу «отсеивания» отбросим все числа, кратные 2; первое невычеркнутое число – это следующее простое число 3. Отбросим все числа, кратные 3; первое невычеркнутое число – это следующее простое число 5 и т.д. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не доберемся до простого числа, которое больше $\sqrt{N}$. Все оставшиеся невычеркнутыми числа будут простыми.

Такой способ отыскания простых чисел был известен еще греческому математику Эратосфену, жившему в III в. до н.э. Во времена Эратосфена писали на восковых дощечках, а вместо того чтобы числа вычеркивать, дощечку в нужном месте прокалывали. Отсюда и название способа – «решето Эратосфена».

В разные времена математики искали формулу, которая при различных значениях входящих в нее переменных давала бы простые числа. Так, Л. *Эйлер* указал многочлен $n^2 - n + 41$, значения которого при $n = 0, 1, 2, \ldots, 40$ – простые числа. Однако легко доказать, что нет многочлена от одной переменной, который при всех целых ее значениях принимает простые значения. П. *Ферма* высказал предположение, что все числа вида $2^{2^k} + 1$ простые (при $k = 0, 1, 2, 3, 4$ это числа 3, 5, 17, 257, 65537). Однако Л. Эйлер опроверг это предположение, доказав, что при $k = 5$ число $2^{2^k} + 1$ составное. Все же известны формулы, принимающие при всех целых значениях переменных простые значения. Так, советский математик Ю. В. Матиясевич доказал, что существует многочлен от нескольких переменных, который принимает все простые значения по одному разу, причем все положительные его значения – простые числа.

Издавна математиков интересовал вопрос о распределении простых чисел в натуральном ряду.

Рассуждение Евклида, доказывающее бесконечность числа простых чисел в натуральном ряду (см. *Евклида алгоритм*), применимо и для доказательства бесконечности числа простых чисел некоторого специального вида, например простых чисел вида $4n - 1$. Чуть видоизменяя это рассуждение, можно получить доказательство бесконечности количества простых чисел вида $4n + 1$, $6n + 1$ и некоторых других.

В 1837 г. немецкому математику Л. Дирихле удалось доказать, что в любой *арифметической прогрессии*, первый член и разность которой взаимно просты, есть бесконечно много простых чисел. В доказательстве Дирихле были использованы новые для теории чисел методы (функции комплексного переменного, ряды), открывшие совершенно новые пути для ее развития. О простых числах более сложного вида известно мало. Так, до сих пор неизвестно, конечно или бесконечно число простых чисел вида $n^2 + 1$ или же простых чисел вида $2^n - 1$ (эти последние называются простыми числами Мерсенна). Наибольшее из известных простых чисел является простым числом Мерсенна и равно $2^{132049} - 1$.

Вопрос о том, как часто простые числа встречаются в натуральном ряду и как они распределены среди натуральных чисел, оказался очень сложным. Изучение таблиц простых чисел показывает, что в натуральном ряду есть участки, где простые числа располагаются гуще. Есть даже числа, которые находятся совсем близко друг от друга, как, например, 2 и 3, 3 и 5, 191 и 193, 2711 и 2713. Такие пары чисел называются близнецами.

До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно число пар близнецов. Но есть и сколь угодно длинные отрезки натурального ряда, в которых нет ни одного простого числа. Например, среди последовательных чисел $k!+2$, $k!+3$, ..., $k!+k$ нет ни одного простого.

Важными характеристиками расположения простых чисел в натуральном ряду служат величины: $\pi(n)$ – число простых чисел, не превосходящих n, и отношение $\pi(n)/n$ – средняя плотность простых чисел среди первых n натуральных. Изучение таблиц простых чисел показало, что, двигаясь по натуральному ряду, мы будем встречать простые числа в среднем все реже. Эйлер обосновал это наблюдение, доказав, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n}=0.$$

Отсюда, в частности, следует, что простые числа в среднем располагаются реже, чем члены какой угодно арифметической прогрессии. Можно доказать, что простые числа располагаются все же гуще квадратов натуральных чисел.

Но все эти результаты очень мало говорят о самом числе $\pi(n)$. Математикам хотелось получить для $\pi(n)$ какую-нибудь достаточно простую приближенную формулу. Первая гипотеза о величине $\pi(n)$ была сделана независимо французским математиком А. Лежандром и К. *Гауссом* около 1800 г. Она заключалась в том, что $\pi(n)\approx n/\ln n$. Однако доказать это утверждение удалось лишь 100 лет спустя.

Большой вклад в разработку этого доказательства внес П. Л. *Чебышев*, а окончательный результат был получен в 1896 г. французским математиком Ж. Адамаром и бельгийским математиком Ш. Валле-Пуссеном. Кроме того, в 1852 г. Чебышев доказал предположение французского математика Ж. Бертрана о том, что для любого натурального числа n между числами n и $2n$ всегда есть простое число.

ПРОЦЕНТ

Процентом называется сотая доля числа. Для чего нужны проценты и почему для этого введен специальный термин?

Прежде чем ответить на эти вопросы, попробуем ответить на другой: много ли соли в морской воде? Конечно, можно налить в ведро морскую воду, поставить его на огонь и, подождав, пока вся вода испарится, собрать и взвесить оставшуюся соль. Можно ли утверждать, что у другого человека получится столько же? Видимо, нет. Его ведро может оказаться больше или меньше, оно может быть налито более или менее полно; в результате получится другое количество соли. Таким образом, наша мера солености морской воды (количество граммов соли на ведро воды) оказалась неудачной.

Возьмем другую меру – количество граммов соли на 1 кг раствора. Для этого нужно до кипячения взвесить раствор, а потом массу полученной соли разделить на массу раствора. Пусть масса раствора 8,4 кг, а масса соли 21 г. Тогда получаем ответ: 2,5 г соли на 1 кг раствора. Если опыт повторить, то получится почти такая же величина.

Но почему число граммов в килограмме, а не центнеров в тонне или английских фунтов в пуде? Давайте считать число граммов в грамме, тогда тот же ответ получится, если считать число тонн в тонне или число пудов в пуде. При этом удобно записывать результат в виде десятичной дроби, поскольку десятичные дроби удобнее сравнивать между собой по величине.

Но с какой точностью находить отношение? С помощью карандаша и бумаги мы можем делить до миллионных долей, однако точность первоначальных чисел зависит от точности приборов, с которых они были получены: весов, вольтметров, спидометров и т. д. Как правило, верными можно считать лишь первые две цифры показаний этих приборов. В результате будем получать 0,27, 0,64, 0,37 и другие сотые доли числа, т. е. проценты. Была придумана и специальная запись – 27%, 64%, 37%.

Проценты были известны индийцам еще в V в. Это закономерно, так как в Индии с давних пор счет велся в десятичной *системе счисления*. В Европе десятичные дроби появились на тысячу лет позже, их ввел бельгийский ученый С. Стевин. В 1584 г. он впервые опубликовал таблицу процентов.

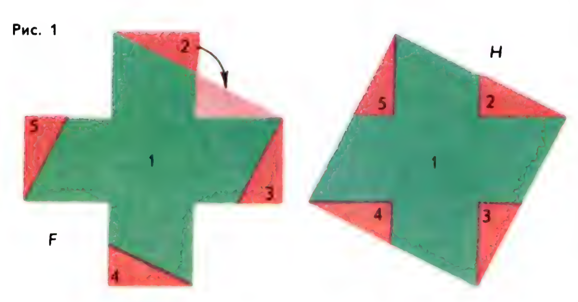
Введение процентов оказалось удобным не только для оценки содержания одного вещества в другом. В процентах стали измерять изменение производства товара, рост денежного дохода и т. д.

Со временем люди научились извлекать из вещества его компоненты, составляющие тысячные доли от массы самого вещества. Тогда, чтобы не вводить нуль и запятую, ввели новую величину – промилле – тысячную долю, которую обозначили знаком ‰ и вместо 0,6% стали писать 6‰. Однако эту величину постоянно применяют лишь в некоторых областях техники, а в большинстве случаев используют десятые и сотые доли процента. Так, содержание соли в морской воде составляет 0,25%, или 2,5‰.

РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ ФИГУРЫ

При вычислении площадей многоугольников используется простой прием, называемый методом разбиения. Рассмотрим многоугольники F и H, изображенные на рис. 1, где показано, как разбить эти многоугольники на одинаковое число соответственно равных частей (равные части отмечены одинаковыми цифрами). О многоугольниках F и H говорят, что они равносоставлены. Вообще, многоугольники A и B называются равносоставленными, если, определенным образом разрезав многоугольник A на конечное число

Рис. 1



частей, можно, располагая эти части иначе, составить из них многоугольник B. Легко видеть, что справедлива следующая теорема: равносоставленные многоугольники имеют одинаковую площадь, или, как говорят, равновелики. Например, параллелограмм равносоставлен с прямоугольником (рис. 2), и потому, зная формулу площади прямоугольника, находим, что площадь параллелограмма равна произведению длин его стороны и соответствующей высоты.

Этот пример иллюстрирует метод разбиения, состоящий в том, что для вычисления площади многоугольника пытаются разбить его на конечное число частей таким образом, чтобы из этих частей можно было составить более простой многоугольник, площадь которого нам уже известна. Например, треугольник равносоставлен с параллелограммом,

Рис. 2

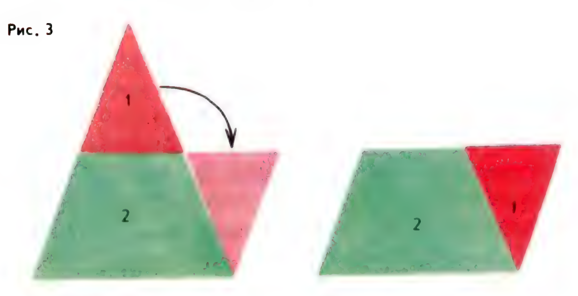


имеющим то же основание и вдвое меньшую высоту (рис. 3); из этого легко выводится формула площади треугольника. Этот способ вычисления площадей многоугольников был известен еще Евклиду, который жил более 2000 лет назад.

Замечательно, что для приведенной выше теоремы справедлива и обратная теорема: если два многоугольника равновелики, то они равносоставлены. Эту теорему, доказанную в первой половине XIX в. венгерским математиком Ф. Бойяи и немецким офицером и любителем математики П. Гервином, можно пояснить так: если имеется пряник в форме многоугольника и многоугольная коробка совершенно другой формы, но той же площади, то можно так разрезать пряник на конечное число кусков, что их удастся вложить в эту коробку.

В связи с теоремой Бойяи – Гервина возникает вопрос о наложении дополнительных ограничений на число или расположение частей, из которых составляются равновеликие многоугольники. Например, представим себе плоскость в виде листа цветной бумаги, у которого одна сторона красная, а другая – белая. Если из такой бумаги вырезаны два равновеликих красных многоугольника, то возникает вопрос, можно ли один из них разрезать на части, из которых удастся сложить красный многоугольник, равный второму. Части разрешается перекладывать, не переворачивая их на белую, изнаночную сторону. Ответ на этот вопрос также утвердителен.

Рис. 3



Вариант этой задачи был предложен на одной из московских математических олимпиад в следующей шуточной форме. Чудак-кондитер испек торт (а у торта, в отличие от пряника, верхняя сторона покрыта кремом) в форме разностороннего треугольника. Сделали и коробку к торту, но по недосмотру склеили ее неверно, так что торт и коробка оказались симметричными друг другу (рис. 4). Нужно (по возможности экономно) разрезать торт на части, которые удалось бы уложить в эту коробку. Разумеется, части торта нельзя укладывать кремом вниз.

Интересный результат, связанный с наложением дополнительных требований на расположение частей, был получен в 1952 г. швейцарскими математиками Г. Хадвигером

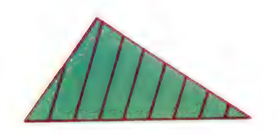

Рис. 4



и П. Глюром: равносоставленность двух равновеликих многоугольников может быть установлена при помощи таких разбиений, в которых соответствующие части имеют параллельные стороны. На первый взгляд это кажется даже неправдоподобным: трудно поверить, что два равных треугольника, повернутые друг относительно друга на произвольный угол (рис. 5), всегда можно разбить на равные части с соответственно параллельными сторонами. Тем не менее существует такое разбиение этих треугольников, что части, на которые разбит один треугольник, получаются из соответствующих частей второго треугольника параллельными переносами или центральными симметриями. То же справедливо для любых двух равновеликих многоугольников. Однако одними только параллельными переносами частей обойтись не удается. Например, как бы мы ни разрезали параллелограмм на части, невозможно параллельными переносами составить из этих частей треугольник.

Интерес к этим вопросам был пробужден знаменитым докладом «Математические проблемы», который был прочитан выдающимся математиком Д. *Гильбертом* на Втором Международном конгрессе математиков, состоявшемся на рубеже XIX и XX вв. Из двадцати трех поставленных Гильбертом проблем большинство относится к новым, быстро развивающимся разделам математики. И лишь одна проблема – третья – связана с вопросами школьной геометрии. Гильберт обращает внимание на то, что при вычислении объема треугольной пирамиды еще со времен Евклида используется довольно сложный предельный переход (см. *Предел*) (а в настоящее время – интегрирование), тогда как при вычислении площади треугольника мы обходимся без аналогичного предельного перехода. Существо проблемы Гильберта состоит в том, чтобы обосновать использование этого «лишнего» (по сравнению с планиметрией) предельного перехода, т.е. доказать, что без него теория объемов многогранников не может быть построена. В 1900 г. М. Ден решил третью проблему Гильберта, доказав, что правильный тетраэдр и равновеликий ему куб не равносоставлены. Гильберт предвидел, что этот вопрос может привести к созданию математически интересной и богатой результатами теории равносоставленности многоугольников и многогранников. Предвидение Гильберта блестяще оправдалось; красивое здание современной теории равносоставленности является достойным памятником ученому.

Рис. 5





РАДИКАЛ

Радикалом (или знаком корня) называют знак $\sqrt[n]{\ }$, применяемый для обозначения операции извлечения корня n-й степени из некоторого числа; корень n-й степени из числа a обозначается $\sqrt[n]{a}$. При $n=2$ показатель корня опускают и пишут $\sqrt{a}$ вместо $\sqrt[2]{a}$. Корень второй степени обычно называют квадратным корнем, а корень третьей степени – кубическим корнем.

При извлечении корня четной степени из неотрицательного (действительного) числа a запись $\sqrt[n]{a}$ обозначает арифметический корень из числа a (т.е. такое неотрицательное число b, что $b^n = a$). При извлечении корня из *комплексного числа* знак $\sqrt[n]{z}$ применяют для обозначения любого из n корней n-й степени из числа z или совокупности всех n корней.

Название «радикал» происходит от латинских слов *radix* – «корень», *radicalis* – «коренной». Начиная с XIII в. европейские математики обозначали корень этим словом, или, сокращенно, *r*. В 1525 г. в книге К. Рудольфа «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых Косс» появилось обозначение V для знака квадратного корня, корень кубический обозначался там как VVV В 1626 г. голландский математик А. Жирар ввел обозначение $\overset{2}{V}$, $\overset{3}{V}$ и т.д., которое стало быстро вытеснять знак *r*; при этом над подкоренным выражением ставилась горизонтальная черта. Тогда писали $V\overline{x+y}$ вместо современного $\sqrt{x+y}$. Современное обозначение корня впервые появилось в книге Р. *Декарта* «Геометрия», изданной в 1637 г.

Приближенное значение квадратных корней из целых чисел умели находить еще в Древнем Вавилоне около 4 тыс. лет назад. При этом вавилонские ученые пользовались следующим методом: число a представляли в виде суммы $b^2 + c$, где c мало по сравнению с b^2, и полагали $\sqrt{a} = b + c/2b$. Например:

$$\sqrt{1700} = \sqrt{1600 + 100} = \sqrt{40^2 + 100} =$$

$$= 40 + \frac{100}{2 \cdot 40} = 41\frac{1}{4}$$

(пример взят из вавилонской клинописной таблички). Для сравнения укажем более точное значение корня $\sqrt{1700} = 41{,}23105$. Заметим, что такой способ приближенного извлечения квадратного корня часто называют вавилонским методом извлечения квадратного корня.

РАЗВЕРТКА

Допустим, что *многогранник* – многогранную поверхность – после проведения разрезов по нескольким ребрам удается развернуть на плоскость. В результате получается развертка многогранника. Развертка представляет собой плоский многоугольник, составленный из меньших многоугольников – граней исходного многогранника. Так, на рис. 1 изображены развертки всех пяти видов правильных многогранников. По ним легко восстановить, склеить соответствующие многогранники; обычно на развертках указывают, какие именно пары сторон развертки нужно склеивать для получения исходного многогранника.

Один и тот же многогранник может иметь несколько разных разверток. Например, правильный тетраэдр имеет и треугольную развертку, которая даже более удобна для склейки тетраэдра: достаточно согнуть три угловых треугольника (рис. 2). Аналогичная развертка произвольного тетраэдра представляет собой в общем случае шестиугольник с попарно равными соседними сторонами (рис. 3).

Развертки (или части разверток) применяют при изготовлении моделей различных многогранников. Пример – склейка «треугольных» (правильнее говорить «тетраэдрических») молочных пакетов. Эти пакеты не являются правильными тетраэдрами: правильные тетраэдры плохо укладываются в молочные корзины. Молочные пакеты представляют собой равногранные тетраэдры с четырьмя ребрами примерно по 17 см и двумя ребрами по 13 см. Внимательно рассмотрев пакет, вы увидите, что он склеен из... прямоугольника, по-

Рис. 1

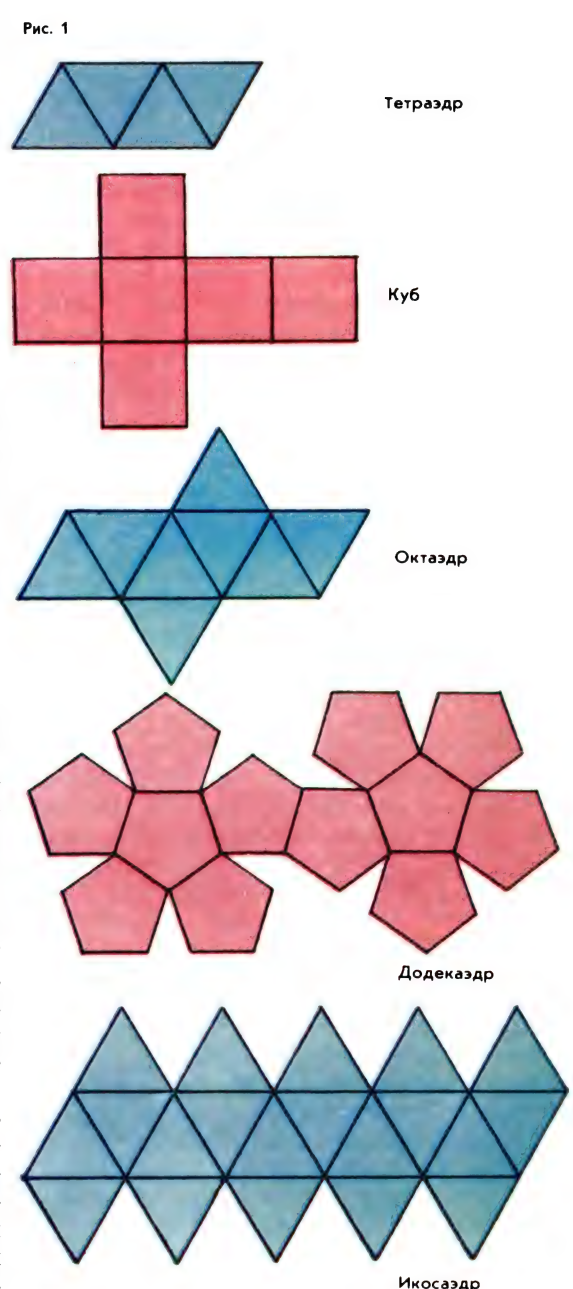
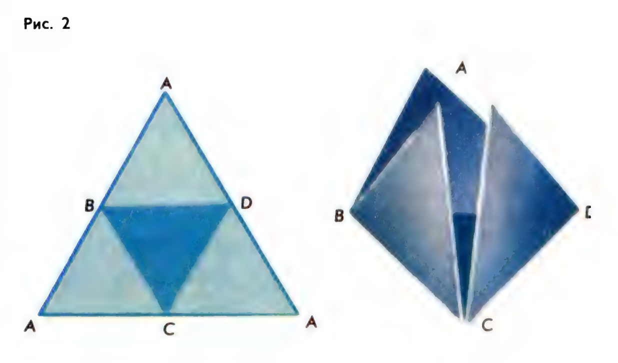


Рис. 2



«Он же, не смутясь нимало,
Развернул пазы и петли,
Стал вертеть их так и эдак,
Пока все вдруг не предстало
В виде плоскостей, квадратов,
Точно сложная фигура
Из Эвклидова трактата».

Л. Кэррол



Рис. 3

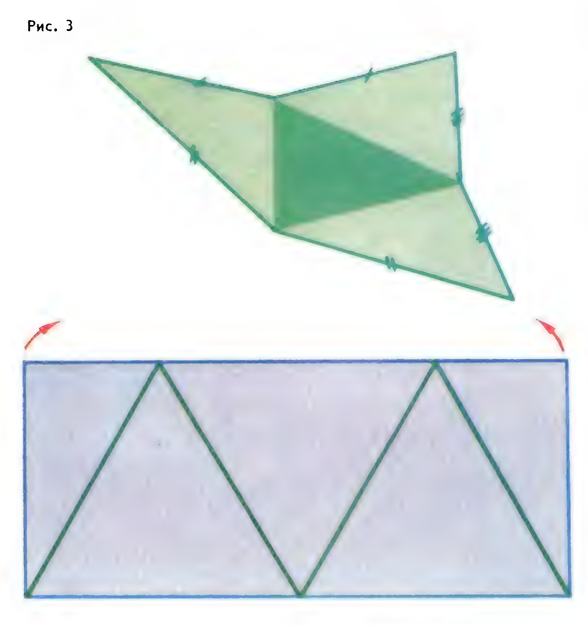
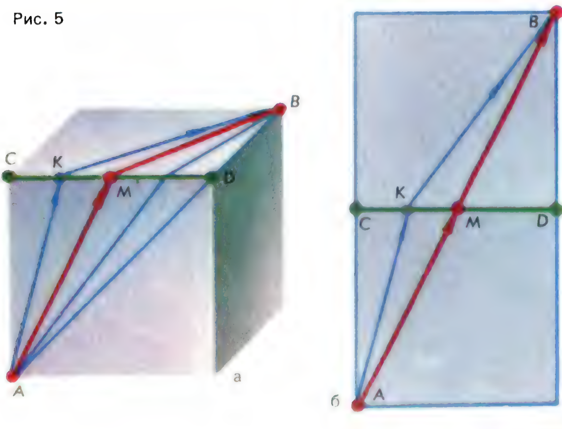


Рис. 5



лучающегося при разрезании тетраэдра по двум меньшим ребрам и большей высоте одной из граней. Легко представить обратную процедуру: как показано на рис. 4, сначала прямоугольник склеивается в цилиндр (точнее, в боковую поверхность цилиндра), а потом вдоль взаимно перпендикулярных диаметров оснований в тетраэдрический пакет. Конечно, технологически это осуществить проще, чем склейку пакета из треугольника,– не потребуется даже никаких клапанов для склейки.

Развертки помогают решать задачи на отыскание кратчайшего пути (по поверхности фигуры) из одной точки в другую. Например, чтобы из всех путей вида AKB, ведущих по поверхности куба из вершины A в противолежащую вершину B (рис. 5, *а*), выбрать кратчайший, достаточно развернуть две соседние грани и соединить точки A и B отрезком прямой (рис. 5, *б*). Кратчайший путь будет проходить через середину M ребра CD (всего таких путей будет 6 – по числу разделяющих точки A и B ребер куба). Обратите внимание: точно так же решается и задача о кратчайшем

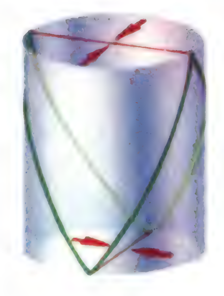
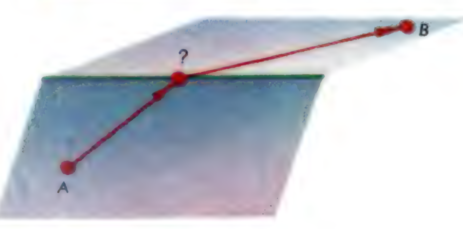




Рис. 4

«перевале» через ребро любого двугранного угла (рис. 6).

Рассматривая молочный пакет, мы видели, что цилиндрическую поверхность тоже можно развернуть на плоскость. Это верно и для поверхности конуса: разрезав ее по окружности основания и по одной из образующих, после разворачивания мы получим (касающиеся друг друга) круг и круговой сектор (рис. 7, *а*, *б*). Если кривая на поверхности не пересекает линии разреза, то ее длина при разворачивании не меняется. Поэтому и в случае цилиндра и конуса развертку можно применить для отыскания кратчайшего пути из точки A



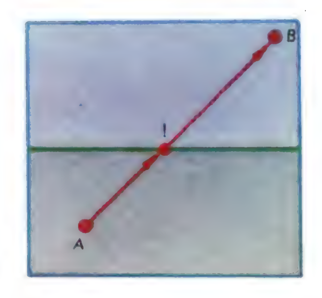


Рис. 6

в точку B, идущего по боковой поверхности конуса или цилиндра. Конечно, при этом следует позаботиться о выборе линии, по которой делать разрез, иначе можно получить не самый короткий путь, а лишь более короткий по сравнению с ближайшими путями (пунктир на рис. 7, *а*).

Развертки цилиндра и конуса можно использовать и для вычисления площадей их боковых поверхностей ($2\pi RH$ – для цилиндра и πRl – для конуса). Однако этот метод определения площадей далек от универсальности, ибо большинство искривленных поверхностей

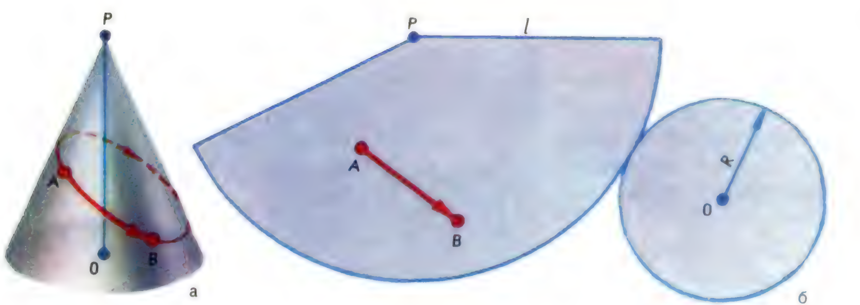


Рис. 7

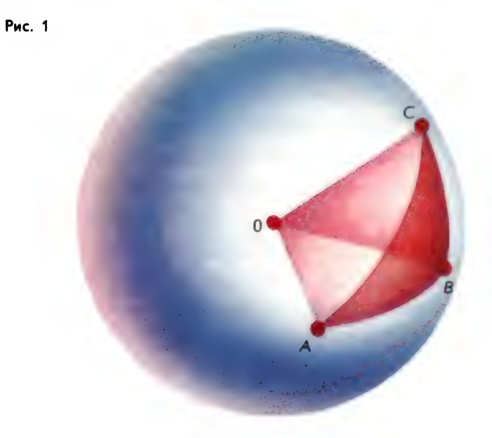
нельзя развернуть на плоскость с сохранением длин и площадей. С этим, в частности, связаны трудности при изготовлении покрышек для мячей.

РАССТОЯНИЕ

Расстоянием между двумя точками A и B плоскости (или пространства) называется длина отрезка AB; если выбрана единица измерения, то расстояние будет неотрицательным числом, которое обозначается так: $\rho(A,B)$, или $|AB|$, или просто AB. По определению $\rho(A,A)=0$.

В разнообразных математических ситуациях, да и в повседневной жизни мы часто оцениваем удаленность друг от друга двух объектов с помощью «расстояний», отличных от обычного. Скажем, расстоянием между точками A и B на глобусе естественно считать длину меньшей из двух дуг AB окружности большого круга (проходящего через точки A и B). Расстояние между A и B также характеризует минимальное время, за которое можно добраться из пункта A в пункт B. Если измерить расстояние между Новосибирском и Душанбе по глобусу (или посмотреть в справочник Аэрофлота), получится примерно 2100 км. В железнодорожном справочнике указано другое число: 3895 км. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояние по-разному.

Рис. 1



Для построения теории расстояния, применимой во многих разделах математики, оказывается достаточно выделить очень небольшое число основных свойств расстояния.

Пусть каждым двум элементам a, b множества X по некоторому правилу сопоставлено число $\rho(a,b)\geqslant 0$, при этом выполнены три условия:

1) $\rho(a,b)=0$ тогда и только тогда, когда $a=b$;
2) $\rho(a,b)=\rho(b,a)$ для любых двух a и b;
3) $\rho(a,c)\leqslant\rho(a,b)+\rho(b,c)$ для любых трех элементов a, b, c из X.

Множество X, снабженное такой функцией ρ, называется метрическим пространством. Свойство (3) для обычного расстояния на плоскости выражает тот факт, что длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон; это свойство называется неравенством треугольника. В конкретных примерах именно оно не очевидно и нуждается в проверке. Неравенство треугольника на сфере сводится к такой теореме: любой плоский угол COA трехгранного угла $ABCO$ меньше суммы двух других плоских углов AOB и BOC (рис. 1).

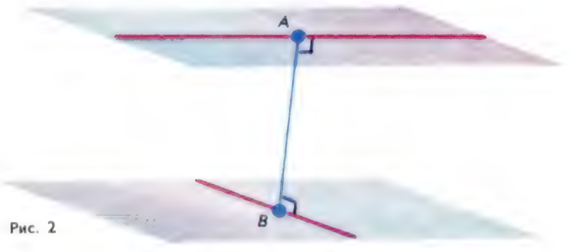


Рис. 2

Отправляясь в путешествие, мы часто вынуждены иметь дело с таким «расстоянием»: $D(A,B)$ – это наименьшая стоимость проезда из пункта A в пункт B. Неравенство треугольника здесь очевидно: чтобы добраться из A в C, мы можем сначала доехать от A до B, а потом – от B до C (заплатив за это $D(A,B)+D(B,C)$ рублей); поэтому стоимость $D(A,C)$ самого дешевого маршрута из A в C не больше суммы $D(A,B)+D(B,C)$. Можно ввести и другое «расстояние» между A и B. В любом конечном *графе* расстоянием между двумя вершинами можно считать наименьшее

число ребер в пути, соединяющих эти вершины.

Расстояние между двумя точками a и b числовой прямой R равно $|a-b|$. В прямоугольной декартовой системе координат на плоскости расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ выражается с помощью теоремы Пифагора по формуле:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Аналогичная формула в пространстве для расстояния между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

На одном и том же множестве X можно многими разными способами ввести расстояние. Например, на плоскости за расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ можно принять $\rho_1(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ или $\rho_2(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$ – наибольшее из двух чисел $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$.

Расстояние можно определять не только между точками. Так, расстоянием от точки A до прямой l (или до плоскости в пространстве) называется длина перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую l (на плоскость p). Вообще, расстоянием от точки A до фигуры Φ называется наименьшее из расстояний от этой точки до точек фигуры Φ. Иногда используют аналогичное определение расстояния между двумя непересекающимися фигурами; в частности, расстоянием между двумя параллельными или скрещивающимися прямыми (рис. 2) считается длина перпендикулярного обеим прямым отрезка с концами на этих прямых – наименьшее из расстояний между точками двух прямых.

РЯД

Рядом в математике называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots, \qquad (1)$$

составленное из чисел a_1, a_2, a_3, ..., которые называются членами ряда. Многоточие в конце (иногда шутят, что в нем-то и заключена суть ряда) указывает, что выражение (1) не имеет последнего слагаемого, за каждым слагаемым всегда стоит следующее. Таким образом, ряд есть «бесконечная» сумма.

При сложении конечного числа слагаемых всегда получается определенный числовой результат, вычислить же сумму бесконечного числа слагаемых, вообще говоря, не сможет ни человек, ни ЭВМ, поскольку процесс сложения членов ряда (по самому определению) никогда не кончается. Поэтому выражение (1) – это лишь некий математический символ, которому надлежит придать определенный смысл.

Рассмотрим конкретный ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots, \qquad (2)$$

каждый последующий член которого равен половине предыдущего.

Подсчитаем суммы одного, двух, трех, четырех, пяти его членов:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16},$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

Нетрудно заметить, что значения этих сумм отличаются от 1 на 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, т.е. при увеличении числа слагаемых мы получаем для их сумм хотя и различные числовые значения, однако все меньше и меньше отличающиеся от единицы. Число 1 разумно назвать суммой ряда (2).

Подкрепим наши доводы еще следующим рассуждением. Прямоугольник площадью в 1 квадратную единицу разобьем на два прямоугольника одинаковой площади (рис. 1). Один из получившихся прямоугольников вновь разобьем на два прямоугольника одинаковой площади. Продолжая мысленно этот процесс деления, получим прямоугольники, площади которых равны 1/2, 1/4, 1/8, ..., $1/2^n$, ... квадратных единиц. Объединение всех этих прямоугольников дает исходный прямоугольник, значит, и сумма их площадей должна быть равна площади исходного:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1.$$

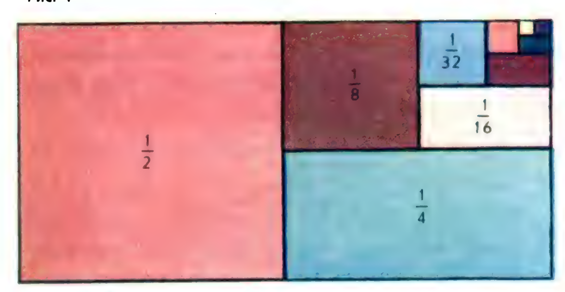
Приближенные суммы ряда (1)

$S_1 = a_1$,
$S_2 = a_1 + a_2$,
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

называются частичными суммами. Если значения частичных сумм S_n при неограниченном возрастании n стремятся к некоторому числу A, то ряд называется сходящимся; число A называют при этом суммой ряда и пишут:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = A.$$

Рис. 1



Таким образом, эта запись есть сокращенная форма следующего утверждения: при неограниченном возрастании n значения S_n сколь угодно мало отличаются от A, т.е. число A есть предел последовательности S_n, что записывается так:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A.$$

Не для всякого ряда последовательность его частичных сумм стремится к определенному пределу. Например, для ряда

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \qquad (3)$$

частичные суммы S_n принимают попеременно значения 1 и 0:

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 - 1 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0,\ \ldots$$

и с ростом n, очевидно, не приближаются неограниченно к какому-либо числу.

Ряд, у которого последовательность частичных сумм S_n не имеет предела, называется расходящимся. Таков ряд (3). Расходящийся ряд не имеет суммы.

Примеры сходящихся рядов:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots; \qquad (4)$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots; \qquad (5)$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\ . \qquad (6)$$

Ряд (4) сходится к числу 1/3 и дает представление этого числа бесконечной десятичной дробью: $1/3 = 0{,}333\ldots$. Суммы рядов (5) и (6) равны соответственно $\pi/4$ и $\pi^2/6$ и дают возможность приближенно вычислить число π с любой степенью точности (если взять достаточно много членов ряда).

Для любого числа x, удовлетворяющего условию $-1 < x < 1$, сходящимся будет геометрический ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

(его члены образуют геометрическую прогрессию со знаменателем x). Сумма его первых n членов, т.е. частичная сумма S_n, равна

$$S_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

и в случае $-1 < x < 1$ при $n \to \infty$ стремится к $1/(1 - x)$. Поэтому при $-1 < x < 1$ можно написать:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1/(1 - x). \qquad (7)$$

Геометрический ряд исторически был первым бесконечным рядом, для которого была определена его сумма. *Архимед* (III в. до н.э.) для вычисления площади параболического сегмента (т.е. фигуры, ограниченной прямой и параболой) применил суммирование бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем 1/4.

Интересно, что после Архимеда вплоть до XVI в. математика рядами не занималась, ряды вошли в математику лишь тогда, когда началось изучение изменяющихся процессов. Математики занялись вычислением сумм рядов (например, для ряда (5) сумму нашел Г. *Лейбниц*, а для ряда (6) – Л. *Эйлер*), хотя понятие сходимости ряда точно установлено еще не было. Считалось, что любой ряд имеет сумму и с рядами можно производить те же арифметические действия, что и с многочленами: складывать, умножать, переставлять слагаемые и т.п. Иногда это приводило к фантастическим результатам, например, получали, что сумма ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ может быть равна и 0, и 1, и даже 1/2. Рассуждения были примерно такие:

$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$ или $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots = 1$, а результат 1/2 получался следующим образом: если $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$, то из равенства $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots)$ следует $S = 1 - S$, откуда $S = 1/2$. Позже сходящимися рядами стали считать лишь те ряды, у которых n-й член a_n при неограниченном возрастании n стремится к нулю. Если ряд сходится, то предел a_n действительно равен нулю, так как $a_n = S_n - S_{n-1}$ и с возрастанием n эта разность стремится к нулю. Однако нашлись ряды, у которых a_n стремится к нулю, а последовательность частичных сумм не имеет конечного предела. Таков, например, *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ .$$

Четкое определение сходимости ряда, основанное на понятии предела последовательности частичных сумм, появилось лишь в начале XIX в. Тогда же началось систематическое изучение рядов.

Некоторые числовые ряды обладают тем свойством, что их сумма не меняется при перестановке членов, например абсолютно

сходящиеся ряды. Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots$

из абсолютных величин его членов. Таковы ряды (2), (4) и (6), а ряд (5) не является абсолютно сходящимся. Абсолютно сходящиеся ряды можно складывать, вычитать, умножать и делить по тем же правилам, что и конечные суммы.

Особое значение имеет степенной ряд, т.е. ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots . \qquad (8)$$

Для одних значений x получающийся из (8) числовой ряд может сходиться, для других – расходиться (например, геометрический ряд (7) сходится при любом x, удовлетворяющем условию $-1 < x < 1$, а при $x = -1$ дает расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$).

Множество всех значений x, для которых ряд (8) сходится, называется множеством сходимости этого ряда. На множестве сходимости сумма ряда (8) зависит от x и является функцией аргумента x. Если

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = f(x), \qquad (9)$$

то левая часть равенства представляет собой разложение функции $f(x)$ в бесконечный степенной ряд. Например, формула (7) дает разложение функции $1/(1-x)$ при $-1 < x < 1$ в бесконечный степенной ряд.

Идея представления функций степенными рядами принадлежит И. *Ньютону*, он нашел разложения многих функций, например:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{x^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \ldots \qquad (10)$$

где x – радианная мера угла, этот ряд сходится (и к тому же абсолютно) для любого x. Если в разложении (9) функции $f(x)$ в степенной ряд ограничиться несколькими первыми членами, то мы получим приближенное представление функции: оно тем точнее, чем больше взято членов ряда (слагаемых). Например, приближенная формула

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6},$$

правая часть которой – первые два члена формулы (10), дает значения $\sin x$ с ошибкой, меньшей 0,0005, при всех $0 < x < 0{,}59$, что в градусной мере соответствует углам $0° < x < 32°38'$. С той же точностью до 0,0005 можно считать $\sin x \approx x$ при всех положительных x, меньших $6°33'$.

Существуют различные способы представления функций бесконечными рядами, например, при рассмотрении периодических процессов используются тригонометрические ряды, т.е. ряды вида

$$a_0 + a_1 \sin x + b_1 \cos x + a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x + \ldots .$$

Заметим, что все рассмотренные ряды имели ясный и вполне определенный закон образования их членов. Обычно же ряд задается формулой n-го члена ряда (a_n), его называют общим членом ряда. Из этой формулы подстановкой вместо n определенного числа – номера члена ряда – находят слагаемое, имеющее этот номер. Например, общий член ряда (2) имеет вид $a_n = 1/2^n$, и легко находятся $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/2^2 = 1/4$, $a_3 = 1/2^3 = 1/8$. Для ряда (3) общий член выражается так: $a_n = (-1)^{n-1}$.

Для краткой записи суммы употребляется символ Σ (греческая буква «сигма», начальная буква слова «сумма»). Символ $\sum\limits_{n=1}^{N}$ (читается «сумма по n от 1 до N») означает сумму всех слагаемых, получаемых, когда n последовательно пробегает значения от 1 до N, например:

$$\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5},$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^N}.$$

Для обозначения всего ряда верхний индекс заменяется на символ бесконечности ∞:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Таким образом, можно записать:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

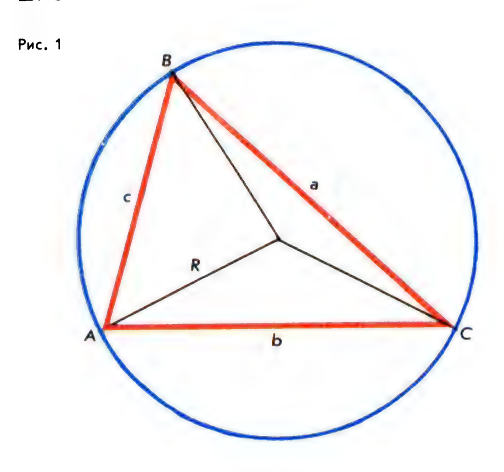
$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

СИНУСОВ ТЕОРЕМА

Эта теорема устанавливает зависимость между сторонами треугольника и противолежащими им углами. Она утверждает, что длины a, b, c сторон любого треугольника ABC (см. рис. 1) пропорциональны синусам противолежащих углов, т.е.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

Рис. 1



где R – радиус описанной окружности.

Подчеркнем, что стороны треугольника пропорциональны лишь синусам его внутренних углов, но не пропорциональны самим углам. Так, в прямоугольном треугольнике с острыми углами 30° и 60° $\sin 90°$ больше $\sin 30°$ в 2 раза: $1:1/2=2$, гипотенуза больше катета, лежащего против угла 30°, также в 2 раза. Но угол 90° больше угла 30° в 3 раза.

По теореме синусов удобно вычислять длины сторон треугольника, если известны величины его углов и длина одной из сторон.

Теорема синусов была впервые доказана в X–XI вв. математиками Ближнего и Среднего Востока. Открытие этой теоремы сыграло важнейшую роль в развитии *тригонометрии*.

СИНУСОИДА

Синусоида – волнообразная плоская кривая, которая является графиком тригонометрической функции $y=\sin x$ в прямоугольной системе координат. Если рулончик бумаги разрезать наискось и развернуть его, то край бумаги окажется разрезанным по синусоиде (рис. 1, *а*). Любопытно, что проекция на плоскость винтовой линии также будет синусоидой (рис. 1, *б*).

Длина «волны» синусоиды равна 2π. Это объясняется тем, что значение функции $y=\sin x$ при любом x совпадает с ее значением при $x+2\pi$ (т.е. период функции равен 2π).

Синусоида пересекает ось Ox в точках πk, которые являются точками перегиба; в точках $\pi/2+2\pi k$ синусоида имеет максимум, а в точках $-\pi/2+2\pi k$ – минимум ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

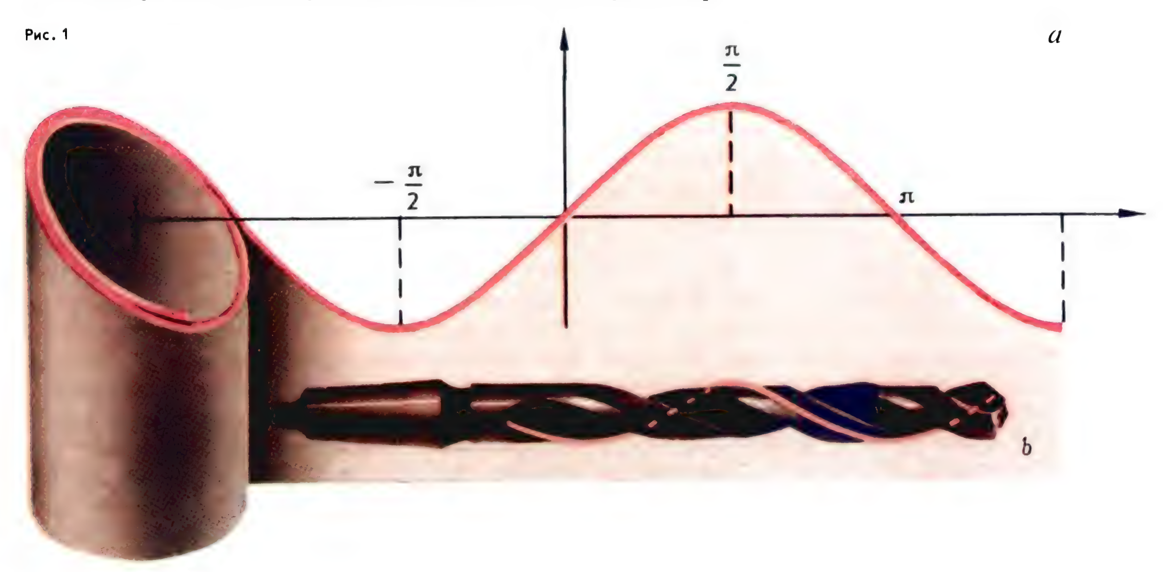
Часто синусоидой называют кривую, которая является графиком функции вида $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$. График этой функции получается из синусоиды $y=\sin x$ сдвигом по оси Ox на $-\varphi$, растяжением (сжатием) в ω раз по оси Ox, растяжением (сжатием) в A раз по оси Oy и сдвигом по оси Oy на b. Число A называется амплитудой (или размахом), ω – круговой частотой, φ – начальной фазой колебания.

График функции $y=\cos x$ получается из синусоиды сдвигом влево на $\pi/2$ и тоже называется синусоидой (реже косинусоидой).

Изменение какой-либо величины по закону синуса называется гармоническим колебанием. Примеры таких колебаний: колебания маятника, колебания напряжения в электрической сети, изменение тока и напряжения в колебательном контуре и др.

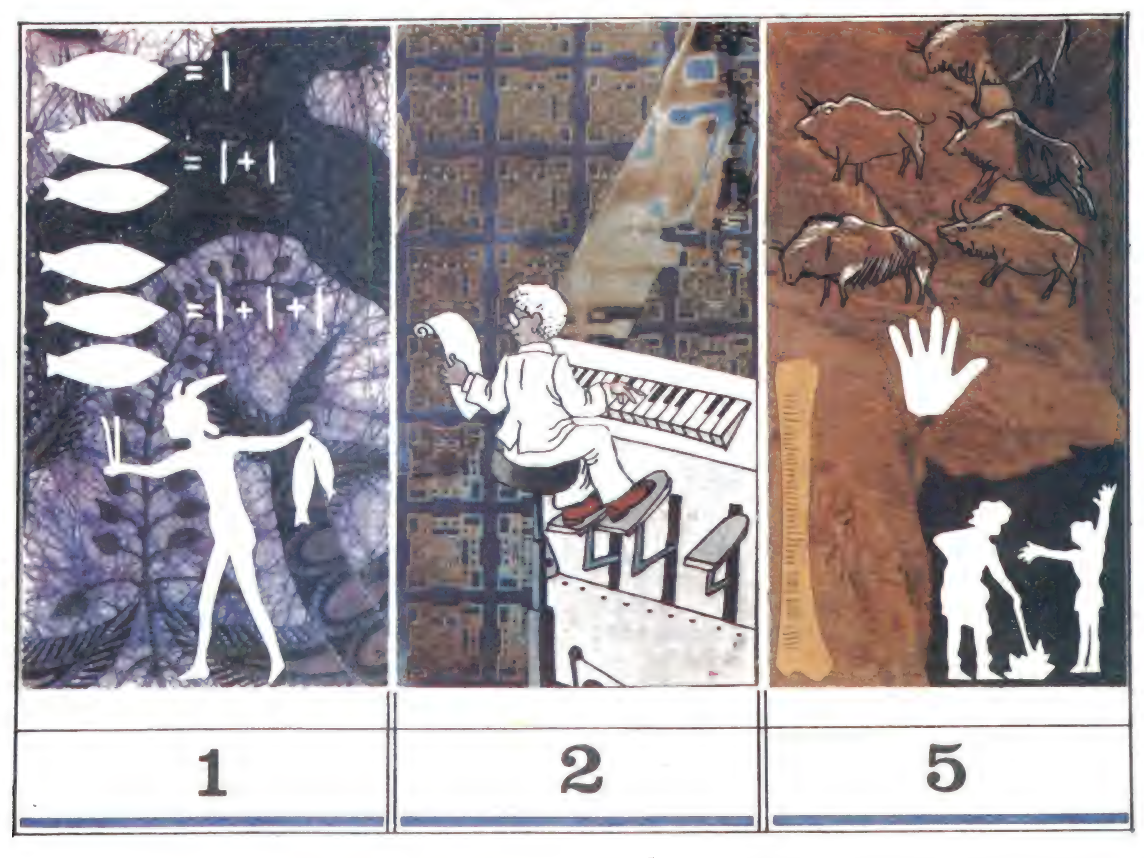
Еще один пример синусоидальных колебаний – звук (гармонические колебания воздуха). Однако редко удается услышать чистый звук – звук, соответствующий колебанию $y=A\sin\omega t$. В большинстве случаев мы слышим ряд других звуков (обертоны), соответствующих колебаниям с меньшей амплитудой. Эти звуки музыкальных инструментов дают основному тону специфическую окраску – тембр.

Рис. 1



«Преимущества десятичной системы не математические, а зоологические. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмеричной системой».

Н. Н. Лузин

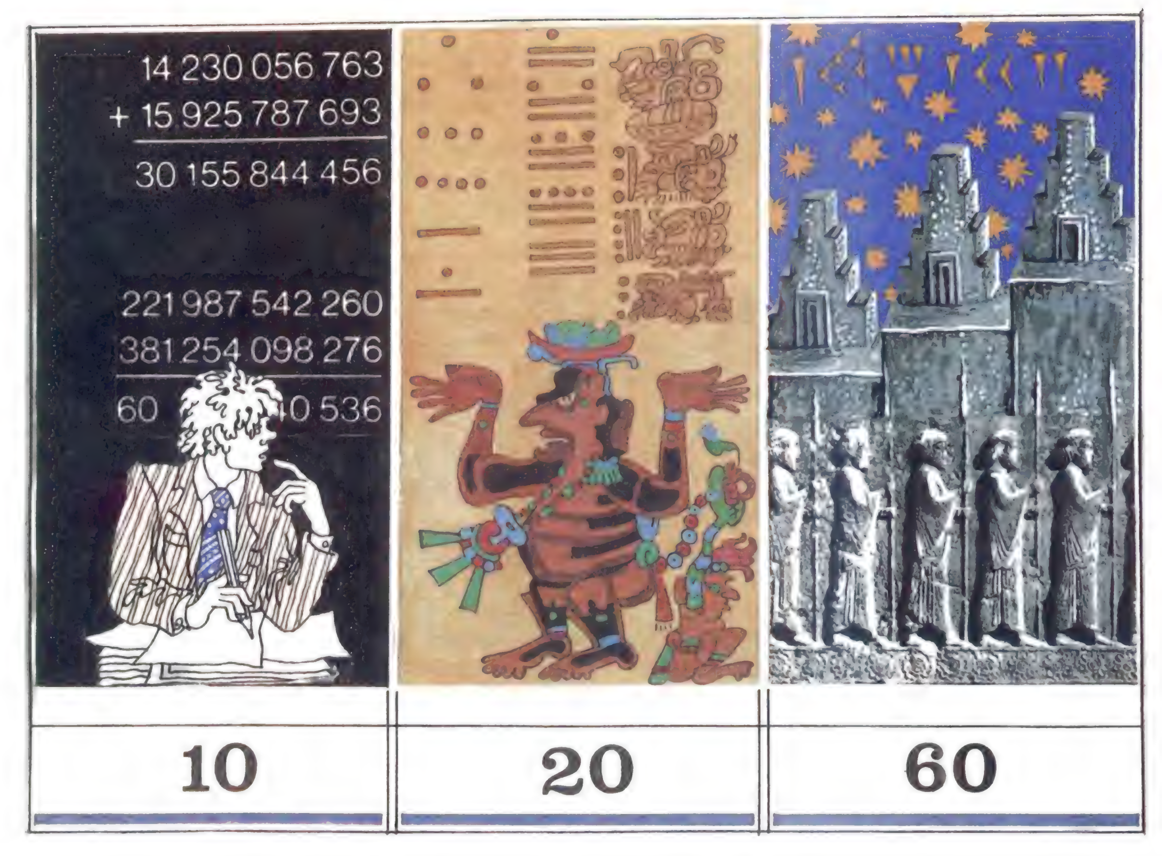


СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Системы счисления – это способы записи чисел в виде, удобном для прочтения и выполнения арифметических операций.

Рассматривая археологические находки эпохи палеолита (камни, кости животных), можно заметить, что люди стремились группировать точки, полосы и насечки по 3, 4, 5 или по 7. Такая группировка облегчала счет. В древности чаще всего считали на пальцах, и поэтому предметы стали группировать по 5 или по 10. В дальнейшем десяток десятков получил особое название (в русском языке – сотня), десяток сотен – свое название и т. д. Для удобства записи такие узловые числа стали обозначать особыми знаками. Если при пересчете оказывалось 2 сотни 7 десятков и еще 4 предмета, то дважды повторяли знак для сотни, семь раз – знак для десятка и четыре раза – знак для единицы. Знаки для единиц, десятков и сотен были не похожи друг на друга. При такой записи числа знаки можно было располагать в любом порядке, и значение записанного числа при этом не менялось. Поскольку в такой записи положение знака не играет роли, подобные системы счисления стали называть непозиционными. Непозиционными были системы счисления у древних египтян, греков и римлян. Непозиционные системы счисления были более или менее пригодны для выполнения операций сложения и вычитания, но совсем не удобны для умножения и деления. Чтобы облегчить работу, применялись счетные доски – абаки. Современные счеты являются видоизмененным абаком (см. *Вычислительная техника*).

У древних вавилонян система счисления вначале была непозиционной, но впоследствии они научились использовать информацию, заключенную в порядке записи знаков, и перешли к позиционной системе счисления. При этом в отличие от используемой нами системы счисления, в которой значение цифры меняется в 10 раз при перемещении на одно место (такую систему называют десятичной), у вавилонян при перемещении знака происходило изменение значения числа в 60 раз (такую систему счисления называют шестидесятеричной). Долгое время в вавилонской системе счета не было нуля, т. е. знака для пропущенного разряда. Это не создавало неудобств, так как порядок числа был обычно известен. Но когда стали составлять обширные математические и астрономические



таблицы, возникла необходимость в таком знаке. Он встречается и в поздних клинописных записях, и в таблицах, составленных в Александрии в начале нашей эры. Следы вавилонской системы счисления сохранились до наших дней в порядке счета единиц времени (1 ч = 60 мин, 1 мин = 60 с).

Хотя вавилонские ученые пользовались шестидесятеричной системой счисления, на практике все чаще использовали сложный гибрид этой системы с десятичной. А индийские математики, много заимствовавшие у вавилонских ученых, применяли чисто десятичную систему счета. Сочетав с ней вавилонский метод обозначения чисел, индийцы создали в VI в. способ записи, использующий лишь 9 цифр. Вместо нуля оставляли пустое место, а позднее стали ставить точку или маленький кружок. В IX в. появился особый знак для нуля. Долгое время понятие нуля казалось непонятным и абстрактным (зачем нужен знак для того, чего нет?), но в конце концов преимущества нового способа записи чисел стали ясны всем. Были выработаны правила выполнения арифметических операций над числами в десятичной системе счисления, не требовавшие использования абака, и этот способ записи чисел распространился по всему миру.

За основание системы счисления можно принять не только числа 10 или 60, но и любое натуральное число p, большее 1. Для записи чисел в p-ичной системе счисления нужно p цифр. Число, записанное цифрами a_k, a_{k-1}, ..., a_0 в p-ичной системе, равно $a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_0$. Например: $326_7 = 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 6$ (индекс 7 означает, что число записано в семеричной системе). Если число записано в десятичной системе счисления, а его надо перевести в p-ичную систему, то делят это число на p с остатком. Потом делят на p с остатком неполное частное и т. д. до тех пор, пока не получится неполное частное, равное нулю. Выписывая подряд остатки, начиная с последнего и кончая первым, получаем искомую p-ичную запись нашего числа. Например, из того, что $29 = 4 \cdot 6 + 5$, а $4 = 0 \cdot 6 + 4$, вытекает, что $29 = 45_6$.

Операции над натуральными числами в p-ичной системе счисления выполняются в обычном порядке, с той лишь разницей, что для каждой системы счисления надо брать свои таблицы сложения и умножения. Особенно простой вид эти таблицы имеют для двоичной системы счисления.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

и

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Еще в XVII в. немецкий математик Г. В. *Лейбниц* предложил перейти на двоичную систему счисления, но этому помешала не только традиция, но и то, что в двоичной системе счисления запись чисел слишком длинна. Например: $106 = 1\,101\,010_2$. Однако в нашем веке, когда были созданы ЭВМ, оказалось, что для выполнения арифметических операций на этих машинах самой удобной является именно двоичная система счисления (см. *Языки программирования*).

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

В Древней Греции число называли совершенным, если оно равнялось сумме всех своих делителей (исключая само число). Например: $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$. Указанные три числа – первые совершенные числа. Они, как и все остальные известные совершенные числа, четны. Еще древнегреческий математик Евклид в III в. до н. э. указывал, что четные совершенные числа могут быть получены в виде $2^{p-1}(2^p - 1)$ в том случае, если число $2^p - 1$ простое. Простые числа вида $2^p - 1$ стали называть простыми числами Мерсенна, по имени французского монаха М. Мерсенна (1588–1648), много занимавшегося совершенными числами. Л. *Эйлер* показал, что этими числами исчерпываются все четные совершенные числа.

К настоящему времени числа вида $2^p - 1$ проверены на простоту для всех p до 50 000. В результате обнаружено более 30 простых чисел Мерсенна, самое большое из которых получается при $p = 132049$. Это число с 39751 десятичным знаком. Соответствующее ему совершенное число $2^{86242}(2^{86242} - 1)$ имеет 79502 десятичных знака. Итак, известно довольно много четных совершенных чисел, но не известно ни одного нечетного совершенного числа, хотя в поисках такого числа проверены все числа до 10^{50}. Также неизвестно, конечно ли количество совершенных чисел.

СОФИЗМЫ

Софизм – доказательство ложного утверждения, причем ошибка в доказательстве искусно замаскирована. Софистами называли группу древнегреческих философов IV–V вв. до н. э., достигших большого искусства в логике.

Приведем пример софизма. Если равны половины, то равны и целые. Полуполное есть то же, что и полупустое, значит, полное – то же самое, что пустое. К софизмам можно отнести доказательство того, что Ахиллес, бегущий в 10 раз быстрее черепахи, не сможет ее догнать. Пусть черепаха на 100 м впереди Ахиллеса. Когда Ахиллес пробежит эти 100 м, черепаха будет впереди него на 10 м. Пробежит Ахиллес эти 10 м, а черепаха окажется впереди на 1 м и т. д. Расстояние между ними все время сокращается, но никогда не обращается в нуль. Значит, Ахиллес никогда не догонит черепаху.

А вот два математических софизма. «Докажем», что все числа равны между собой.

Пусть a и b – произвольные числа и пусть $a > b$, тогда существует такое положительное число c, что $a = b + c$. Умножим это равенство на $a - b$ и преобразуем полученное равенство:

$$a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc,$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc,$$

$$a(a - b - c) = b(a - b - c).$$

Разделив обе части полученного равенства на $(a - b - c)$, получим, что $a = b$. Ошибка здесь находится в самом конце, когда мы делили на число $(a - b - c)$, которое равно нулю.

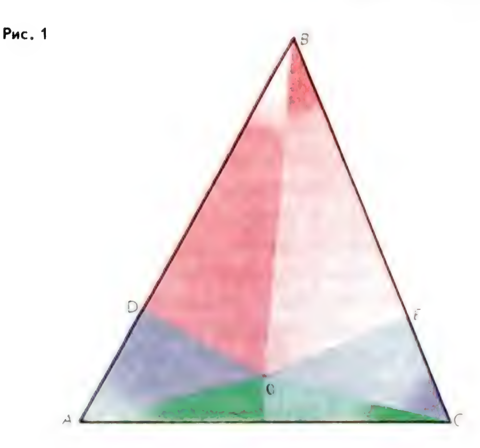
А вот «доказательство» того, что все треугольники – равнобедренные.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC (рис. 1). Проведем в нем биссектрису угла B и серединный перпендикуляр к стороне AC. Точку их пересечения обозначим через O. Из точки O опустим перпендикуляр OD на сторону AB и перпендикуляр OE на сторону BC. Очевидно, что $OA = OC$ и $OD = OE$. Но тогда прямоугольные треугольники AOD и COE равны по катету и гипотенузе. Поэтому $\angle DAO = \angle ECO$. В то же время $\angle OAC = \angle OCA$, так как треугольник AOC – равнобедренный. Получаем: $\angle BAC = \angle DAO + \angle OAC = \angle ECO + \angle OCA = \angle BCA$.

Итак, угол BAC равен углу BCA, поэтому треугольник ABC – равнобедренный: $AB = BC$.

Здесь ошибка в чертеже. Серединный перпендикуляр к стороне и биссектриса противоположного ей угла для неравнобедренного

Рис. 1



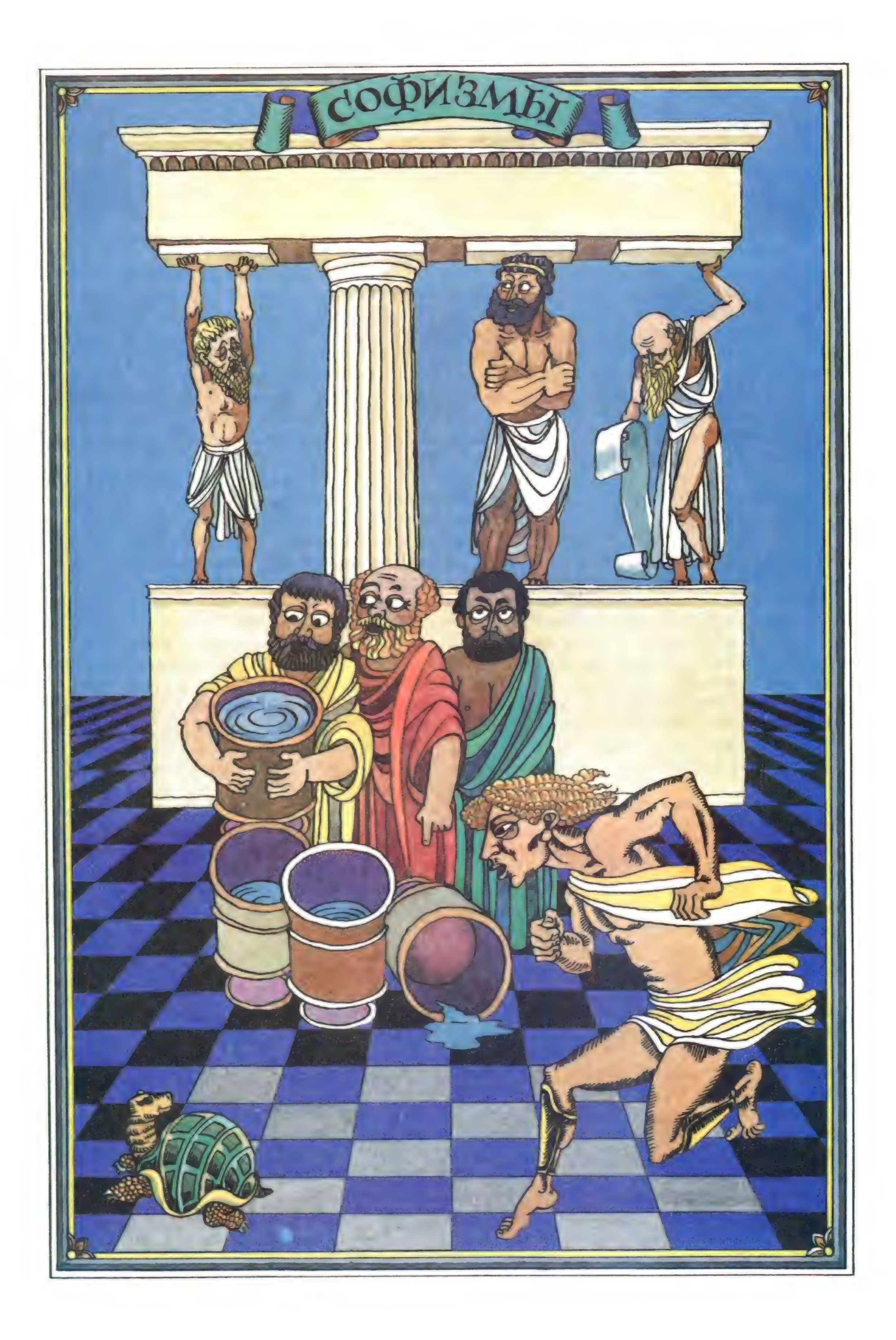
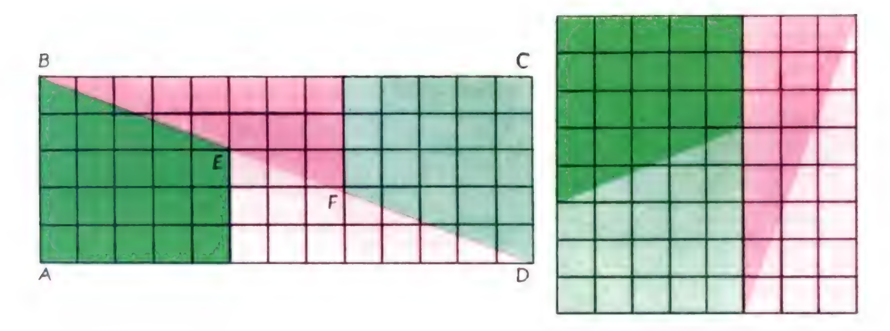

СОФИЗМЫ

Рис. 2



треугольника пересекаются вне этого треугольника.

И еще один пример софизма. Посмотрим на рис. 2. Прямоугольники явно равносоставлены, но площадь одного равна 64 клеткам, а площадь другого – 65. И здесь ошибка в чертеже! Точки *B*, *E*, *F* и *D* не лежат на одной прямой, а являются вершинами очень узкого параллелограмма, площадь которого равна площади одной клетки – той самой лишней клетки.

СПИРАЛИ

Спирали – плоские кривые *линии*, многократно обходящие одну из точек на плоскости, называемую полюсом спирали. Такая форма кривой делает естественной запись ее уравнения в полярных координатах $r = f(\varphi)$, где функция f монотонно увеличивается или монотонно уменьшается с увеличением угла φ, значения которого рассматриваются уже не на отрезке $[0, 2\pi]$, а, как правило, для всех действительных значений φ.

Рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся спиралей.

Спираль Архимеда. Полярное уравнение архимедовой спирали, изученной древнегреческим математиком *Архимедом*, имеет вид $r = a\varphi$. Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между витками; каждое из них равно $2\pi a$ (рис. 1, а).

По спирали Архимеда идет, например, на грампластинке звуковая дорожка. Перемещение острия корундовой иглы по этой дорожке будет результирующим двух равномерных движений: приближения к полюсу и вращения вокруг полюса.

Металлическая пластина с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины — механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку – имеет форму спирали Архимеда.

Квадратичная спираль. Ее уравнение в полярных координатах $r = a\varphi^2$. Если положить рядом с центром вращающейся грампластинки натертый мелом шарик для настольного тенниса, то, скатываясь с нее, он оставит на грампластинке след в виде квадратичной спирали. Действительно, абсолютно горизонтально установить грампластинку не удастся, а прямая ее наибольшего наклона та, по которой шарик скатывается под действием силы тяжести, равномерно вращается по пластинке (рис. 1, б).

Логарифмическая спираль. Уравнение в полярных координатах логарифмической спирали имеет вид $r = a^{\varphi}$. Спираль эта имеет бесконечное множество витков и при раскручивании (как и архимедова), и при скручивании. Последнее означает, что она не проходит через свой полюс. Логарифмическую спираль называют еще равноугольной спиралью. Это ее название отражает тот факт, что в любой точке логарифмической спирали угол между касательной к ней и радиусом-вектором сохраняет постоянное значение (рис. 1, в).

Логарифмическая спираль нередко используется в технических устройствах. Например, вращающиеся ножи нередко имеют профиль, очерченный по логарифмической спирали — под постоянным углом к разрезаемой поверхности, благодаря чему лезвие ножа стачивается равномерно. Ночные бабочки, которые пролетают большие расстояния, ориентируясь по параллельным лунным лучам, инстинктивно сохраняют постоянный угол между направлением полета и лучом света. Если они ориентируются на точечный источник света, скажем на пламя свечи, инстинкт их подводит, и бабочки попадают в пламя по скручивающейся логарифмической спирали.

Спираль Корню. Эта кривая названа по имени французского физика XIX в. А. Корню. Главной особенностью спирали (рис. 1, г) является то, что ее кривизна прямо пропорциональна длине пройденного по ней пути.

При строительстве железных и шоссейных дорог возникает необходимость связать прямолинейные участки с участками пути, где средства транспорта движутся по дугам окружностей. При этом важно, чтобы кривизна пути изменялась равномерно, и спираль

Корню является идеальной переходной кривой для закругления железнодорожного пути. При этом прямой участок пути должен переходить в дугу спирали Корню, начиная с ее центра. А с путем по окружности спираль Корню стыкуется в той ее точке, где ее кривизна равняется кривизне данной окружности.

СРАВНЕНИЯ

Два целых числа, разность которых кратна данному натуральному числу m, называются сравнимыми по модулю m. (Слово «модуль» происходит от латинского *modulus*, что по-русски означает «мера», «величина».) Утверждение «a сравнимо с b по модулю m» обычно записывают в виде $a \equiv b \pmod m$ и называют сравнением. Вот примеры сравнений: $5 \equiv 1 \pmod 2$, $48 \equiv 0 \pmod 6$, $-16 \equiv 9 \pmod 5$. Сравнение по модулю 1 выполняется для любых двух целых чисел, так как всякое число кратно 1. Два числа сравнимы по модулю 2, если они одной четности, т.е. либо оба четны, либо оба нечетны.

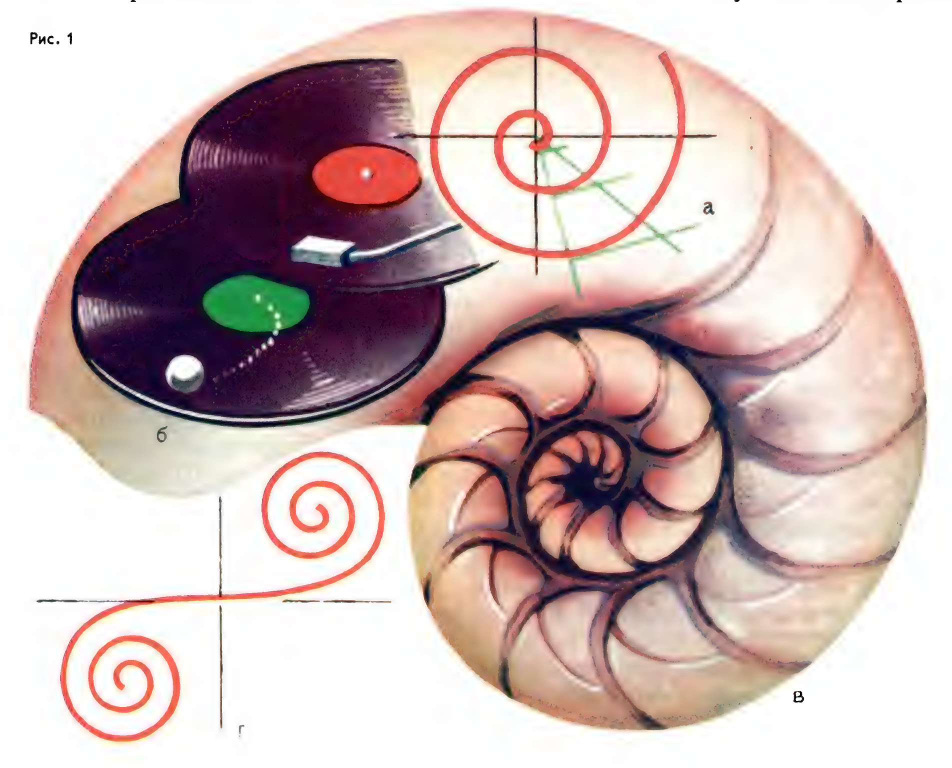
Определение сравнения было сформулировано в книге *К.Ф. Гаусса* «Арифметические исследования». Эту работу, написанную на латинском языке, начали печатать в 1797 г., но книга вышла в свет лишь в 1801 г. из-за того, что процесс книгопечатания в то время был чрезвычайно трудоемким и длительным. Первый раздел книги Гаусса так и называется: «О сравнении чисел вообще».

Сравнениями очень удобно пользоваться в тех случаях, когда достаточно знать в каких-либо исследованиях числа с точностью до кратных некоторого числа. Например, если нас интересует, на какую цифру оканчивается куб целого числа a, то нам достаточно знать a лишь с точностью до кратных числа 10, и можно пользоваться сравнениями по модулю 10.

Поскольку сравнение по модулю m есть не что иное, как «равенство с точностью до кратных m», то многие свойства сравнений напоминают свойства равенств. Так, два сравнения по одинаковому модулю можно складывать, вычитать, перемножать так же, как и равенства: если $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, то $a + c \equiv b + d \pmod m$, $a - c \equiv b - d \pmod m$, $ac \equiv bd \pmod m$. В частности, обе части сравнения можно умножать на целое число. Однако не всегда можно сократить обе части сравнения на какой-нибудь множитель. Например: $4 \equiv 2 \pmod 2$, но $2 \not\equiv 1 \pmod 2$. Известно, что если произведение двух чисел равно нулю, то нулю равен хотя бы один из сомножителей. Аналогичное свойство для сравнений в общем случае не выполняется: $2 \cdot 3 \equiv 0 \pmod 6$, но $2 \not\equiv 0 \pmod 6$ и $3 \not\equiv 0 \pmod 6$. Однако если $a \cdot b \equiv 0 \pmod m$ и числа a и m взаимно просты, то $b \equiv 0 \pmod m$. В частном случае, когда модуль сравнения – простое число, из того, что произведение двух чисел сравнимо с нулем, следует, что хотя бы один из сомножителей сравним с нулем, т.е. в этом случае имеется полная аналогия с равенствами.

Поскольку два числа сравнимы по модулю

Рис. 1



m в том, и только в том, случае, если они дают при делении на m одинаковые остатки, то одним из простейших примеров использования сравнений является вывод признаков *делимости*. Покажем, как это делается в случае признака делимости на 3. Произвольное число n можно записать в виде $n = a + 10b + 100c + \ldots$, где a – число единиц, b – число десятков и т. д. Так как $10 \equiv 1 \pmod 3$, то $10^2 \equiv 1 \pmod 3$, $10^3 \equiv 1 \pmod 3$ и т. д. Поэтому $n \equiv a + b + c + \ldots \pmod 3$. В частности, n делится на 3 в том, и только в том, случае, если сумма его цифр делится на 3.

Приведем пример одной исключительно важной конструкции, к которой приводит понятие сравнения. Произвольное целое число при делении на данное натуральное число m дает в качестве остатка одно из чисел 0, 1, ..., $m-1$. Объединим в один класс числа, дающие остаток 0 при делении на m, в другой класс – числа, которые при делении на m дают остаток 1, в следующий класс – числа, дающие остаток 2, и т. д. Все целые числа разобьются на m классов. Числа, попавшие в один класс, сравнимы по модулю m, а в разные классы – несравнимы. Получившиеся классы чисел называются классами вычетов по модулю m или просто классами по модулю m. Класс, содержащий число k, обозначают $\bar{k}$. Так, по модулю 2 имеется два класса: $\bar{0}$ и $\bar{1}$; класс $\bar{0}$ состоит из всех четных чисел, а класс $\bar{1}$ – из всех нечетных чисел. У класса $\bar{0}$ есть и другие обозначения, например $\bar{2}$, $\bar{4}$, $\overline{10}$. Для классов по модулю m определены действия сложения, вычитания и умножения по формулам: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} - \bar{b} = \overline{a-b}$, $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$. Приведем для примера таблицы сложения и умножения для классов по модулю 2.

$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}+\bar{b}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{a}\bar{b}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

Эти таблицы являются другой формой записи известных правил: сумма четных чисел четна, а сумма нечетного и четного чисел нечетна; произведение четного числа на любое целое число – четное число и т. д.

Классы вычетов по модулю m в случае простого модуля образуют *поле*.

Сравнения можно рассматривать не только для целых чисел, но и для некоторых других математических объектов. Например, для многочленов $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ запись $f(x) \equiv g(x) \pmod{h(x)}$ означает, что $f(x) - g(x)$ делится на $h(x)$.

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ

Классическими средними значениями, составленными из двух положительных чисел a и b, принято считать: среднее арифметическое – число $(a+b)/2$, среднее геометрическое (называемое также средним пропорциональным) – число $\sqrt{ab}$ и среднее гармоническое – число $2ab/(a+b)$. Эти средние были известны еще античным математикам, они играли большую роль, в частности, в древнегреческой теории музыки. В одном из математических текстов, который приписывают древнегреческому математику Архиту (ок. 428–365 гг. до н. э.), среднее арифметическое m, среднее геометрическое g и среднее гармоническое h определялись как равные средние члены соответственно арифметической, геометрической и гармонической пропорций:

$$a - m = m - b;\ a : g = g : b;$$
$$(a - h) : a = (h - b) : b.$$

Из этих равенств легко получаем:

$$m = \frac{a+b}{2},\ g = \sqrt{ab},\ h = \frac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

По преданию гармоническое среднее ввел *Пифагор* (VI в. до н. э.), выразив с его помощью отношение основных гармонических интервалов. Пифагор установил, что вместе со струной длиной $12l$, созвучно сливаясь с ней, звучат струны того же натяжения с длинами $6l$ (выше на октаву), $8l$ и $9l$ (выше на квинту и кварту), при этом 9 есть среднее арифметическое чисел 6 и 12, а 8 он определил как среднее гармоническое этих чисел. Это созвучие (и определяющее его отношение чисел 6, 8, 9, 12) называлось тетрадой. Пифагорейцы считали, что тетрада есть «та гамма, по которой поют сирены».

В древнегреческой математике, которая была по преимуществу геометрической, было известно несколько способов построения средних по двум данным отрезкам a и b. У Паппа Александрийского (III в.) в его «Математическом собрании», своде результатов древнегреческой математики, приведено построение среднего геометрического двух отрезков по способам его предшественников Эратосфена (276–194 гг. до н. э.), Никомеда (II в. до н. э.) и Герона (I в.), дано также описание построения на одной фигуре всех трех средних.

На рис. 1 показано одно из возможных построений. AC и CB ($|AC| = a$, $|CB| = b$) – смежные отрезки одной прямой, на отрезке AB как на диаметре построена окружность, радиус этой окружности равен $(a+b)/2$. В точке C восставлен перпендикуляр к прямой AB. В прямоугольном треугольнике ANB

(угол ANB – прямой, он опирается на диаметр) высота NC есть среднее пропорциональное отрезков AC и CB, т.е. $|NC| = \sqrt{ab}$. Если NM – проекция NC на NO, то нетрудно подсчитать, что $|NM| = 2ab/(a+b)$. Так как перпендикуляр короче наклонной, то $|NM| < |NC| < |ON|$. Если длины отрезков AC и CB равны, то точки O и C совпадают и совпадают также все рассматриваемые отрезки NM, NC и ON. Таким образом, при любых положительных a и b справедливы неравенства:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2},$$

и в каждом из них знак равенства достигается лишь в случае $a = b$.

Неравенство $\sqrt{ab} \leqslant (a+b)/2$ называется неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом. Из него следуют две теоремы, которые часто используются при решении задач на наибольшее и наименьшее значения, так называемых задач на экстремум: 1) произведение двух положительных чисел, при постоянной сумме, имеет наибольшее значение, когда числа равны; 2) сумма двух положительных чисел, при постоянном произведении, имеет наименьшее значение, когда числа равны.

Применив эти теоремы, нетрудно, например, установить, что из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшую площадь имеет квадрат и из всех прямоугольников с заданной площадью наименьший периметр имеет также квадрат.

Средним арифметическим n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Средним геометрическим n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется корень n-й степени из произведения этих чисел:

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

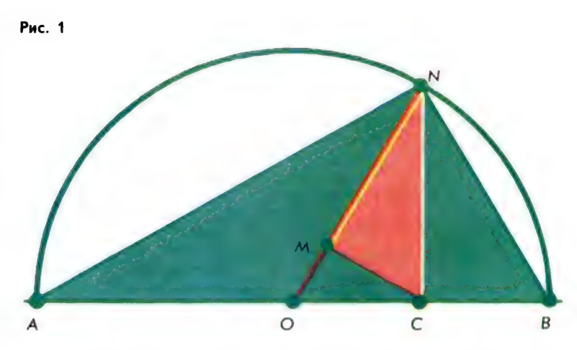
Средним гармоническим n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число

$$h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Заметим, что число, обратное среднему гармоническому h, есть среднее арифметическое n чисел, обратных данным:

$$\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Рис. 1



Средним квадратичным n произвольных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется корень квадратный из среднего арифметического квадратов этих чисел:

$$d = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}.$$

Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ эти средние удовлетворяют неравенствам:

$$h \leqslant g \leqslant m \leqslant d, \qquad (1)$$

в каждом из которых знак равенства достигается лишь в случае, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Самым важным и знаменитым из этих неравенств является неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}. \qquad (2)$$

Применяя его к числам $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$, можно доказать неравенство $h \leqslant g$, а применяя его к натуральным числам $1, 2, \ldots, n$ и используя тот факт, что

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

получаем неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Следствиями неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом будут обобщения теорем 1) и 2) о максимуме произведения и минимуме суммы, на основе которых решаются многие задачи на экстремум: произведение n положительных чисел, при постоянной сумме, принимает наибольшее значение, когда все эти числа равны; сумма n положительных чисел, при постоянном произведении, принимает наименьшее значение, когда все эти числа равны. Обратим внимание, что среднее арифметическое, как и среднее квадратичное, имеет смысл не только для положительных, но и для произвольных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, при этом справедливо неравенство $m^2 \leqslant d^2$. В случае, например, двух слагаемых оно принимает вид

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2}{2}$$

и легко следует из тождественного неравенства $(a_1-a_2)^2 \geqslant 0$. Неравенства для средних и сами средние широко применяются не только в алгебре, геометрии, математическом анализе, но и в статистике, в теории вероятностей (откуда пришло среднее квадратичное), при обработке результатов измерений.

Все рассмотренные средние являются частными случаями степенных средних: для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и отличного от нуля числа α степенным средним порядка α называется число

$$S(\alpha)=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}.$$

При $\alpha=-1, 1, 2$ соответственно получается среднее гармоническое, среднее арифметическое и среднее квадратичное. При $\alpha=0$ $S(\alpha)$ не определено, однако можно показать, что при стремлении α к нулю $S(\alpha)$ стремится к среднему геометрическому, и потому можно считать $S(0)$ средним геометрическим. Основное свойство степенных средних – это монотонность: $S(\alpha_1) \leqslant S(\alpha_2)$, если $\alpha_1<\alpha_2$, в частности

$$S(-1) \leqslant S(0) \leqslant S(1) \leqslant S(2).$$

Рассмотрим следующую процедуру. По двум положительным числам a и b составим их среднее арифметическое $a_1=(a+b)/2$ и среднее геометрическое $b_1=\sqrt{ab}$, затем по числам a_1 и b_1 составим их среднее арифметическое $a_2=(a_1+b_1)/2$ и среднее геометрическое $b_2=\sqrt{a_1b_1}$. Продолжим этот процесс, определяя a_n и b_n с помощью формул:

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \text{ и } b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}.$$

Образуются две последовательности чисел (a_n) и (b_n). Например, если взяты числа $a=1$ и $b=3$, то первые члены последовательностей будут такие:

$a_1 \approx 2;$ $b_1 \approx 1{,}732050808;$

$a_2 \approx 1{,}866025404;$ $b_2 \approx 1{,}861209718;$

$a_3 \approx 1{,}863617561;$ $b_3 \approx 1{,}863616006;$

$a_4 \approx 1{,}863616784;$ $b_4 \approx 1{,}863616784.$

В приведенном примере последовательности (a_n) и (b_n) очень быстро сближаются. В общем случае, как было показано немецким математиком К. Ф. *Гауссом*, последовательности (a_n) и (b_n) приближаются друг к другу достаточно быстро и имеют общий предел. Предел этот называется арифметико-геометрическим средним чисел a и b. Он не выражается элементарно через a и b, однако не является и каким-то математическим курьезом, а находит многочисленные применения в ряде разделов математики.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Степенная функция – функция вида $y=x^\alpha$, где α – заданное число, называемое показателем степени. Иногда степенной функцией называется функция несколько более общего вида $y=ax^\alpha$.

Многие функциональные зависимости выражаются через степенную функцию. Например, объем куба V есть степенная функция от x (длины его ребра): $V=x^3$; период T колебаний математического маятника пропорционален длине маятника x в степени $1/2$, а именно $T=2\pi\sqrt{x/g}$. Если газ расширяется или сжимается без теплообмена с окружающей средой, то его давление P и объем V связаны формулой $V \cdot P^k=C$ (для воздуха, например, $k=-1{,}4$). Заметим, что в двух последних случаях показатель не является целым числом.

При любом показателе степени α показательная функция $y=x^\alpha$ определена во всяком случае на положительной полуоси. Свойства степенной функции различны в зависимости от значения показателя степени. Если α – натуральное число ($\alpha=n$), то функция $y=x^n$ определена на всей числовой оси, обращается в нуль при $x=0$, четная при четном n и нечетная при n нечетном, неограниченно возрастает при безграничном возрастании аргумента x. На рис. 1 и 2 приведены графики типичных степенных функций с целым положительным показателем: $y=x^3$ (кубическая парабола) и $y=x^4$ (парабола четвертой степени). При $n=1$ степенная функция $y=x$ является линейной функцией, при $n=2$ – квадратичной функцией $y=x^2$.

Если α – отрицательное целое число ($\alpha=-n$), то степенная функция определяется равенством $y=1/x^n$. Она определена при всех отличных от нуля x. Ее график состоит из двух частей (ветвей), имеющих *асимптотами* оси координат, к которым эти кривые неогра-

Рис. 1 Рис. 2

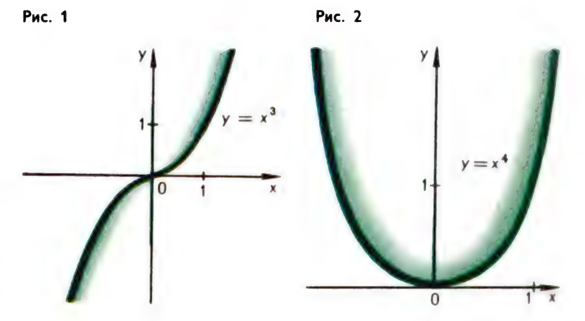
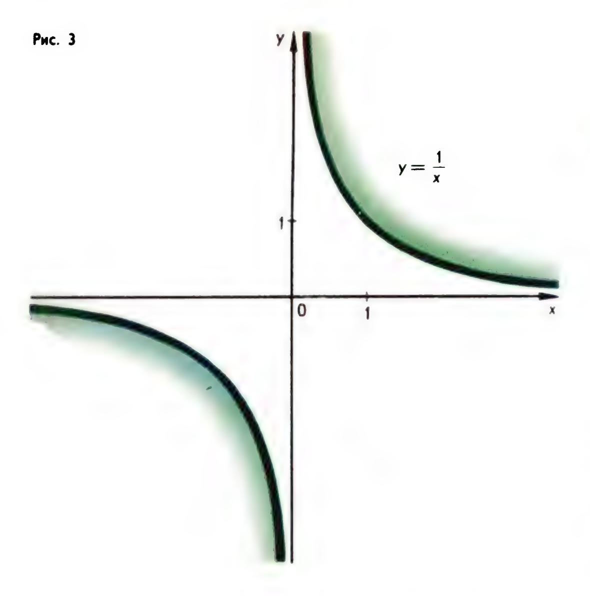


Рис. 3



ниченно приближаются. Типичные представители – функции $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$, их графики даны на рис. 3 и 4. При $\alpha = 0$ по определению $x^0 = 1$. Если $\alpha = 1/n$, то функция $y = x^{1/n}$ (обозначается также $y = \sqrt[n]{x}$) определяется как обратная функция для функции $y = x^n$. При четном n функция определена лишь для $x \geqslant 0$, а при нечетном n – на всей оси. Графики таких

Рис. 4

функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$ изображены на рис. 5 и 6.

Для рационального показателя $\alpha = p/q$ (p/q – несократимая дробь) степенная  функция определяется формулой

$$y = x^{p/q} = (x^{1/q})^p.$$

Графики типичных степенных функций с рациональным показателем приведены на рис. 7, 8, 9.

Рис. 5 Рис. 6

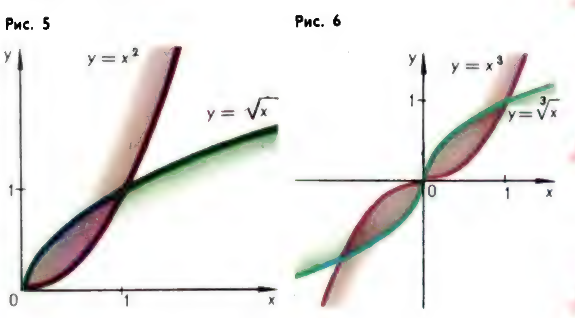
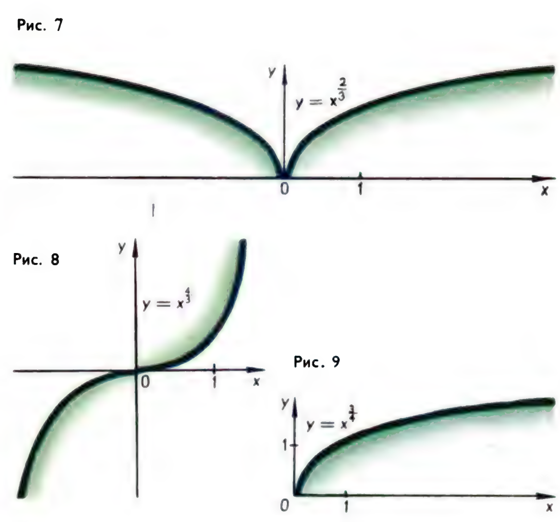


Рис. 7

Рис. 8

Рис. 9

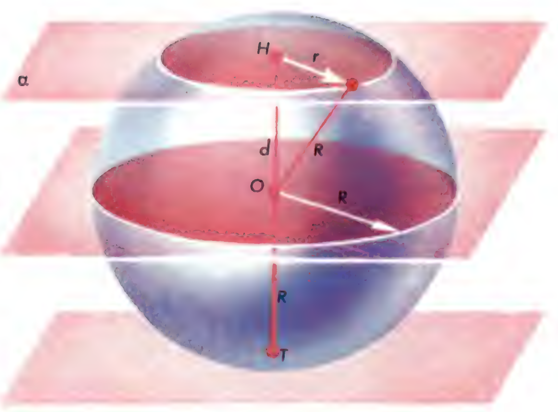


СФЕРА И ШАР

Точки пространства, удаленные от данной точки O на данное расстояние R, образуют сферу с центром O и радиусом R. Сфера ограничивает шар, состоящий из точек, удаленных от O на расстояние, не большее R. Эти геометрические объекты, так же как *окружность* и *круг*, рассматривали еще в глубокой древности. Открытие шарообразности Земли, появление представлений о небесной сфере дали толчок к развитию специальной науки – сферики, изучающей расположенные на сфере фигуры (см. *Сферическая геометрия*). Рассмотрим основные вопросы классической стереометрии: взаимное расположение шара (сферы) и других пространственных фигур, измерение объема шара и его частей, а также площади сферы и ее частей.

Прежде всего, плоскость α, проведенная на расстоянии $d < R$ от центра O шара радиуса R, в пересечении с шаром дает круг радиуса

Рис. 1



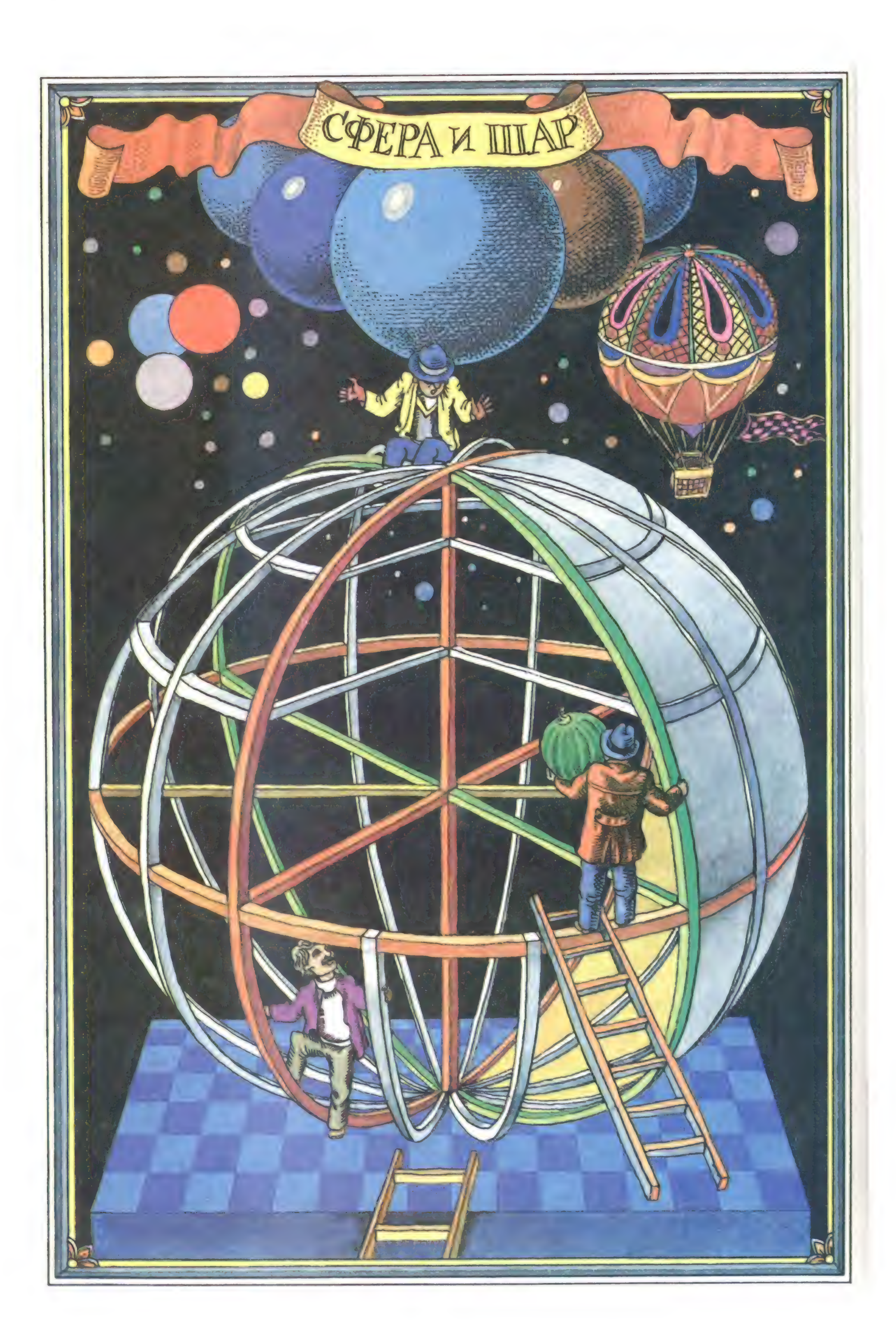
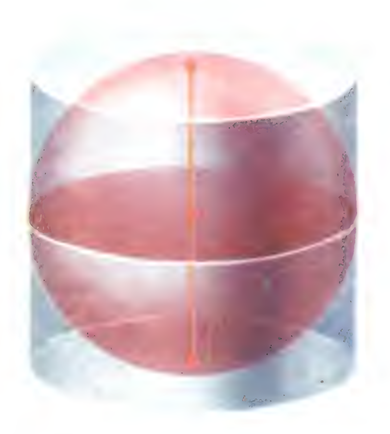

СФЕРА И ШАР

Рис. 2



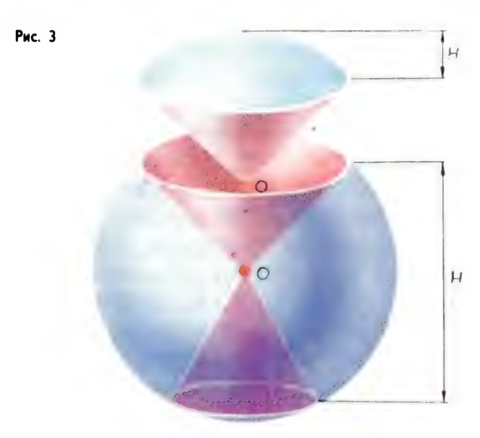
Рис. 4



$r = \sqrt{R^2 - d^2}$ с центром в точке H – основании перпендикуляра, проведенного из O к α (рис. 1). Если плоскость α отстоит от центра O на расстояние $d = R$, то α имеет с шаром (и сферой) единственную общую точку T. Такие плоскости называются касательными к шару (сфере); они характеризуются тем, что перпендикулярны радиусу OT, проведенному в точку касания.

Круговое сечение шара делит его на два шаровых сегмента, а сферу – на две сегментные поверхности. Часть шара, ограниченная двумя параллельными круговыми сечениями и лежащим между ними сферическим поясом (или зоной), называется шаровой зоной (рис. 2). Радиусы, проведенные от центра шара к точкам сферы, принадлежащим одной сегментной поверхности или сферическому поясу, образуют шаровой сектор – он может быть ограничен сферическим сегментом или зоной и одной или двумя *коническими поверхностями* (рис. 3). Высота шаровой или сферической зоны – это расстояние между плоскостями сечений; высота шарового сегмента или сегментной поверхности определяется как расстояние от плоскости сечения до параллельной ей плоскости, касательной к этому сегменту (рис. 2). Высоту шарового сектора определяют как высоту соответствующей сегментной поверхности или сферического пояса (рис. 3).

Рис. 3



Еще в Древней Греции умели вычислять объемы шаровых секторов и площади сферических зон или сегментов по формулам:

$$V_c = \frac{2}{3}\pi R^2 H, \ S_з = 2\pi R H,$$

где π, как обычно, – отношение длины окружности к ее диаметру. Рассматривая шар и сферу как частные случаи шарового сектора и сферической зоны – с высотами $H = 2R$, – мы получаем формулы для объема шара и площади сферы:

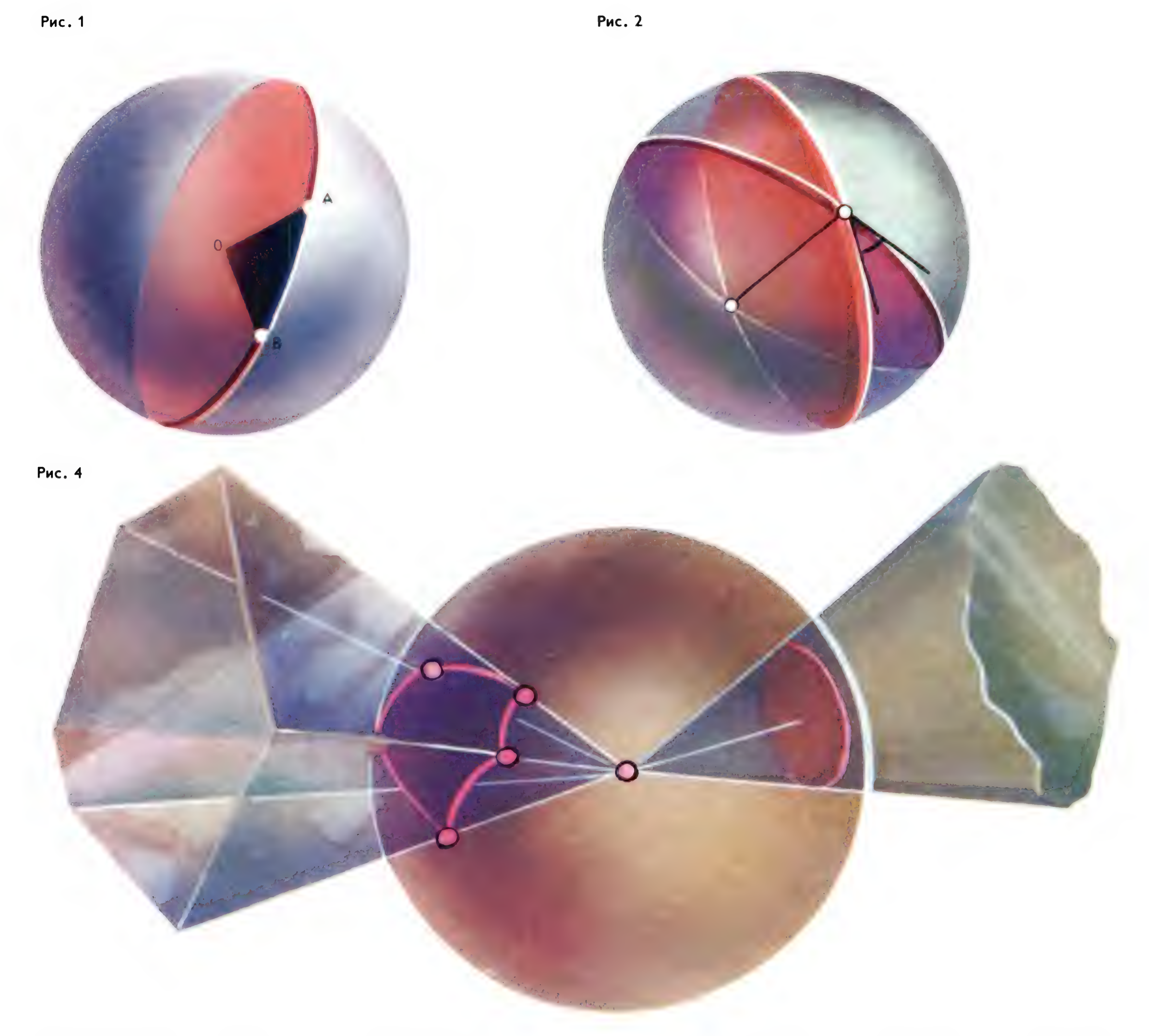
$$V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3, \ S_{сф} = 4\pi R^2.$$

Архимед интерпретировал эти формулы так: объем и поверхность шара составляют 2/3 от объема и полной поверхности описанного около шара цилиндра (рис. 4; по желанию Архимеда такой чертеж был изображен на его гробнице).

СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Сферическая геометрия – раздел математики, в котором изучаются фигуры, расположенные на сфере (см. *Сфера и шар*). Сферическая геометрия возникла в связи с потребностями астрономии.

Роль прямых в сферической геометрии играют большие окружности, т. е. окружности, получающиеся в пересечении сферы с плоскостями, проходящими через центр сферы. Через две не являющиеся диаметрально противоположными точки сферы A и B можно провести единственную большую окружность (рис. 1), что вполне соответствует аксиоме



планиметрии. Точки A и B разбивают эту большую окружность на две дуги – два сферических отрезка, меньший из которых является кратчайшей линией на сфере, соединяющей A с B. Длину сферического отрезка удобно измерять величиной угла, под которым он виден из центра сферы (рис. 1). Если углы измерять в радианах (см. *Угол*), то на сфере радиуса 1 такое измерение отрезка равно обычной длине дуги.

В сферической геометрии в отличие от планиметрии отсутствуют параллельные сферические прямые: любые две большие окружности пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы (рис. 2). Угол между сферическими прямыми – большими окружностями – определяется как угол между их плоскостями, или, что то же самое, как угол между касательными к этим окружностям в точке их пересечения (рис. 2).

Если провести на сфере три большие окружности (рис. 3), то сфера разобьется на восемь *треугольников*. В отличие от планиметрии сумма углов любого сферического треугольника больше 180°, или π, причем она не постоянна, а зависит от площади треугольника. А именно площадь треугольника на сфере радиуса 1 связана с суммой его углов A, B и C формулой Жирара (А. Жирар – нидерландский математик, 1595–1632):

$$S_{ABC} = A + B + C - \pi$$

(углы A, B, C измеряются в радианах).

Для сферических треугольников справедливы три известных в планиметрии признака равенства: по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам, по трем сторонам. На сфере справедлив еще один признак равенства треугольников – по трем углам. Подобных, но не равных между собой сферических треугольников не существует. Для сферических треугольников, однако, остаются справедливыми многие теоремы планиметрии, например теоремы о пересечении в одной точке серединных перпендикуляров к сторонам, биссектрис внутренних углов, медиан и даже высот, лишь с той разницей, что эти линии дают сразу по две диаметрально противоположные точки пересечения. Теоремы косинусов и синусов

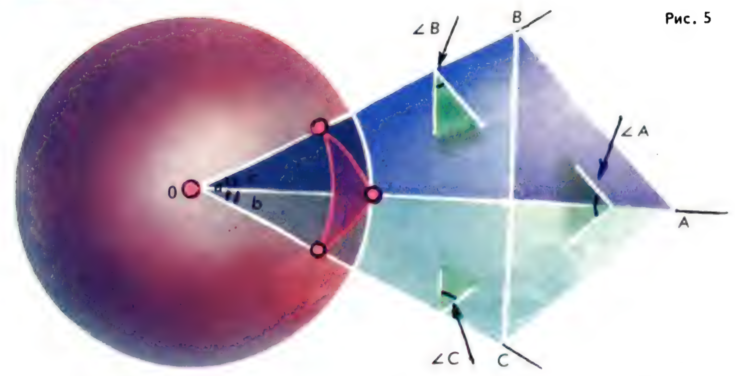
Рис. 3



находящийся в центре небесной сферы, которая равномерно вращается около своей оси. При изучении закономерностей движения светил возникли многочисленные математические задачи, связанные со свойствами сферы и фигур, которые образуют на ней большие окружности.

Автором первого капитального сочинения о «сферике» – так называли сферическую геометрию древние греки – был, по-видимому, математик и астроном Евдокс Книдский (ок. 408–355 гг. до н. э.). Но самым значительным произведением была «Сферика» Менелая

Рис. 5



Александрийского, греческого ученого, жившего в I в., который обобщил результаты своих предшественников и получил большое количество новых результатов. Построена его книга аналогично «Началам» Евклида, и долгое время она служила учебником для астрономов. В IX–XIII вв. «Сферика», переведенная на арабский язык, внимательно изучалась математиками Ближнего и Среднего Востока, откуда в XII в., в переводе с арабского, стала известна в Европе.

Сферическая геометрия нужна не только астрономам, штурманам морских кораблей, самолетов, космических кораблей, которые по звездам определяют свои координаты, но и строителям шахт, метрополитенов, тоннелей, а также при геодезических съемках больших территорий поверхности Земли, когда становится необходимым учитывать ее шарообразность.

в сферической геометрии приобретают несколько необычный вид: для треугольника ABC с углами A, B, C и противолежащими сторонами соответственно a, b и c (напомним, что стороны измеряются как соответствующие центральные углы):

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b +$$

$$+ \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C$$ (*теорема косинусов*)

и $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$ (*теорема синусов*).

Сферическая геометрия представляет собой своеобразный мост между планиметрией и стереометрией, так как сферические многоугольники получаются в пересечении сферы с многогранными углами с вершинами в центре сферы, сферические окружности – в пересечении сферы с коническими поверхностями и т. д. (рис. 4). Все теоремы о сферических треугольниках можно переформулировать в терминах трехгранных углов; в частности, две последние формулы часто называют теоремами косинусов и синусов для трехгранного угла (рис. 5).

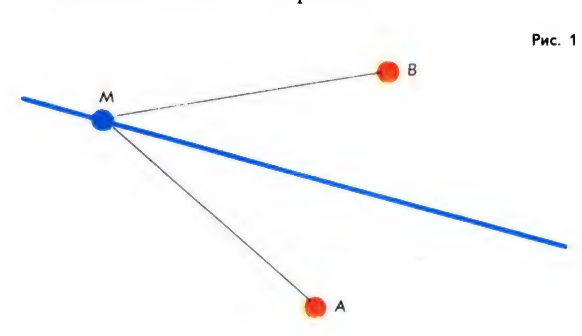
Интересно, что исторически эти теоремы предшествовали аналогичным теоремам плоской тригонометрии, поскольку потребность людей в знаниях по астрономии, необходимых для исчисления времени, возникла прежде других потребностей человека, связанных с измерением углов. Исходя из геоцентрической гипотезы Вселенной, древнегреческие астрономы рассматривали Землю как шар,

Т

ТЕОРЕМА

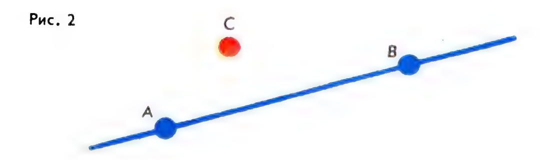
Теорема – высказывание, правильность которого установлена при помощи рассуждения, *доказательства*. Примером теоремы может служить утверждение о том, что сумма величин углов произвольного треугольника равна 180°. Проверить это можно было бы опытным путем: начертить треугольник, измерить транспортиром величины его углов и, сложив их, убедиться, что сумма равна 180° (во всяком случае, в пределах той точности измерения, которую допускает транспортир). Такую проверку можно было бы повторить несколько раз для различных треугольников. Однако справедливость этого утверждения устанавливается в курсе геометрии не опытной проверкой, а при помощи доказательства, которое убеждает нас в том, что это утверждение справедливо для любого треугольника. Таким образом, утверждение о сумме углов треугольника является теоремой.

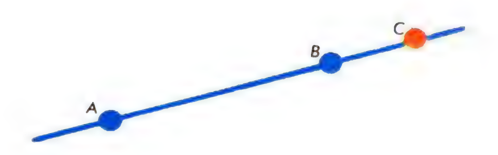
Рис. 1



В формулировках теорем, как правило, встречаются слова «если..., то...», «из... следует...» и т. д. В этих случаях для сокращения записи используют знак $\Rightarrow$. Возьмем в качестве примера теорему о том, что точка M, одинаково удаленная от двух точек A и B, принадлежит оси симметрии этих точек (рис. 1). Ее можно подробнее сформулировать так: (для любых точек A, B, M) $(MA = MB)$ $\Rightarrow$ (M принадлежит оси симметрии точек A и B).

Рис. 2





Аналогичным образом могут быть записаны и другие геометрические теоремы: сначала идет разъяснительная часть теоремы (описывающая, какие точки или фигуры рассматриваются в теореме), а затем – два утверждения, соединенные знаком $\Rightarrow$. Первое из этих утверждений, стоящее после разъяснительной части и перед знаком $\Rightarrow$, называется условием теоремы, второе, стоящее после знака $\Rightarrow$, называется заключением теоремы.

Меняя местами условие и заключение и оставляя без изменения разъяснительную часть, мы получаем новую теорему, которая называется обратной первоначальной. Например, для рассмотренной выше теоремы обратной будет следующая: (для любых точек A, B, M) (точка M принадлежит оси симметрии точек A и B) $\Rightarrow$ $(MA = MB)$. Короче: если точка M принадлежит оси симметрии точек A и B, то точка M одинаково удалена от точек A и B. В данном случае и исходная теорема, и обратная ей теорема справедливы.

Однако из того, что некоторая теорема верна, не всегда следует, что обратная ей теорема также верна. Например, теорема: (точка C не принадлежит прямой AB) $\Rightarrow$ $(AB < AC + BC)$ справедлива, но обратная ей теорема: $(AB < AC + BC)$ $\Rightarrow$ (точка C не принадлежит прямой AB) – неверна, так как при условии $(AB < AC + BC)$ точка C может быть расположена на прямой AB, но вне отрезка AB (рис. 2).

Таким образом, доказав некоторую теорему, мы еще не можем утверждать, что верна и обратная теорема. Справедливость обратной теоремы требует отдельного доказательства.

В алгебре примерами теорем могут служить различные *тождества*, например равенства:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Они выводятся (доказываются), исходя из *аксиом*, и потому являются теоремами. Другим примером теорем в алгебре может служить теорема Виета о свойствах корней *квадратного уравнения*.

Большую роль в математике играют так называемые теоремы существования, в которых утверждается лишь существование какого-либо числа, фигуры и т. п., но не указы-

вается, как это число (или фигура) могут быть найдены. Например: всякое уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с действительными коэффициентами имеет при нечетном n хотя бы один действительный корень, т.е. существует число $x_0 \in R$, являющееся корнем этого уравнения.

Некоторым видам теорем дают особые названия, например лемма, следствие. Они имеют дополнительный оттенок. Леммой обычно называют вспомогательную теорему, саму по себе мало интересную, но нужную для дальнейшего. Следствием называют утверждение, которое может быть легко выведено из чего-то ранее доказанного.

Иногда теоремой называют то, что правильнее было бы называть гипотезой. Например, «великая теорема Ферма» (см. *Ферма великая теорема*), утверждающая, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целых положительных решений при $n > 2$, пока не доказана.

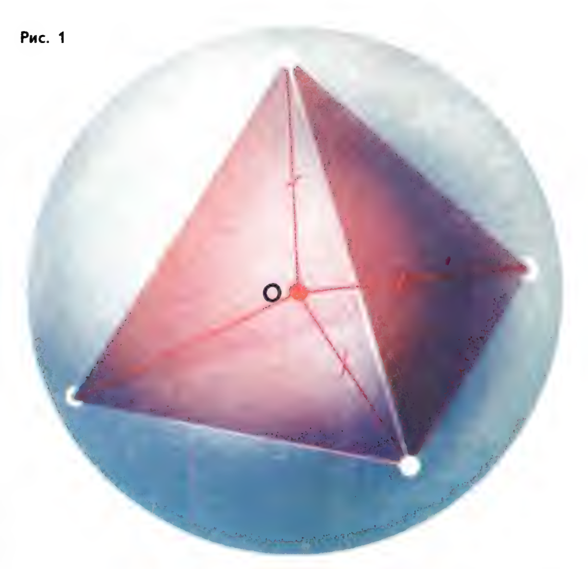
Наряду с аксиомами и определениями теоремы являются основными типами математических предложений. Важные факты каждой математической науки (геометрии, алгебры, теории функций, теории вероятностей и т.д.) формулируются в виде теорем. Однако овладение математикой не сводится к тому, чтобы изучить аксиомы, определения и основные теоремы. Математическое образование включает также умение ориентироваться в богатстве фактов математической теории, владение основными методами решения задач, понимание лежащих в основе математики идей, умение применять математические знания при решении практических задач.

Не менее важны пространственное представление, навыки графического «видения», умение находить примеры, иллюстрирующие то или иное математическое понятие, и т.д. Таким образом, теоремы составляют только формальный «остов» математической теории, и знакомство с теоремами представляет собой лишь начало глубокого овладения математикой.

ТЕТРАЭДР

Тетраэдр, или треугольная пирамида,– простейший из многогранников, подобно тому как треугольник – простейший из многоугольников на плоскости. Слово «тетраэдр» образовано из двух греческих слов: *tetra* – «четыре» и *hedra* – «основание», «грань». Тетраэдр $ABCD$ задается четырьмя своими вершинами – точками A, B, C, D, не лежащими в одной плоскости; грани тетраэдра – четыре треугольника; ребер у тетраэдра шесть. В отличие от произвольной n-угольной пирамиды (при $n \geqslant 4$) в качестве основания тетраэдра может быть выбрана любая его грань.

Рис. 1



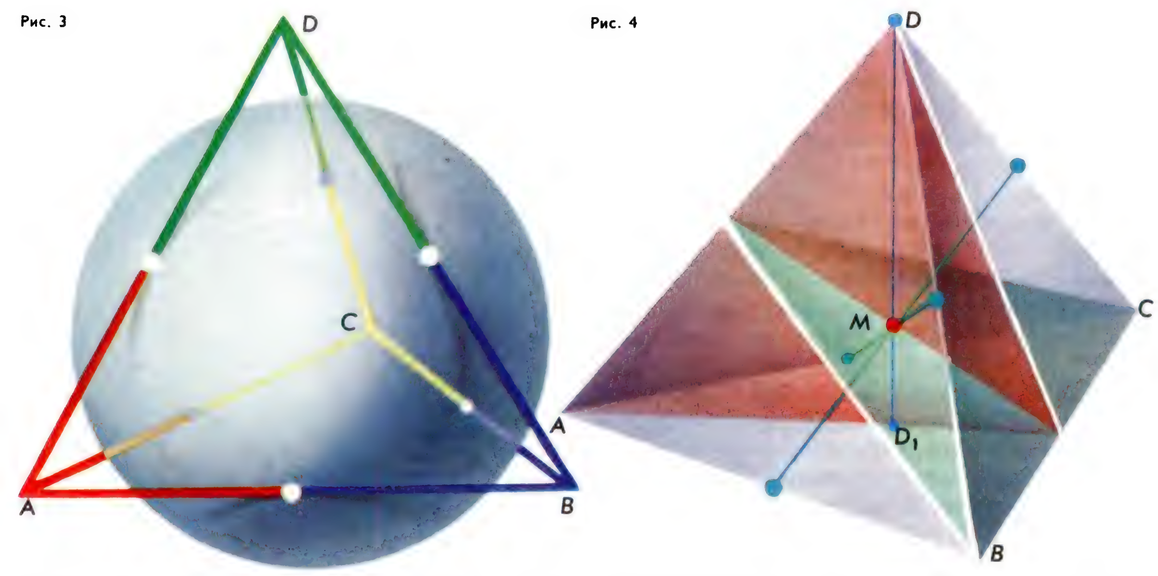
Многие свойства тетраэдров сходны с соответствующими свойствами треугольников. В частности, 6 плоскостей, проведенных через середины ребер тетраэдра перпендикулярно к ним, пересекаются в одной точке. В этой же точке O пересекаются и 4 прямые, проведенные через центры описанных около граней

Рис. 2



окружностей перпендикулярно к плоскостям граней, и O является центром описанной около тетраэдра сферы (рис. 1). Аналогично 6 биссекторных полуплоскостей тетраэдра, т.е. полуплоскостей, делящих двугранные углы при ребрах тетраэдра пополам, тоже пересекаются в одной точке – в центре вписанной в тетраэдр сферы – сферы, касающейся всех четырех граней тетраэдра. Любой треугольник имеет, вдобавок к вписанной, еще 3 вневписанные окружности (см. *Треугольник*), а вот тетраэдр может иметь любое число – от 4 до 7 – вневписанных сфер, т.е. сфер, касающихся плоскостей всех четырех граней тетраэдра. Всегда существуют 4 сферы, вписанные в усеченные трехгранные углы, один из которых показан на рис. 2, справа. Еще 3 сферы могут быть вписаны (не всегда!) в усеченные

Рис. 3 Рис. 4

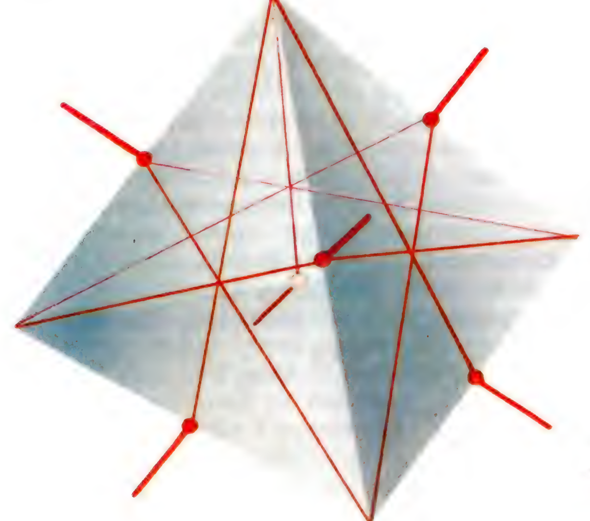


двугранные углы при ребрах тетраэдра – один из них показан на рис. 2, слева.

Для тетраэдра существует еще одна возможность его взаимного расположения со сферой – касание с некоторой сферой всеми своими ребрами (рис. 3). Такая сфера – иногда ее называют «полувписанной» – существует лишь в том случае, когда суммы длин противоположных ребер тетраэдра равны: $AB + CD = AC + BD = AD + BC$ (рис. 3).

Для любого тетраэдра справедлив аналог теоремы о пересечении медиан треугольника в одной точке. Именно, 6 плоскостей, проведенных через ребра тетраэдра и середины противолежащих ребер, пересекаются в одной точке – в центроиде тетраэдра (рис. 4). Через центроид M проходят также 3 «средние линии» – отрезки, соединяющие середины трех пар противоположных ребер, причем они делятся точкой M пополам. Наконец, через M проходят и 4 «медианы» тетраэдра – отрезки, соединяющие вершины с центроидами противолежащих граней, причем они делятся в точке M в отношении 3:1, считая от вершин.

Рис. 5



Важнейшее свойство треугольника – равенство $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (или π) – разумного «тетраэдрического» аналога не имеет: сумма всех 6 двугранных углов тетраэдра может принимать любое значение между 2π и 3π. (Конечно, сумма всех 12 плоских углов тетраэдра – по 3 при каждой вершине – не зависит от тетраэдра и равна 4π.)

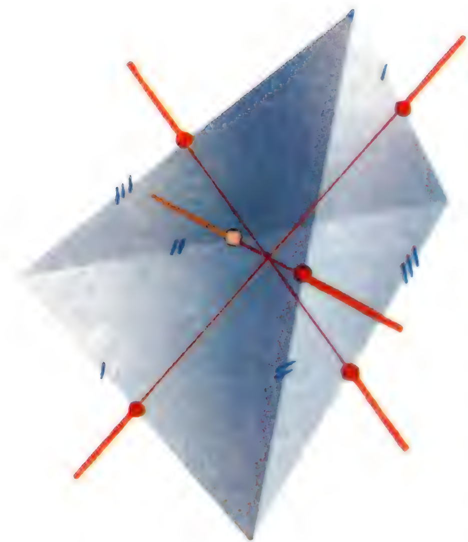
Треугольники принято классифицировать по степени их симметричности: правильные или равносторонние треугольники имеют три оси симметрии, равнобедренные – одну. Классификация тетраэдров по степени симметричности богаче. Самый симметричный тетраэдр – правильный, ограниченный четырьмя правильными треугольниками. Он имеет 6 плоскостей симметрии – они проходят через каждое ребро перпендикулярно противолежащему ребру – и 3 оси симметрии, проходящие через середины противолежащих ребер (рис. 5). Менее симметричны правильные треугольные пирамиды (3 плоскости симметрии, рис. 6) и равногранные тетраэдры (т. е. тетраэдры с равными гранями – 3 оси симметрии, рис. 7).

В заключение приведем две формулы для вычисления объема тетраэдра. Они не очень

Рис. 6



Рис. 7



похожи на известные формулы для площади треугольника, но некоторую аналогию можно все-таки проследить.

1) $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h_D$,

где высота h_D в данном случае есть расстояние от вершины D до плоскости грани ABC.

2) $V_{ABCD}=\frac{2}{3}\frac{S_{ABC}\cdot S_{ABD}}{AB}\cdot\sin(\angle AB)$,

где $(\angle AB)$ – двугранный угол при ребре AB. Есть и другие формулы для вычисления объема тетраэдра.

ТОЖДЕСТВО

Тождество – запись вида $A=B$, где A и B – выражения, принимающие одинаковые значения при всех значениях входящих в A и B переменных, взятых из некоторого множества M.

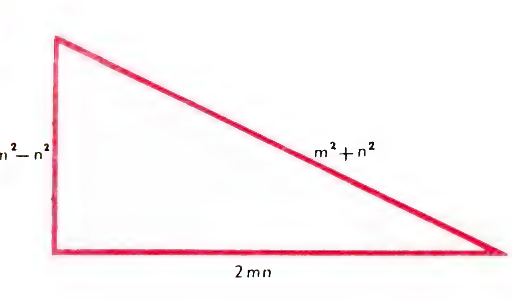
Например, равенство

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

является тождеством (на множестве всех действительных чисел). Это тождество позволяет построить бесконечно много прямоугольных треугольников с целыми сторонами. Например, при $m=2$, $n=1$ получаем: $3^2+4^2=5^2$, а при $m=3$, $n=2$ получаем: $5^2+12^2=13^2$. Равенство

$$m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2)$$

также является тождеством на множестве всех действительных чисел; из него вытекает, в частности, что при целых m и n число m^3+n^3 делится нацело на $m+n$.



Будет ли равенство $A=B$ тождеством, зависит от того, из какого множества выбираются значения переменных. Например, равенство $\sqrt{x^2}=x$ является тождеством на множестве всех неотрицательных действительных чисел, но не является тождеством на множестве всех действительных чисел.

Обычно в качестве множества M возможных значений переменных рассматривают множество всех тех значений переменных, при которых оба выражения A и B имеют смысл. Отметим, что это соглашение требует известной осторожности при обращении с тождествами. Например, согласно этому соглашению равенства $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$ и $(\sqrt{x})^2=x$ являются тождествами, а равенство $\sqrt{x^2}=x$ тождеством не является. Если выражения A и B тождественно равны, то это записывают формулой $A\equiv B$.

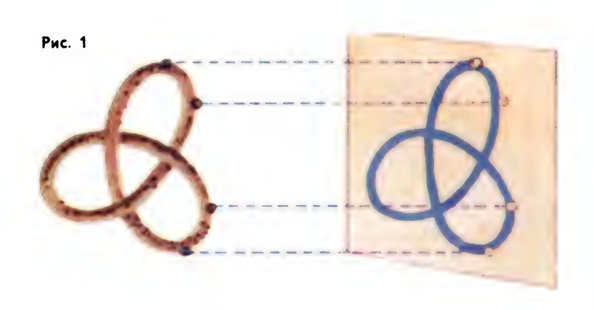
ТОПОЛОГИЯ

Топология – одна из математических наук, возникшая во второй половине XIX в. Она изучает те свойства геометрических фигур, которые могут быть описаны с помощью понятия непрерывности.

Идеи топологии можно пояснить следующим образом. Отображение f, переводящее фигуру A в некоторую другую фигуру B, непрерывно, если оно не имеет разрывов, т. е., грубо говоря, если «близкие» между собой точки фигуры A переходят в результате этого отображения в «близкие» точки фигуры B. Например, проектирование фигуры в плоскость (рис. 1) представляет собой непрерывное отображение (см. *Геометрические преобразования*). Приведем другой пример: если фигура A, будто резиновая, произвольным образом без разрывов деформируется, изгибаясь, растягиваясь или сжимаясь, после чего деформированная фигура A укладывается каким-то образом в фигуру B (возможно, со склеиваниями, т. е. так, что различные части фигуры A накладываются на одну и ту же часть фигуры B), то в результате мы получаем непрерывное отображение фигуры A в фигуру B.

Отображение f фигуры A на всю фигуру B называется гомеоморфизмом (от греческих

Рис. 1



слов *homoios* – «подобный», «одинаковый» и *morphe* – «вид», «форма»), если оно происходит без разрывов и без склеиваний, т.е. не только отображение f, но и обратное отображение f^{-1} являются непрерывными. Например, буквы Г, Л, М, П, С (если они изображены тонкими линиями без «хвостиков») гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита. В качестве другого примера укажем, что треугольник, квадрат (и вообще любой выпуклый многоугольник) гомеоморфны кругу – углы многоугольника можно «вдавить» и сделать округлыми (рис. 2). Далее, поверхности шара, куба, цилиндра – все они гомеоморфны между собой. Однако эти поверхности не гомеоморфны тору – фигуре,

Рис. 2



которую можно наглядно представить себе как поверхность баранки или автомобильной шины. Поверхность гири гомеоморфна тору.

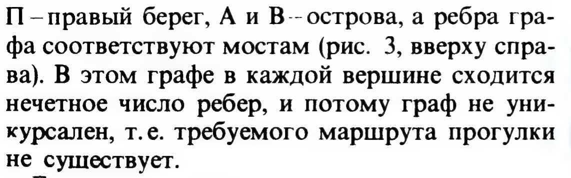
Поучительно сравнить понятие гомеоморфизма и понятие равенства фигур. В геометрии рассматриваются отображения, сохраняющие расстояние между точками. Они называются движениями, или перемещениями. В результате движения каждая фигура перекладывается на новое место как твердое целое, без изменения расстояний. Две фигуры, которые переводятся одна в другую (совмещаются) с помощью движения, называются равными и рассматриваются как одинаковые, как не отличающиеся (с геометрической точки зрения) друг от друга. В топологии рассматриваются отображения более общие, чем движения, а именно гомеоморфные отображения. Две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые, не отличающиеся друг от друга. Те свойства фигур, которые сохраняются при гомеоморфных отображениях, называются топологическими свойствами фигур; эти свойства и изучаются в топологии.

Одно из давно известных топологических свойств связано с именем Л. *Эйлера.* В топологии рассматриваются *графы* – фигуры, состоящие из конечного числа дуг. В графе имеется несколько вершин, и некоторые из них соединены непересекающимися дугами. Граф называется уникурсальным (или эйлеровым), если его можно «нарисовать одним росчерком», т.е. пройти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа быть уникурсальным является топологическим свойством. Можно доказать, что граф в том, и только в том, случае уникурсален, если в каждой его вершине, кроме, может быть, двух, сходится четное число ребер. С уникурсальными графами связана «задача о кенигсбергских мостах», рассмотренная Эйлером. В то время в Кенигсберге (ныне г. Калининград) было 7 мостов через реку Преголь. Вопрос состоит в том, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города граф, в котором вершина Л обозначает левый берег,

Рис. 3 «Топология, самая юная и самая мощная ветвь геометрии, наглядно демонстрирует плодотворное влияние противоречий между интуицией и логикой».

Р. Курант





П – правый берег, А и В – острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис. 3, вверху справа). В этом графе в каждой вершине сходится нечетное число ребер, и потому граф не уникурсален, т. е. требуемого маршрута прогулки не существует.

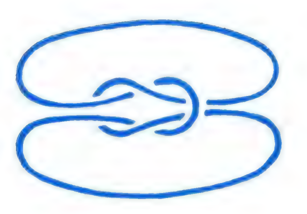


Рис. 4. Схема морского узла.

Еще одно интересное топологическое свойство графа – вложимость в плоскость. Один пример графа, невложимого в плоскость (домики и колодцы), строится следующим образом. На плоскости даны шесть точек $Д_1$, $Д_2$, $Д_3$ (домики) и $К_1$, $К_2$, $К_3$ (колодцы); можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу, так чтобы никакие две тропинки не пересекались? Ответ отрицательный: если мы проведем все тропинки, кроме одной, то для последней тропинки уже не будет места на плоскости. Таким образом, этот граф невложим в плоскость. Другой пример графа, невложимого в плоскость, дан в правом нижнем углу рис. 3 (каждые две из пяти вершин соединены ребром); на этом рисунке два ребра пересекаются. Интересно отметить, что графы, о ко-

ПАВЕЛ СЕРГЕЕВИЧ АЛЕКСАНДРОВ (1896–1982)



П. С. Александров – один из создателей *топологии* – нового большого направления в современной математике, Герой Социалистического Труда (1969), лауреат Государственной премии СССР (1943), академик (1953).

П. С. Александров прожил большую и яркую жизнь. Он родился в семье врача, в г. Богородске (ныне Ногинск) Московской области. Уже к 14 годам он нашел в математике свое призвание, но, кроме того, очень хорошо знал и любил литературу (особенно поэзию), театр, музыку.

В 1913 г. П. С. Александров становится студентом математического отделения Московского университета. На следующий год он впервые встречается с представителем нового в те годы теоретико-множественного направления – *Н. Н. Лузиным* и сразу становится его близким учеником. Уже через год, в 19 лет, П. С. Александров, решая задачу, поставленную Н. Н. Лузиным, доказывает теорему о мощности так называемых борелевских множеств и сразу выдвигается в первые ряды московских математиков. Следующая предложенная ему Н. Н. Лузиным задача – так называемая континуум-проблема (см. *Множество*) – была одной из труднейших математических задач того времени. Относительно неудачная попытка ее решить (как стало ясно в дальнейшем, континуум-проблема и не могла быть решена в круге идей и методов школы Лузина) заставила П. С. Александрова усомниться в своих математических способностях. Он становится режиссером в театре, заведует театральной секцией отдела народного образования, читает лекции по литературе и музыке. Но этот период – лишь краткий эпизод в жизни П. С. Александрова: уже в 1921 г. он возвращается в Московский университет, чтобы никогда его не покидать.

Самый плодотворный период в жизни П. С. Александрова – период, когда он вместе с П. С. Урысоном создает основы топологии. В 1921–1924 гг. ими сделан фундаментальный вклад в основы теоретико-множественной топологии; в 1925–1926 гг. П. С. Александров создает теорию гомологий общих топологических пространств, позволившую применить алгебраические методы к задачам теоретико-множественной топологии. За эти работы П. С. Александрова в 1929 г. избирают в члены-корреспонденты Академии наук СССР. С 1929 г. П. С. Александров – профессор Московского университета, а с 1932 г. – президент Московского математического общества. Впоследствии ученый разработал гомологическую теорию размерности, окончательно закрепившую за Александровым репутацию одного из первых математиков тех лет.

Павлу Сергеевичу Александрову принадлежит заслуга в создании научной школы. Человек огромного личного обаяния, высочайшей разносторонней культуры, он обладал способностью буквально притягивать к себе молодых талантливых людей.

торых идет речь, являются «эталонами» графов, невложимых в плоскость: любой граф, невложимый в плоскость, содержит хотя бы один из них. Это было доказано польским математиком К. Куратовским (1896–1980).

Если же граф вложи́м в плоскость, то он разбивает плоскость на $К - В + Р + 1$ областей, где К – число связных кусков, из которых состоит граф, В – число его вершин, а Р – число ребер. Это одна из важных формул, доказываемых в топологии графов.

Из топологических свойств, связанных с поверхностями, упомянем два. Первое из них (теорема Эйлера) утверждает, что для связного графа, начерченного на сфере (или гомеоморфной ей поверхности), справедливо равенство

$$В - Р + Г = 2,$$

где В – число вершин, Р – число ребер графа, а Г – число областей (граней), на которые этот граф разбивает сферу. В частности, это соотношение справедливо для любого выпуклого многогранника.

Другой пример – «теорема о еже»: если из каждой точки поверхности сферы растет «колючка» (ненулевой вектор) и направления «колючек» от точки к точке меняются непрерывно, то найдется хотя бы одна «колючка», направленная перпендикулярно к сфере. Иначе говоря, причесать такого «сферического ежа», чтобы он нигде не кололся, невозможно.

ЛЕВ СЕМЕНОВИЧ ПОНТРЯГИН (1908–1988)



Л. С. Понтрягин – советский математик, академик, Герой Социалистического Труда. Академик *П. С. Александров* так отозвался о бывшем своем ученике: «Л. С. Понтрягин, уже ранее зарекомендовавший себя несколькими блестящими работами... выступает как ученый, создавший свое собственное направление в математике и являющийся в настоящее время, бесспорно, самым крупным (в международном масштабе) представителем так называемой топологической алгебры, то есть совокупности вопросов, пограничных между алгеброй и топологией».

Не прост был путь Л. С. Понтрягина в математику. В 14 лет вследствие несчастного случая он лишился зрения. Лишь благодаря своей воле, мужеству и упорному труду он сумел успешно окончить школу и поступить на физико-математический факультет Московского университета. В эти трудные дни мать стала ему незаменимым помощником, читала вслух учебники и научные статьи.

Посещая семинар П. С. Александрова, он увлекся топологическими проблемами, которым посвятил многие годы своего научного творчества. В 1938 г. он написал труд «Непрерывные группы», за который ему была присуждена Государственная премия. Почти сразу же книгу издали за рубежом.

В начале 50-х гг. Л. С. Понтрягин и его ученики обратились к новому направлению исследований, связанному с математическим решением некоторых технических проблем. Вскоре ими был открыт «принцип максимума», ставший универсальным и действенным математическим средством поиска оптимальных режимов для тех или иных процессов: для наивыгоднейшего расходования топлива при запуске ракеты, для наиболее экономичной работы ядерного реактора, для наилучшей схемы электропривода и т. д. Вначале «принцип максимума» был лишь гипотезой. Доказать ее удалось ученикам Л. С. Понтрягина: в линейном случае доказательство было найдено Р. В. Ганкрелидзе, а в общем случае – В. Г. Болтянским. Открытие «принципа максимума» привело к созданию новой области математики – теории оптимального управления. В 1961 г. Л. С. Понтрягин и его ученики обобщили свои достижения в новой монографии, удостоенной Ленинской премии.

Сильная тренированная память, справлявшаяся с громоздкими формулами и выражениями, позволяла Л. С. Понтрягину успешно выполнять глубокие теоретические исследования, не прибегая к бумаге. Им опубликовано свыше 150 работ. В 1958 г. его избрали академиком.

За плодотворную научную деятельность Л. С. Понтрягину присвоено звание Героя Социалистического Труда, он награжден четырьмя орденами Ленина, а также другими орденами и медалями.

Научную деятельность Л. С. Понтрягин сочетал с активным интересом к преподаванию. Его учебник по дифференциальным уравнениям, не раз издававшийся в СССР и за рубежом, удостоен Государственной премии. Специально для школьников он написал несколько книг из серии «Знакомство с высшей математикой».

Для того чтобы определить степень сцепления двух узлов, вводится понятие коэффициента зацепления. На рис. 5 он равен 0, а на рис. 6 – 1.

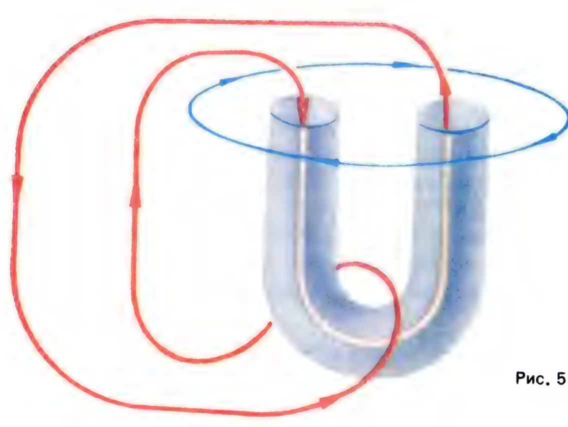


Рис. 5

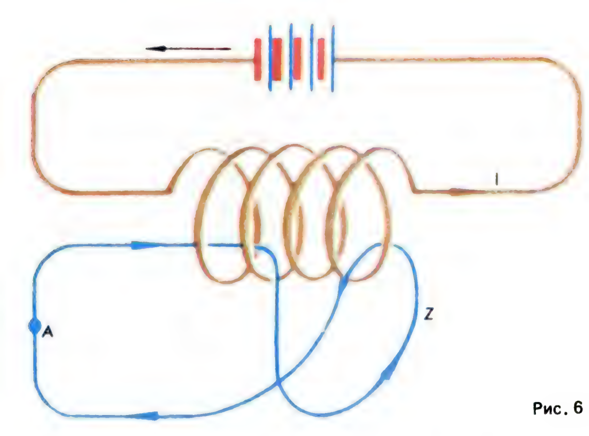


Рис. 6

Разумеется, все это лишь отдельные наглядные примеры топологических фактов. В наши дни топология – большая, обстоятельная наука, в которой изучаются глубинные свойства геометрических фигур. Проблема четырех красок (см. *Комбинаторика, Графы*), узлы, зацепления (рис. 4–6), природа *линий* и поверхностей и многое другое изучается в топологии. Даже так называемая основная теорема алгебры (см. *Многочлен*) является в действительности топологической теоремой. Современная топология находит ряд интересных и важных приложений в других разделах математики, в физике, например в электротехнике, в теории жидких кристаллов, в молекулярной биологии, в космогонии и т. д.

ТРЕУГОЛЬНИК

Простейший из *многоугольников* – треугольник – играет в геометрии особую роль. Без преувеличения можно сказать, что вся (или почти вся) геометрия со времен «Начал» Евклида покоится на «трех китах» – трех признаках равенства треугольников. Лишь на рубеже XIX–XX вв. математики научились строить геометрию на основе более фундаментального и общего, чем равенство треугольников, понятия *геометрического преобразования*.

За несколько тысячелетий геометры столь подробно изучили треугольник, что иногда говорят о «геометрии треугольника» как о самостоятельном разделе элементарной геометрии.

В треугольнике ABC выделяют 6 основных элементов – 3 (внутренних) угла A, B, C и 3 соответственно противолежащие им стороны a, b и c. Признаки равенства треугольников можно сформулировать так: треугольник однозначно (т. е. с точностью до равенства) восстанавливается по следующим тройкам основных элементов:

a, b и C; a, B и C; a, b и c.

Из школьного курса вам известны еще «три кита» евклидовой планиметрии – три признака подобия треугольников: треугольник с точностью до подобия восстанавливается по следующим парам величин:

$a:b$, C; $a:b$, $b:c$; A, B.

Заметим, что в признаках равенства нельзя взять любую тройку основных элементов, даже если один из них – сторона; на рис. 1 показано, например, что треугольник нельзя однозначно построить по элементам a, b и B: треугольники A_1BC и A_2BC имеют общие угол B и сторону $BC = a$, равные стороны A_1C и A_2C, но эти треугольники не равны.

Кроме того, элементы треугольника нельзя задать произвольно, даже если их только три. Например, чтобы можно было построить треугольник по трем сторонам a, b и c, необходимо (и достаточно) (см. *Необходимые и достаточные условия*), чтобы выполнялись три «неравенства треугольника»:

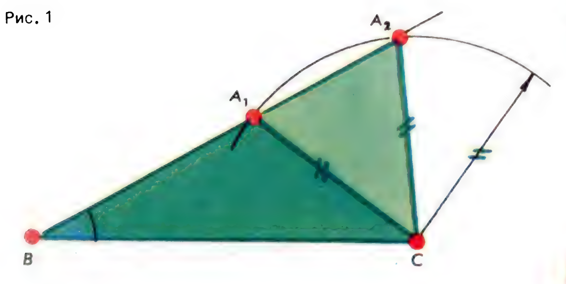
$a < b + c$; $b < a + c$; $c < a + b$.

Углы треугольника связаны более жестким соотношением:

$A + B + C = 180°$ (или π).

Анализируя первый и второй признаки равенства – по a, b, C или a, B, C, – мы приходим к выводу о том, что остальные элементы треугольника ABC, в частности сторона c, однозначно определяются имеющимися тремя элементами. Для стороны c соответствующие формулы даются теоремами косинусов и синусов:

Рис. 1



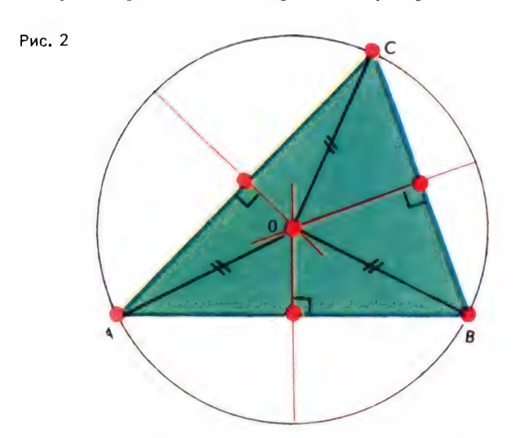
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \text{ и } c = a\frac{\sin C}{\sin A},$$

где $A = \pi - B - C$.

Центральное место в геометрии треугольника занимают свойства так называемых замечательных точек и линий, простейшие из которых мы и рассмотрим.

Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной около треугольника окружности (рис. 2). Этот факт следует из свойства серединного перпендикуляра d к отрезку: d состоит из тех, и только тех, точек, которые равноудалены от концов отрезка. Если для треугольника ABC серединные перпендикуляры к AB и BC пересекаются в точке O, то $|OA| = |OB|$ и $|OB| = |OC|$, поэтому $|OA| = |OC|$ и точка O обязана лежать на серединном перпендикуляре к третьей стороне AC.

Рис. 2



Биссектрисы трех внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – центре вписанной в треугольник окружности (рис. 3). Это следует из основного свойства биссектрисы l выпуклого угла: l состоит из тех, и только тех, точек угла, которые равноудалены от его сторон. Если рассмотреть дополнительно биссектрисы трех пар внешних углов треугольника, то получается еще три замечательные точки – центры вневписанных окружностей (рис. 4).

Рис. 3

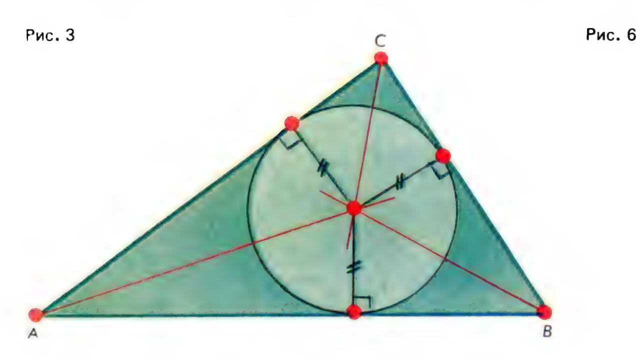
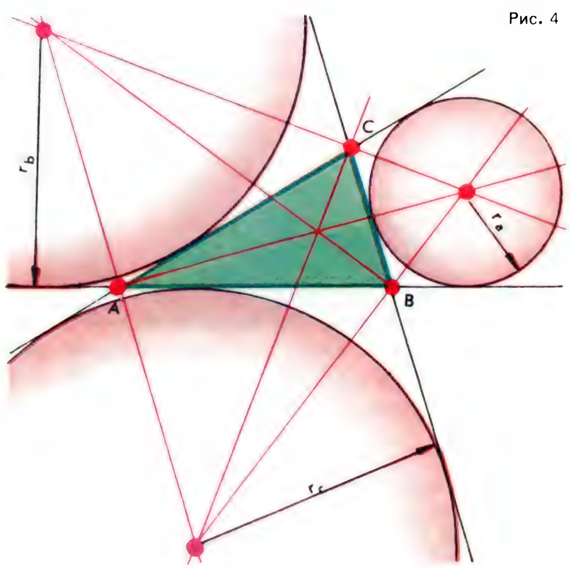


Рис. 4



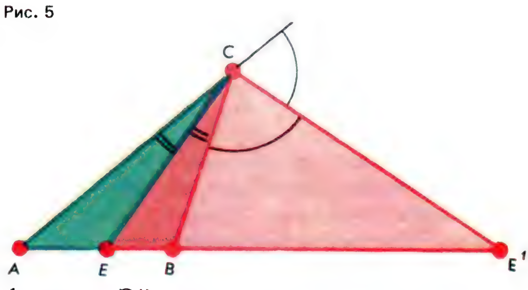
Радиусы описанной, вписанной и вневписанной окружностей R, r, r_a, r_b и r_c связаны красивым соотношением

$$r_a + r_b + r_c = r + 4R,$$

а расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей ρ можно найти по формуле Эйлера:

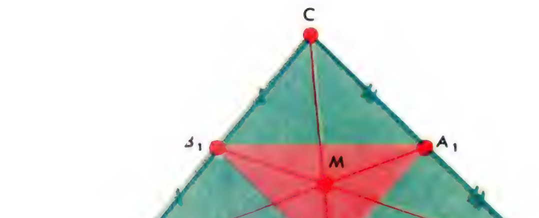
$$\rho^2 = R^2 - 2Rr.$$

Рис. 5



Здесь же приведем формулы для площади треугольника:

Рис. 6



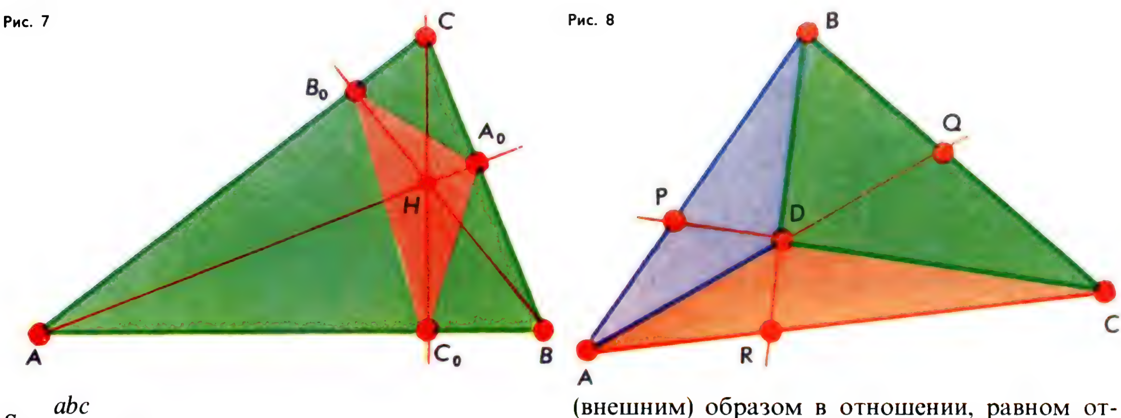


Рис. 7

Рис. 8

$$S = \frac{abc}{4R} = pr,$$

где p – полупериметр треугольника.

Среди свойств биссектрис треугольника выделяется такая теорема: биссектриса внутреннего (внешнего) угла C треугольника ABC делит противоположную сторону внутренним (внешним) образом в отношении, равном отношению прилежащих сторон; на рис. 5

$$AE : BE = AE' : BE' = AC : BC.$$

Все три медианы пересекаются в точке M (рис. 6), называемой центроидом треугольника ABC (который также является центром масс для тонкой треугольной пластины). Каж-

ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

Французский император Наполеон Бонапарт был любителем математики. Он находил время заниматься ею для собственного удовольствия, чувствовал в ней красоту и объект, достойный приложения остроумия и изобретательности. Одно из свидетельств тому – несколько составленных им геометрических задач.

Вот как можно сформулировать одну из них:

На сторонах произвольного треугольника ABC внешним образом построены как на основаниях равносторонние треугольники (рис. 1). Доказать, что центры этих треугольников также являются вершинами равностороннего треугольника.

Задача имеет довольно изящное решение. Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры равносторонних треугольников. Выполним дополнительное построение: соединим отрезками прямых точки O_1, O_2 и O_3 с ближайшими (к каждой из них) двумя вершинами треугольника ABC и между собой.

По свойствам равностороннего (правильного) треугольника $AO_1 = O_1B$, $BO_2 = O_2C$, $CO_3 = O_3A$; $\angle AO_1B = \angle BO_2C = \angle CO_3A = 120$ и $\angle O_1AO_3 + \angle O_1BO_2 + \angle O_2CO_3 = 360°$. Выделим шестиугольник $AO_1BO_2CO_3$, а внешние к нему невыпуклые четырехугольники отбросим. Получим фигуру, изображенную на рис. 2.

Отрезая теперь от упомянутого шестиугольника треугольники O_1AO_3 и O_2CO_3, перемещая их в плоскости в положение, которое указано на рис. 3, получаем четырехугольник $O_1DO_2O_3$. Отрезок O_1O_2 делит его на два равных (по трем сторонам) треугольника. Углы DO_2O_3 и DO_1O_3 равны 120° каждый. Поэтому углы $O_2O_1O_3$ и $O_1O_2O_3$ равны 60° каждый. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ равносторонний, что и требовалось доказать.

Задача эта может послужить отправным пунктом для небольшого геометрического исследования. Проверьте, будут ли центры равносторонних треугольников, построенных внутренним образом на сторонах произвольного треугольника как на основаниях, являться вершинами равностороннего треугольника.

Рис. 1

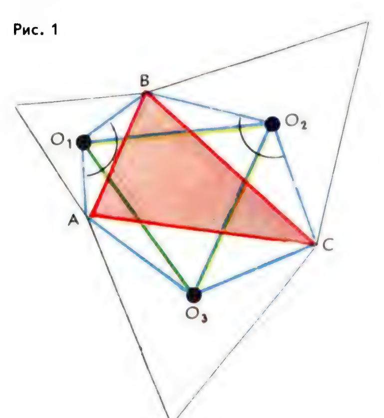
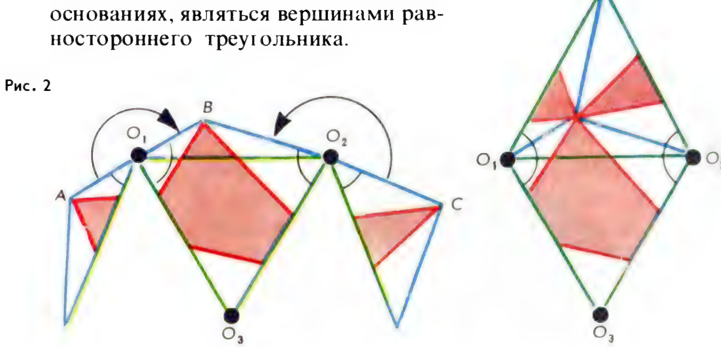


Рис. 2

Рис. 3



дая медиана делится точкой M в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины треугольника. Высоты треугольника (или их продолжения) также пересекаются в одной точке H – ортоцентре треугольника (рис. 7).

Пусть высоты треугольника ABC пересекают соответственные стороны (или их продолжения) в точках A_0, B_0, C_0 (рис. 7). Треугольник $A_0B_0C_0$ называется ортоцентрическим для треугольника ABC или, коротко, его ортотреугольником. Оказывается, высоты треугольника являются биссектрисами его ортотреугольника. Если треугольник ABC остроугольный, то ортотреугольник $A_0B_0C_0$ вписан в треугольник ABC: вершины $A_0B_0C_0$ лежат на соответствующих сторонах треугольника ABC. Справедлива замечательная теорема: среди всех треугольников, вписанных в остроугольный треугольник, ортотреугольник имеет наименьший периметр.

Теоремы о пересечении высот, медиан, биссектрис треугольника в действительности можно получить из общей «теоремы Чевы» (Д. Чева – итальянский математик, (1648–1734)): отрезки AQ, BR, CP, соединяющие вершины треугольника ABC с точками на противолежащих сторонах (рис. 8), пересекаются в одной точке D тогда, и только тогда, когда

$$AP \cdot BQ \cdot CR = PB \cdot QC \cdot RA.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Тригонометрическими уравнениями называют уравнения, в запись которых входят тригонометрические функции от неизвестного (см. *Уравнения*). При решении тригонометрических уравнений их обычно сводят к простейшим уравнениям вида $R(x) = a$, где $R(x)$ – одна из основных *тригонометрических функций* (синус, косинус, тангенс, котангенс), a – некоторое число.

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x = a \text{ и} \qquad (1)$$

$$\cos x = a \qquad (2)$$

при $|a| > 1$ не имеют решений (рис. 1а, 2а), а при $|a| \leqslant 1$ имеют два корня на любом полуоткрытом промежутке длины 2π (совпадающие при $|a| = 1$ (рис. 1б, 2б). Все корни этих уравнений выписывают с помощью формул

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \; k = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \; ...,$$

для уравнения (1);

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \text{ для уравнения (2)}$$

(рис. 1, 2) (см. *Обратные тригонометрические функции*).

Уравнение

$$\operatorname{tg} x = a \qquad (3)$$

имеет при любом a один корень на любом полуоткрытом промежутке длины π, при этом

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \; k \in Z.$$

Уравнение

$$\operatorname{ctg} x = a \qquad (4)$$

также имеет при любом a один корень на любом полуоткрытом промежутке длины π, корни уравнения (4) задаются формулой

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \; k \in Z.$$

Уравнение вида $R(g(x)) = a$ заменой переменной $y = g(x)$ сводится к простейшему уравнению $R(y) = a$ (R – одна из основных тригонометрических функций). Из этого уравнения

Рис. 1

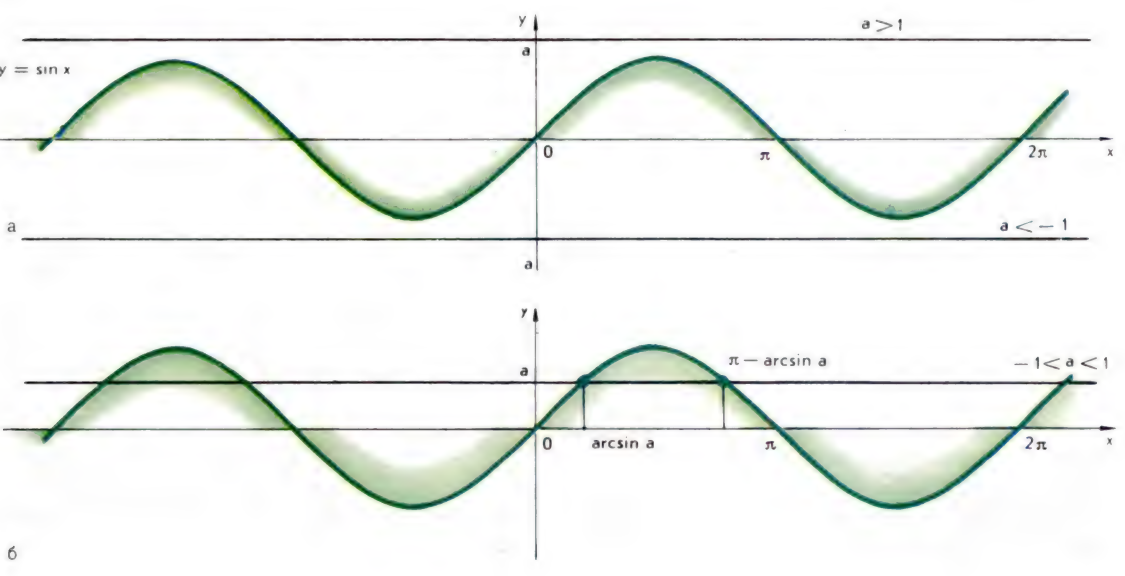
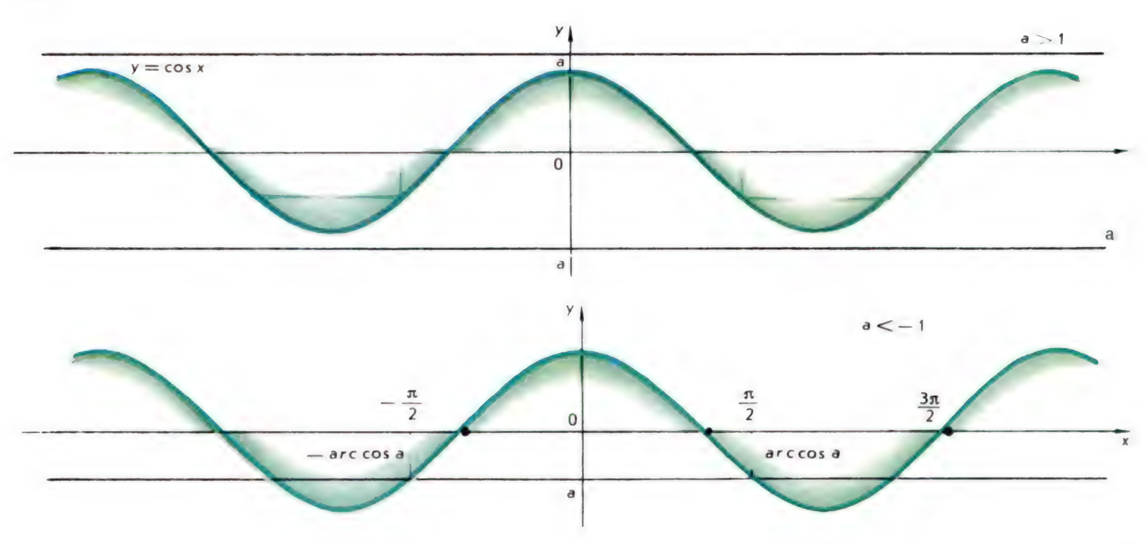


Рис. 2



можно найти значения y_k, после чего останется решить уравнение замены $g(x) = y_k$.

Решим уравнение $\sin 1/(x-2) = 0$. Обозначая $y = 1/(x-2)$, получим $1/(x-2) = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; $x - 2 = 1/\pi k$, $x = 2 + 1/\pi k$. Ответ: $\{2 + 1/\pi k;\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Нередко замена $y = R(x)$ сводит исходное уравнение к алгебраическому относительно $R(x)$. После нахождения значений y_1, y_2, ... остается решить простейшие уравнения $R(x) = y_1$, $R(x) = y_2$. Например, замена $y = \sin x$ сводит уравнение $1 - \sin x - 2\cos^2 x = 0$ к алгебраическому уравнению $2y^2 - y - 1 = 0$.

В случае, когда определен $\operatorname{tg}(x/2)$, справедливы формулы:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};\quad \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \qquad (5)$$

С помощью этих формул уравнение, связывающее значения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, приводится к уравнению относительно $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Отдельно надо рассмотреть случай, когда $\operatorname{tg}(x/2)$ не определен (т.е. $\cos(x/2) = 0$).

Решим уравнение $2\sin x + \cos x = \operatorname{ctg}(x/2) - 1$. Значения $\pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при которых не определен $\operatorname{tg}(x/2)$, являются решениями уравнения (при таких x $\cos x = -1$, $\sin x = 0$, $\operatorname{ctg}(x/2) = 0$ и $2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1$). При остальных x можно воспользоваться формулами (5); обозначая $\operatorname{tg}(x/2)$ через t, получим:

$$\frac{2 \cdot 2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \frac{1}{t} - 1,\quad 3t^2 + 2t - 1 = 0,$$

откуда $t = -1$ или $t = 1/3$.

Ответ:

$$\left\{\pi + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}.$$

Уравнение вида

$$A\cos x + B\sin x = C, \qquad (6)$$

где A, B, C – некоторые числа, удобно решать с помощью введения вспомогательного аргумента по следующей схеме. Записывая уравнение (6) в виде

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin x = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

легко заметить, что

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = 1,$$

поэтому существует такой угол φ, что

$$\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}};\quad \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Следовательно,

$$\cos(x - \varphi) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

и мы получили простейшее уравнение относительно $y = x - \varphi$.

Рис. 1

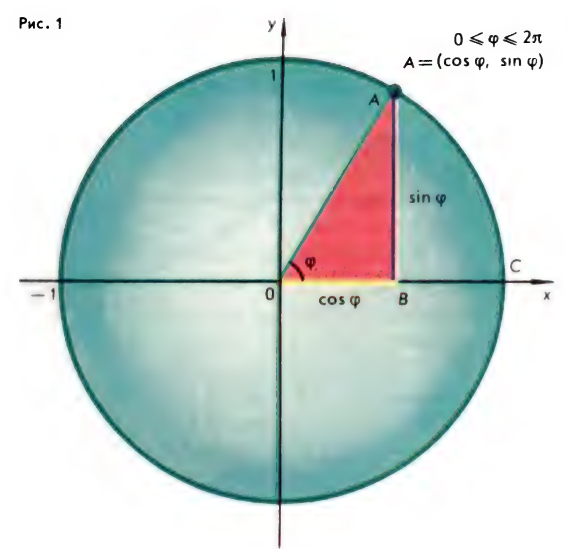
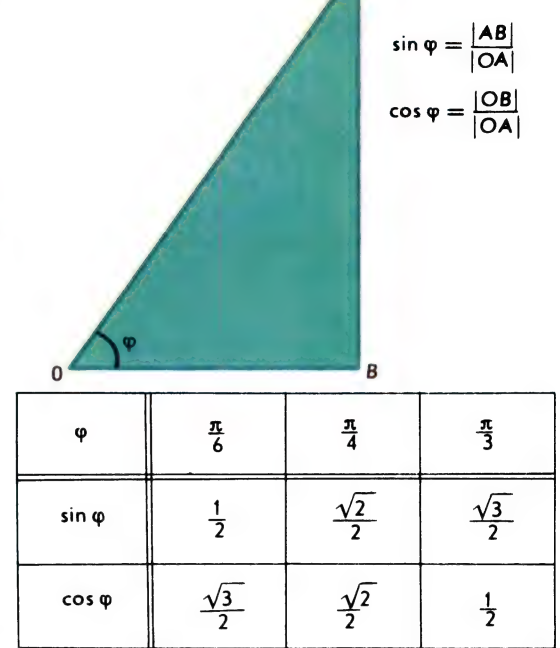


Рис. 2



φ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Тригонометрические функции возникли в Древней Греции в связи с исследованиями в астрономии и геометрии. Отношения сторон в прямоугольном треугольнике, которые по существу и есть тригонометрические функции, встречаются уже в III в. до н. э. в работах Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского и других. Современную форму теории тригонометрических функций и вообще *тригонометрии* придал Л. Эйлер. Ему принадлежат определения тригонометрических функций и принятая в наши дни символика.

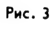
Тригонометрические функции (от греческих слов *trigonon* – «треугольник» и *metreo* – «измеряю») – один из важнейших классов функций.

Чтобы определить тригонометрические функции, рассмотрим тригонометрический круг (окружность) с радиусом 1 и центром в начале координат (рис. 1). Если φ – угол между радиусами OC и OA, выраженный в радианах, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ (угол отсчитывается в направлении от OC к OA), то координаты точки A называются соответственно к о с и н у с о м и с и н у с о м у г л а φ и обозначаются как $x = \cos\varphi$ и $y = \sin\varphi$. Отсюда ясно, что $|\cos\varphi| \leqslant 1$, $|\sin\varphi| \leqslant 1$ и $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Для острых углов $(0 < \varphi < \pi/2)$ тригонометрические функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ можно рассматривать как отношения катета прямоугольного треугольника (прилежащего к углу и противолежащего углу соответственно) к гипотенузе (рис. 2), длина которой уже не обязательно равна единице. Исходя из этого определения, составим таблицу для значений тригонометрических функций некоторых углов; кроме того, ясно, что

$$\cos 0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ и } \cos\frac{\pi}{2} = \sin 0 = 0.$$

Чтобы построить графики тригонометрических функций при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, поступим следующим образом. Разделим тригонометриче-


Рис. 3

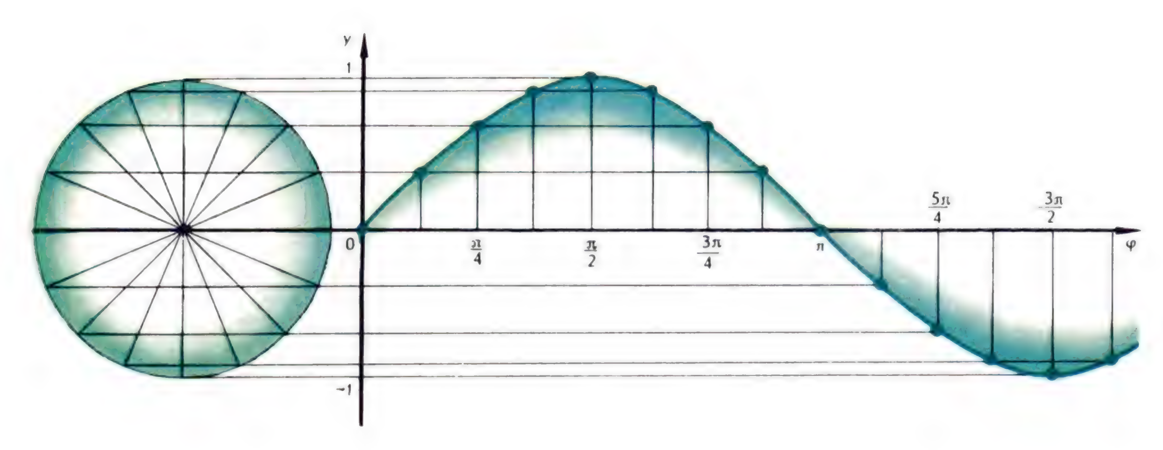


Рис. 4

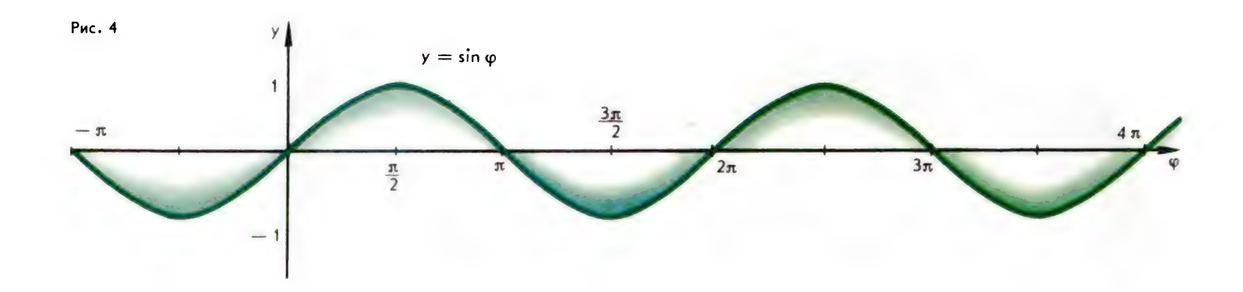
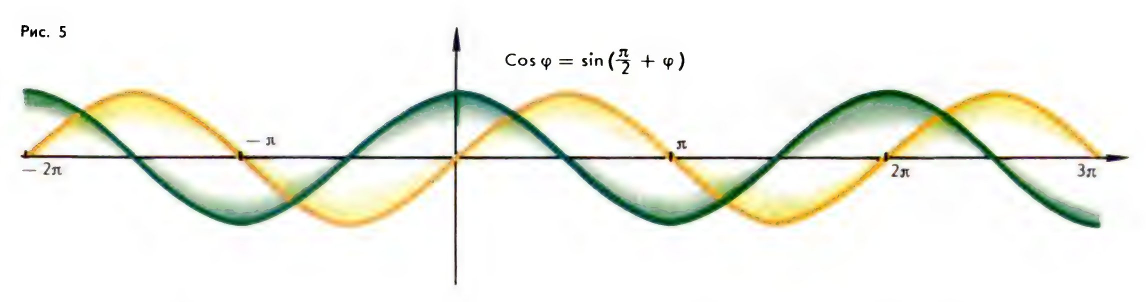


Рис. 5



скую окружность на 16 равных частей и рядом разместим систему координат, как показано на рис. 3, где отрезок длиной 2π на оси $O\varphi$ также разделен на 16 равных частей. Проводя прямые линии параллельно оси $O\varphi$ через точки деления окружности, мы на пересечении этих прямых с перпендикулярами, восставленными из соответствующих точек деления отрезка $[0, 2\pi]$ на оси $O\varphi$, получаем точки, координаты которых равны синусам соответствующих углов (рис. 3); отметим, что имеют место следующие приближенные равенства:

$$\sin\frac{\pi}{8} \approx 0{,}4,\ \sin\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7,\ \sin\frac{3\pi}{8} \approx 0{,}9.$$

Если взять, скажем, не 16, а 32, 64 и т.д. точек, то можно построить сколь угодно много точек, лежащих на графике функции $y = \sin\varphi$. Проводя через них плавную кривую, мы получим достаточно удовлетворительный график функции $y = \sin\varphi$ на отрезке $[0, 2\pi]$. Для того чтобы получить функцию $y = \sin\varphi$, определенную на всей числовой прямой, сначала определяют ее на всех отрезках вида $[n2\pi, (n+1)2\pi]$, $n \geqslant 1$ – целое, т.е. полагая, что ее значения в точках φ, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi$, ... равны $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, а затем для отрицательных φ используют равенство $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$. Проделав все это, мы получим график, показанный на рис. 4. В итоге получается периодическая (с периодами $2\pi n$, n – целое и $n \neq 0$), нечетная функция $y = \sin\varphi$, которая определена при всех действительных значениях φ; ее область значений $[-1, 1]$.

При определении функции $y = \cos\varphi$ (для всех φ) заметим сначала, что $\cos\varphi =$

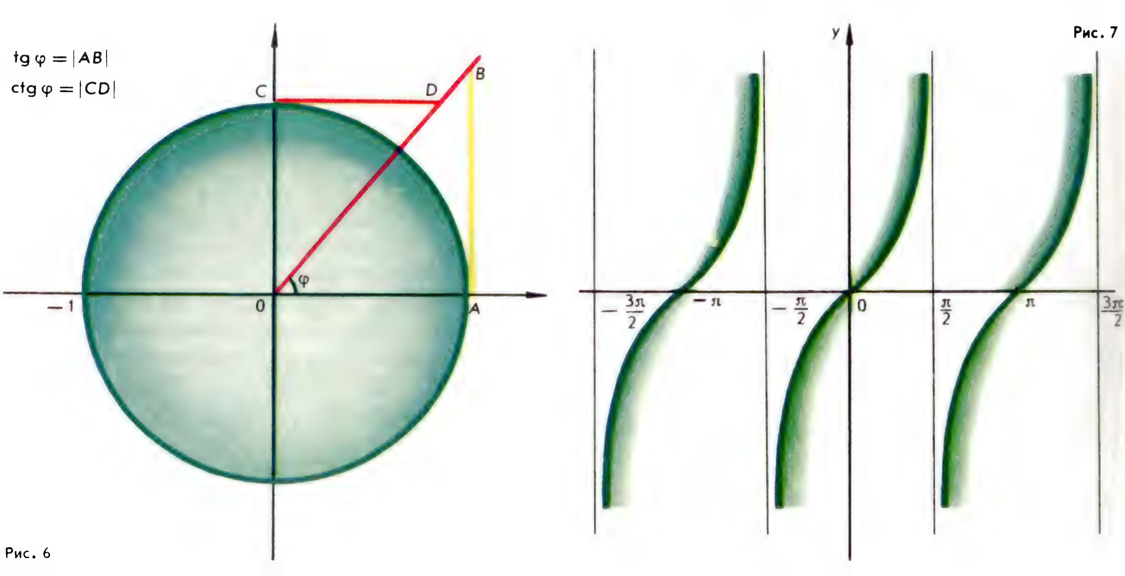


Рис. 6

Рис. 7

$= \sin(\pi/2 - \varphi)$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, которое следует непосредственно из определения тригонометрических функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Так как функция $y = \sin\varphi$ уже нами определена при всех φ, мы положим по определению, что это равенство и задает функцию $y = \cos\varphi$ при всех φ. Из этого определения нетрудно получить и график функции $y = \cos\varphi$, которая, очевидно, будет четной и периодической, так как ее график получается из графика функции $y = \sin\varphi$ путем параллельного переноса влево на отрезок длиной $\pi/2$, как единого целого графика функции $y = \sin\varphi$ (рис. 5).

Простейший анализ (с помощью графика) показывает, что помимо отмеченной выше справедливы также следующие так называемые формулы приведения:

$$\sin(\varphi + n\pi) = \pm\sin\varphi, \quad \cos(\varphi + n\pi) = \pm\cos\varphi,$$

$$\sin\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\varphi, \quad \cos\left(\varphi + n\frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\varphi.$$

В формулах первой строки n может быть любым целым числом, причем верхний знак соответствует $n = 2k$, нижний знак – значению $n = 2k + 1$, а в формулах второй строки n может быть только нечетным числом, причем верхний знак берется при $n = 4k + 1$, а нижний – при $n = 4k - 1$, k – целое.

С помощью основных тригонометрических функций $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ можно определить другие тригонометрические функции – тангенс и котангенс:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi};$$

при этом тангенс определен только для таких значений φ, для которых $\cos\varphi \neq 0$, т.е. для $\varphi \neq \pi/2 + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, а функция котангенс – для таких φ, для которых $\sin\varphi \neq 0$, т.е. $\varphi \neq n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Эти функции для острых углов могут быть также представлены геометрически направленными отрезками прямых (рис. 6):

$$\operatorname{tg}\varphi = |AB|, \quad \operatorname{ctg}\varphi = |CD|.$$

Подобно синусу и косинусу, функции тангенс и котангенс для острых углов могут рассматриваться как отношения катетов: противолежащего к прилежащему для тангенса и прилежащего к противолежащему для котангенса. Графики функций $y = \operatorname{tg}\varphi$ и $y = \operatorname{ctg}\varphi$ показаны на рис. 7 и 8; как видно, эти функции являются нечетными, периодическими и имеют в качестве периода числа $n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Важнейшие тригонометрические формулы – формулы сложения:

$$\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \pm \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2,$$

$$\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2,$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 \pm \operatorname{tg}\varphi_2}{1 \mp \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2};$$

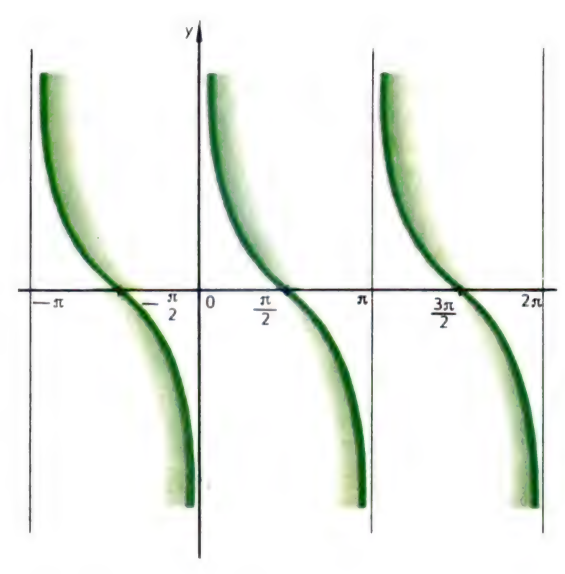
знаки в левых и правых частях формул согласованы, т.е. верхнему знаку слева соответствует верхний знак справа. Из них, в частности, выводятся формулы для кратных аргументов:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi \cdot \cos\varphi,$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Рис. 8



Сумму и разность тригонометрических функций можно представить в виде произведения тригонометрических функций (знаки в первой и четвертой формулах согласованы):

$$\sin\varphi_1 \pm \sin\varphi_2 = 2\sin\frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 \mp \varphi_2}{2},$$

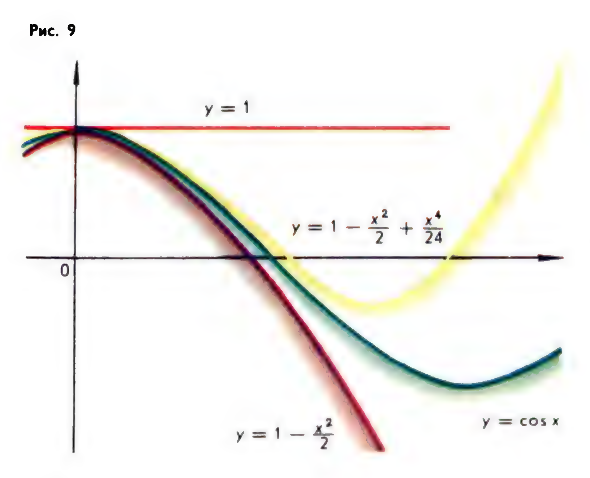
$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 = 2\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2},$$

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 = -2\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \pm \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2)}{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2}.$$

Произведение тригонометрических функций выражается через сумму следующим образом:

Рис. 9



$\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 = 1/2\,[\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + $
$+ \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$,

$\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = 1/2\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - $
$- \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]$,

$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 = 1/2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + $
$+ \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Производные тригонометрических функций выражаются через тригонометрические функции (здесь и всюду в дальнейшем мы заменим переменную φ на x):

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x.$$

При интегрировании тригонометрических функций получаются тригонометрические функции или их логарифмы ($0 < x < \pi/2$, C – абсолютная постоянная):

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\cos x + C, \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\sin x + C.$$

Основные тригонометрические функции $u = \cos x$ и $v = \sin x$, как мы видели, связаны следующими соотношениями:

$$u' = -v, \quad v' = u.$$

Дифференцируя вторично эти равенства, получаем:

$$u'' = -v' = -u, \quad v'' = u' = -v.$$

Таким образом, функции u и v от переменной x могут рассматриваться как решения одного и того же (дифференциального) уравнения $y'' + y = 0$.

Это уравнение, а точнее – его обобщение, содержащее положительную постоянную k^2, $y'' + k^2 y = 0$ (решениями которого, в частности, служат функции $\cos kx$ и $\sin kx$), постоянно встречается при изучении колебаний, т. е. при изучении конструкций механизмов, совершающих или производящих колебательные движения.

Функция $\cos x$ может быть представлена в виде бесконечного ряда $1 - x^2/2! + x^4/4! - - x^6/6! \ldots$. Если взять несколько первых членов этого ряда, мы получим приближения функции $\cos x$ с помощью многочленов. На рис. 9 показано, как графики этих многочленов с ростом их степени все лучше приближают функцию $\cos x$.

Название «синус» происходит от латинского *sinus* – «перегиб», «пазуха» – представляет собой перевод арабского слова «джива» («тетива лука»), которым обозначали синус индийские математики. Латинское слово *tangens* означает «касательная» (см. рис. 6; AB – касательная к окружности). Названия «косинус» и «котангенс» представляют собой сокращения терминов *complementi sinus, complementi tangens* («синус дополнения», «тангенс дополнения»), выражающих тот факт, что $\cos\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$ равны соответственно синусу и тангенсу аргумента, дополнительного к φ до $\pi/2$: $\cos\varphi = \sin(\pi/2 - \varphi)$, $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi/2 - \varphi)$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Тригонометрия – математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.

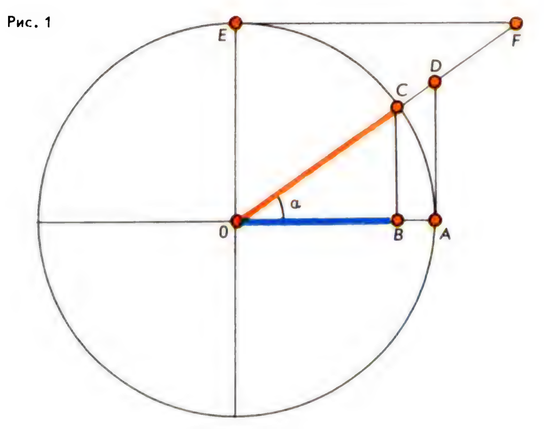
Казалось бы, тригонометрию можно считать лишь частью *геометрии*, однако *тригонометрические функции*, с помощью которых связываются элементы треугольника,– это объект изучения *математического анализа*, а *тригонометрические уравнения* – уравнения, в которых неизвестные являются аргументами тригонометрических функций,– изучаются методами алгебры. Таким образом, тригонометрия – раздел математики, использующий достижения других важных ее разделов.

Основные формулы тригонометрии задаются теоремой синусов (см. *Синусов теорема*) и теоремой косинусов (см. *Косинусов теорема*). Кроме них часто применяются теорема тангенсов, открытая в XV в. немецким математиком И. Региомонтаном,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}, \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{B+C}{2}},$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{C-A}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{C+A}{2}},$$

Рис. 1



и формулы К. Мольвейде (немецкого математика конца XVIII–начала XIX в.):

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Здесь через a, b, c обозначены длины сторон треугольника, а через A, B, C – соответственно величины противоположных им углов.

Помимо теоремы косинусов углы треугольника могут быть также выражены через его стороны с помощью формул:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

где p – полупериметр треугольника.

Площадь треугольника помимо формулы Герона (см. *Герона формула*) может быть выражена с помощью тригонометрии через стороны и углы треугольника еще несколькими способами:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C,\qquad S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)},$$

$$S=p^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Тригонометрия возникла из практических нужд человека. С ее помощью можно определить расстояние до недоступных предметов и, вообще, существенно упрощать процесс геодезической съемки местности для составления географических карт.

Зачатки тригонометрических познаний зародились в древности. На раннем этапе тригонометрия развивалась в тесной связи с астрономией и являлась ее вспомогательным разделом.

Древнегреческие ученые разработали «тригонометрию хорд», изложенную выдающимся астрономом Птолемеем (II в.) в его работе «Альмагест». Птолемей вывел соотношения между хордами в круге (выражавшиеся словесно ввиду отсутствия в то время математической символики), которые равносильны современным формулам для синуса половинного и двойного угла, суммы и разности двух углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

Важный шаг в развитии тригонометрии был сделан индийскими учеными, которые заменили хорды синусами. Это нововведение перешло в VIII в. в арабоязычную математику стран Ближнего и Среднего Востока, где тригонометрия постепенно превратилась из раздела астрономии в самостоятельную математическую дисциплину. Помимо синуса были введены и другие *тригонометрические функции*, и для них были составлены таблицы.

Общепринятые понятия тригонометрии, а также обозначения и определения тригонометрических функций сформировались в процессе долгого исторического развития. Если, например, при введении основных тригонометрических понятий представляется естественным принимать радиус тригонометрического круга (рис. 1) равным единице, то эта, казалось бы, простая идея была усвоена только в X–XI вв. Если мы понимаем под синусом угла α в прямоугольном треугольнике *OBC* отношение катета *BC* (линия синуса) к гипотенузе *OC* (т.е. радиусу единичной окружности), то в средние века термином «синус» обозначали саму линию синуса *BC*. То же относится к косинусу, под которым понималась линия косинуса *OB*, и другим тригонометрическим функциям.

Лишь постепенно, благодаря введению новых понятий, а также в результате разработки и усовершенствования математической символики, тригонометрия приобрела современный вид, наиболее удобный для решения вычислительных задач. Окончательный вид она приобрела в XVIII в. в трудах *Л. Эйлера.*

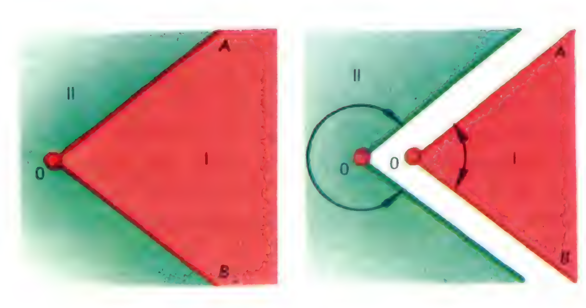
Существует также сферическая тригонометрия, рассматривающая соотношения между сторонами и углами треугольников на сфере, образованных дугами больших кругов. Она является частью *сферической геометрии* и возникла исторически раньше тригонометрии на плоскости из потребностей практической астрономии.

У

УГОЛ

Угол – самая простая геометрическая фигура после точки, прямой, луча и отрезка. Если в плоскости из точки O провести два различных луча OA и OB, то они разобьют плоскость на две части, каждая из которых называется углом с вершиной O и сторонами OA и OB. Угол I на рис. 1 выпуклый (см. *Выпуклые фигуры*), угол II невыпуклый. Если лучи OA и OB дополняют друг друга до прямой, то оба получающиеся угла выпуклые и называются развернутыми. Как геометрические фигуры они совпадают с полуплоскостями, на которые плоскость разбивается прямой AB (рис. 2). Если в одном из развернутых углов AOB провести луч OC, то он разделит угол AOB на два выпуклых угла AOC и COB, которые называются смежными (рис. 2). Две пересекающиеся в точке O прямые AB и CD разбивают плоскость на две пары выпуклых так называемых вертикальных между собой углов: AOC и BOD, AOD и BOC (рис. 3). Вертикальные углы, например AOC и BOD, равны между собой: один из них можно совместить с другим поворотом около точки O.

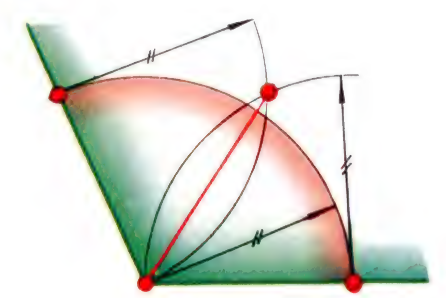
Рис. 1



Луч, делящий угол пополам и имеющий начало в вершине угла, называется его биссектрисой. Биссектриса развернутого угла делит его на два равных смежных угла, называемых прямыми углами. Биссектрису угла легко построить с помощью циркуля и линейки, даже не меняя раствор циркуля (рис. 4). Для развернутого угла просто построить и трисектрисы, или, как говорят, выполнить его трисекцию, т.е. разделить угол на три равные части. Еще в V в. до н.э. была сформулирована задача о трисекции произвольного угла (см. *Классические задачи древности*), но лишь в XIX в. математики доказали, что разрешить эту задачу с помощью только циркуля и линейки в общем случае нельзя.

Конечно, это не означает, что трисектрисы не существуют. На рис. 5 показано, как выполняется трисекция угла AOB с помощью циркуля и линейки с двумя отмеченными на ней точками P и Q: сначала строится окружность S радиуса PQ, а потом линейка помещается так, чтобы ее край проходил через точку B, точка Q лежала на S, а точка P – на дополнительном к OA луче OA' (простой подсчет углов равнобедренных треугольников OPQ и BOQ дает, что угол APB втрое меньше угла AOB).

Рис. 4



Большое значение для теории и практики имеет определение величины или меры угла. Основное свойство меры угла должно заключаться в том, чтобы равные углы имели одинаковую меру. Общеприняты два измерения углов: (1) градусное, при котором углы измеряются в градусах (по определению угол в 1° – это 1/180 часть развернутого угла) и его долях (1/60 градуса – угловая минута, 1′; 1/60 минуты – угловая секунда, 1″), и (2) радианное,

Рис. 2

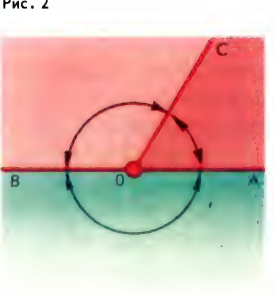


Рис. 3

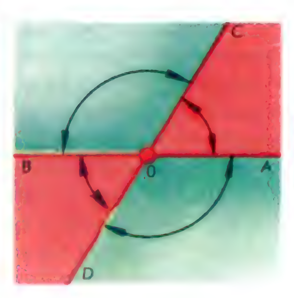


Рис. 5

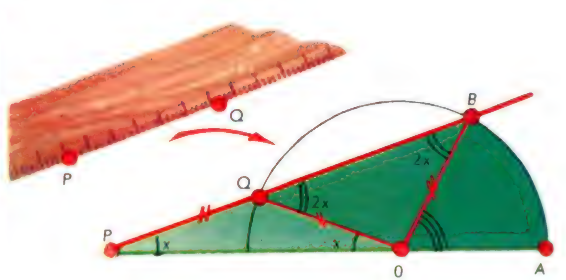
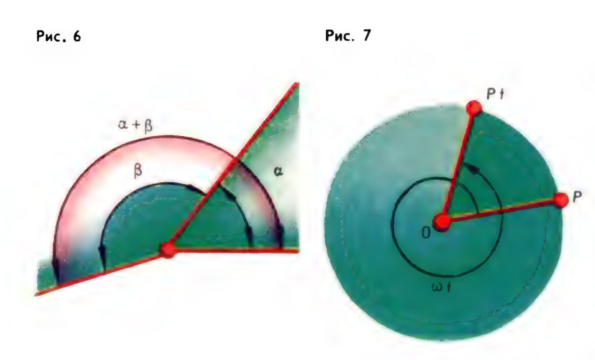


Рис. 6 Рис. 7



при котором радианная мера угла AOB определяется как отношение длины дуги, высекаемой этим углом на произвольной окружности с центром O, к радиусу окружности. Развернутый угол равен 180°, или $\pi r/r = \pi$ радианам, откуда получаются формулы, связывающие градусную и радианную меры угла:

$\alpha_{рад} = (\alpha/\pi\cdot 180)^\circ$, $A^0 = A/180\cdot\pi$ рад.

В частности,

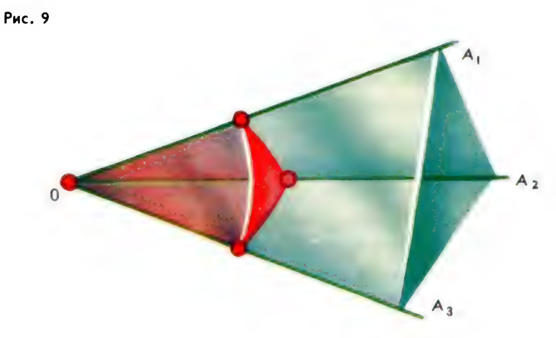
$1^\circ = \pi/180 = 0{,}017453\ldots$.

Рис. 8



(В последнем случае мы не записали размерность «рад»; так часто поступают, основываясь на том, что по своему определению радианная мера безразмерна.) Радианная мера применяется в математическом анализе (например, при определении числовых значений *тригонометрических функций*), в механике (при рассмотрении вращения около точки или оси и других процессов, описываемых с помощью тригонометрических функций,– колебаний, волн и т.д.). Градусная мера используется в элементарной геометрии (каждый,

Рис. 9



видимо, хорошо знаком с транспортиром – измерителем углов на чертежах), в геодезии при измерениях на местности (для измерения углов на местности используют весьма точный прибор – теодолит). Иногда углы измеряют в долях прямого угла, обозначаемого буквой d; в морской навигации традиционно используют в качестве основной единицы румб, равный 1/16 развернутого угла. Для краткости вместо слов «величина (мера) угла» часто говорят просто «угол». Так, в известной теореме: сумма углов треугольника равна 180° (или π, или $2d$) – под углами понимаются как раз величины углов.

Углы, меньшие прямого, называются острыми, а углы, большие прямого, но меньшие развернутого,– тупыми. Мера выпуклого угла заключена между 0° и 180° (или 0 и π), невыпуклого – между 180° и 360° (или между π и 2π). Удобно ввести в рассмотрение полный угол – угол, образуемый лучом OA при полном обороте около точки O, а также нулевой угол – угол, образованный двумя совпадающими лучами. Эти углы имеют меру – соответственно $360^\circ = 2\pi$ рад и $0^\circ = 0$ рад. Иногда градус определяют как 1/360 часть полного угла.

В планиметрии рассматривают еще один тип углов – углы поворотов. Во-первых, они имеют знак: плюс, если поворот осуществляется против хода часовой стрелки, и минус, если поворот – по ходу часовой стрелки. Поворот около точки O на угол α обозначается R_O^α. Если углы поворотов α, β и их сумма $\alpha+\beta$ заключены в пределах от -360° до 360°, то при последовательном выполнении (композиции) поворотов их углы складываются (рис. 6):

$$R_O^\beta\cdot R_O^\alpha = R_O^{\alpha+\beta}.$$

Чтобы сохранить эту удобную формулу при произвольных α и β и чтобы можно было рассматривать механический процесс вращения, при котором в угол поворота целесообразно включить и проделанные полные обороты (на 360°), пришлось ввести углы поворотов произвольной величины (как бóльших 360°, так и меньших -360°). Тогда, например, при вращении точки P около точки O с постоянной угловой скоростью ω (рад/с) положение P в момент времени t дается формулой

$$P_t = R_O^{\omega t}(P) \qquad \text{(рис. 7).}$$

Так введенные углы поворотов позволяют определить тригонометрические функции числового аргумента: в координатах Oxy для произвольного числа t полагают, что ($\cos t$, $\sin t$) – координаты точки $P_t = R_O^t(P_O)$, где P_O – точка с координатами (1; 0), а угол поворота t берется в радианах.

В стереометрии рассматриваются двугранные углы – части пространства, на кото-

рые оно разбивается двумя полуплоскостями (гранями угла), ограниченными общей прямой (ребром угла, рис. 8), и многогранные (n-гранные, где $n \geqslant 3$) углы – части пространства, ограниченные несколькими последовательно прилегающими друг к другу плоскими углами с общей вершиной. На рис. 9 изображен трехгранный угол $OA_1A_2A_3$ с вершиной O, ребрами – лучами OA_1, OA_2, OA_3 и гранями – плоскими углами A_1OA_2, A_2OA_3 и A_3OA_1.

Двугранные углы измеряются так же, как и отвечающие им линейные углы – плоские углы, получающиеся при пересечении двугранных углов плоскостями, перпендикулярными их ребрам (рис. 8). Для многогранных углов вводится телесная мера, аналогичная радианной мере плоских углов. Эта мера, измеряемая в стерадианах (стер), равна отношению площади сферического многоугольника, получающегося в пересечении многогранного угла со сферой с центром в вершине угла, к квадрату радиуса сферы (см. рис. 9). Например, угол комнаты «вырезает» из сферы октант – 1/8 ее часть, поэтому его телесная мера равна $(4\pi R^2/8):R^2 = \pi/2$ (стер). Оказывается, телесная мера n-гранного угла $OA_1A_2...A_n$ выражается через радианные меры его двугранных углов по формуле нидерландского математика XVII в. А. Жирара

$$\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_n - (n-2)\pi,$$

где A_i – величина (в радианах) двугранного угла при ребре $OA_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми a и b называется угол между проведенными через одну точку параллельными a и b прямыми. Угол между пересекающимися прямыми – это наименьший из получающихся при пересечении плоских углов (т.е. углов между лучами). Аналогично определяется и угол между пересекающимися плоскостями. Углом между прямой и плоскостью называется угол между этой прямой и ее прямоугольной *проекцией* на плоскость; если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ними считается равным 90°. Углы между параллельными или совпадающими прямыми и плоскостями считаются равными 0°, так что все перечисленные в этом абзаце углы заключены в пределах от 0° до 90°.

УРАВНЕНИЕ

Уравнение – это два выражения, соединенные знаком равенства; в эти выражения входят одна или несколько переменных, называемых неизвестными. Решить уравнение – значит найти все значения неизвестных, при которых оно обращается в верное равенство, или установить, что таких значений нет.

В школьном курсе, как правило, рассматривают уравнения, в которых неизвестные принимают числовые значения. Числовое значение неизвестного, удовлетворяющее уравнению с одним неизвестным, называется корнем или решением этого уравнения. Набор чисел, удовлетворяющих уравнению с несколькими неизвестными, называется его решением.

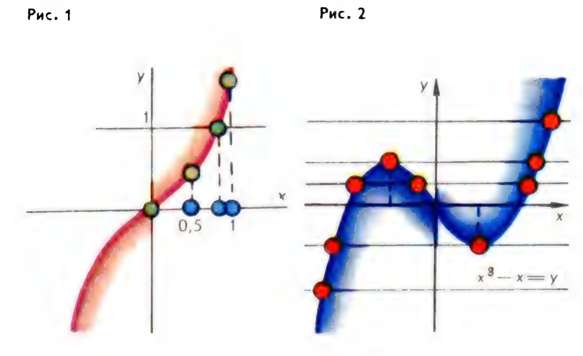
В математике рассматривают также уравнения, в которых неизвестными являются целые числа (*диофантовы уравнения*), *векторы* (векторные уравнения), функции (*дифференциальные*, интегральные, функциональные уравнения) и объекты другой природы. Вместе с уравнением указывают его область определения (множество допустимых значений неизвестных); если это не сделано, то предполагается, что это – естественная общая область определения выражений, стоящих в левой и правой частях уравнения.

Уравнение – одно из важнейших понятий математики. В большинстве практических и научных задач, где какую-то величину нельзя непосредственно измерить или вычислить по готовой формуле, удается составить соотношение (или несколько соотношений), которым оно удовлетворяет. Так получают уравнение (или систему уравнений) для определения неизвестной величины.

Развитие методов решения уравнений, начиная с зарождения математики как науки, долгое время было основным предметом изучения *алгебры*. Привычная нам буквенная запись уравнений окончательно сложилась в XVI в.; традиция обозначать неизвестные последними буквами латинского алфавита x, y, z, ..., а известные величины (параметры) – первыми a, b, c, ... идет от французского ученого Р. *Декарта*.

Обычный путь алгебраического (чаще говорят, аналитического) решения уравнения состоит в том, что с помощью преобразований его сводят к более простым уравнениям. Если все решения одного уравнения являются решениями другого, то второе уравнение называется следствием первого. Если каждое из двух уравнений – следствие другого (т.е. множества их решений совпадают), то такие уравнения называются равносильными. Применяя к обеим частям уравнения одно и то же преобразование, мы приходим к следствию этого уравнения. Если же это преобразование обратимо, то получается уравнение, равносильное данному. (Например, умножая обе части уравнения на одно и то же число, мы получаем следствие данного уравнения. Если это число отлично от нуля, то выполненное преобразование обратимо, так что полученное уравнение равносильно исходному).

Решая уравнение с одним неизвестным, мы



пытаемся прийти к простейшим уравнениям, для решения которых есть готовые формулы. Это *линейные уравнения*, *квадратные уравнения*, уравнения вида $\varphi(x) = c$, где c – число, а φ – одна из основных *элементарных функций*: степенная $\varphi(x) = x^n$, показательная $\varphi(x) = a^x$, логарифмическая $\varphi(x) = \log_a x$, тригонометрические $\varphi(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \cos x$, $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$.

Заметим, что запись общего решения уравнения $\varphi(x) = c$ требует введения функции ψ, обратной к функции φ. Если $\varphi(x) = x^n$, то $\psi(c) = \sqrt[n]{c}$; если $\varphi(x) = a^x$, то $\psi(c) = \log_a c$; если $\varphi(x) = \sin x$ и $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то $\psi(c) = \arcsin c$.

Как же сводятся уравнения к простейшим? Для конкретного типа уравнений (алгебраических, тригонометрических, иррациональных, показательных, логарифмических и т. п.) разработаны частные приемы решения. Из общих методов решения уравнений остановимся на трех, которые встречаются чаще всего.

Если левую часть уравнения $f(x) = 0$ удается разложить на множители: $f(x) = f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_m(x)$, то оно распадается на уравнения $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, ..., $f_m(x) = 0$, объединение множеств их решений дает множество решений данного уравнения. Например, уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$ можно решить так: $(x^3 - x) - (6x - 6) = 0$, $x(x-1)(x+1) - 6(x-1) = 0$, $(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$.
Решая уравнения $x - 1 = 0$ и $x^2 + x - 6 = 0$, находим все корни данного уравнения: 1, 2 и -3. Этот метод принято называть методом разложения на множители.

Часто удается упростить уравнение, принимая в качестве новой неизвестной некоторую функцию от старой неизвестной. Например, уравнение $\sin x + \cos x = \sin 2x$ можно свести к квадратному уравнению, положив $y = \sin x + \cos x$. Тогда $\sin 2x = y^2 - 1$, и мы приходим к уравнению $y^2 - y - 1 = 0$.

Иногда удается решить уравнение, анализируя функциональные свойства его левой и правой частей.

Например, так как левая часть уравнения $2^x + 3^x = 5$ возрастает, а правая – постоянна, то это уравнение не может иметь более одного корня. Единственный корень $x = 1$ легко угадывается.

Решая уравнение $\sin^3 x + \cos^5 x = \sqrt{2}$, заметим, что при всех x выполняются неравенства $\sin^3 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^5 x \leqslant \cos^2 x$, откуда $\sin^3 x + \cos^5 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а так как $\sqrt{2} > 1$, то данное уравнение не имеет корней.

До сих пор мы разбирали приемы решения уравнений, позволяющие найти корень уравнения как число или комбинацию известных функций от параметров. Однако далеко не все уравнения, возникающие на практике, можно решить подобным образом. Например, в начале XIX в. было доказано, что не существует общей формулы для решения *алгебраических уравнений* начиная с пятой степени. Да и в тех случаях, когда уравнение удается решить, формула для корней может быть чересчур громоздкой. Поэтому в математике разработаны различные методы приближенного решения уравнений. Простейший из них основан на том, что если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, то уравнение $f(x) = 0$ имеет на этом отрезке корень.

Приближенное решение уравнений тесно связано с построением *графиков* функций.

Например, построив график функции $y = x^3 + x$, мы можем заключить, что уравнение $x^3 + x = 1$ имеет один корень и этот корень лежит на отрезке $[0{,}5; 1]$, более точно – на отрезке $[0{,}6; 0{,}7]$, еще более точно – на отрезке $[0{,}682; 0{,}683]$ (рис. 1). Эта информация практически более полезна, чем точная формула Кардано, выражающая этот корень:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{27}}}$$

(все равно извлекать радикалы можно лишь приближенно). Для отыскания корней с любой степенью точности существуют «быстрые» *алгоритмы*, основанные на методе последовательных приближений (см. *Приближенные вычисления*).

С помощью графика особенно удобно проводить исследование уравнений; например, по графику $y = x^3 - x$ (рис. 2) мы сразу видим, что уравнение $x^3 - x = c$ имеет три корня при $|c| < 2/\sqrt{3}$, два – при $|c| = 2/\sqrt{3}$ и один – при $|c| > 2/\sqrt{3}$.

Ф

ФАКТОРИАЛ

Так на́зывают часто встречающуюся в практике функцию, определенную для целых неотрицательных чисел. Название функции происходит от английского математического термина *factor* – «сомножитель». Обозначается она $n!$. Для каждого целого положительного числа n функция $n!$ равна произведению всех целых чисел от 1 до n. Например: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Для удобства полагают по определению $0! = 1$. Особенно часто встречается факториал в *комбинаторике*. Например, количество способов выстроить n школьников в одну шеренгу равняется $n!$.

Функция $n!$ растет с увеличением n очень быстро. Так, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, ..., $10! = 3\,628\,800$.

Английский математик Дж. Стирлинг в 1730 г. предложил очень удобную формулу для приближенного вычисления функции $n!$:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n},\ n \to \infty.$$

Относительная ошибка при пользовании этой формулой очень невелика и быстро падает при увеличении числа n.

ФЕРМА ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА

Натуральные числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 = z^2$ (они могут служить сторонами прямоугольного треугольника), называют пифагоровыми тройками. Таковы, например, числа 3, 4, 5. Математики Древней Греции знали все пифагоровы тройки (имеется и вавилонская клинописная табличка с пифагоровыми тройками). Все тройки взаимно простых пифагоровых чисел можно получить по формулам:

$$x = m^2 - n^2,\ y = 2mn,\ z = m^2 + n^2,$$

где m и n – целые числа, причем $m > n > 0$.

До нас дошло сочинение древнегреческого математика Диофанта (вероятно, III в.), в котором, в частности, содержалось исследование пифагоровых троек. Французский математик П. *Ферма* написал на полях этой книги: «Наоборот, невозможно разложить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата и вообще никакую степень, бо́льшую квадрата, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки». Другими словами, уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет решений в натуральных числах x, y, z.

С этого высказывания начинается одна из самых волнующих историй в математике – история великой теоремы Ферма (так стали называть это утверждение). То, что Ферма не оставил доказательства, никого не удивило – он почти не оставил доказательств своих арифметических теорем.

Многие утверждения Ферма впоследствии доказал Л. *Эйлер*. Он попытался доказать и великую теорему Ферма. Вначале Л. Эйлер разобрал случай $n = 4$ (это доказательство было и у Ферма) и лишь через 20 лет, в 1768 г., прибавил случай $n = 3$ (да и то с пробелами). Лишь более чем через полвека, в 1825 г., французским математиком А. Лежандром (1752–1833) и немецким математиком П. Дирихле (1805–1859) была доказана справедливость утверждения П. Ферма для $n = 5$. Нетрудно понять, что случай $n = 6$ сводится к $n = 3$ и вообще, кроме случая $n = 4$, достаточно рассматривать лишь простые показатели n. Вскоре, в 1839 г. усилиям французского математика Г. Ламе (1795–1870) поддался случай $n = 7$, одно время даже казалось, что он вывел общий случай, но обнаружилась ошибка.

Самые серьезные исследования великой теоремы Ферма связаны с именем немецкого математика Э. Куммера (1810–1893). В 1843 г. он предложил доказательство, в котором была ошибка, но затем он постепенно исправлял ее. Его доказательство содержало достаточные условия для n, при выполнении которых для этого n теорема справедлива. Вначале эти условия были столь трудно проверяемы, что не удавалось прибавить ни одного показателя к уже известным. Затем они упростились, и теорема была доказана разом для всех n из первой сотни, исключая $n = 37$, 59, 67. Однако и с этими исключениями вскоре удалось справиться. К концу жизни Э. Куммер уже не рассчитывал доказать теорему в полном объеме, он лишь хотел доказать ее справедливость для бесконечного множества простых показателей, но и этого до сих пор не удалось доказать.

В 1934 г. американский математик Г. Вандивер упростил условия Э. Куммера, и в этом варианте они (при помощи ЭВМ) в последнее время проверены для всех простых $n < 100\,000$.

А как же доказательство П. Ферма, которое «не уместилось на полях»? С одной стороны, Ферма не допускал ошибок в высказываниях, а с другой стороны, кажется невероятным, что самые блестящие математические умы за

три столетия не обнаружили рассуждения, на которое намекал Ферма. Нет даже ни одной убедительной реконструкции ошибочного рассуждения, которое П. Ферма мог принять за доказательство. Более того, все разобранные случаи, начиная с $n = 3$, требуют применения методов, совершенно неизвестных Ферма. По тем же причинам, по-видимому, обречены на неудачу многочисленные попытки любителей найти ее доказательство. Но великая теорема Ферма сослужила добрую службу, хотя само это утверждение занимает довольно изолированное положение в математике. В процессе ее доказательства Э. Куммер придумал теорию идеальных чисел – одну из самых удивительных и плодотворных математических теорий.

Интересное продвижение в решении великой теоремы Ферма получено в 1983 г. нидерландским математиком Г. Фалтингсом (см. *Диофантовы уравнения*).

ФЕРМА МАЛАЯ ТЕОРЕМА

Знаете ли вы об удивительном свойстве, которым обладают числа, составленные из одних девяток? Каково бы ни было простое число p, отличное от 2 и 5, всегда можно указать такое число, составленное из одних девяток – 9999...99,– что оно будет делиться на p. Так, на 3 делится 9, на 7 – число 999 999, на 11 – чис-

ПЬЕР ФЕРМА (1601–1665)



Работа советника в парламенте города Тулузы не мешала Ферма заниматься математикой. Постепенно он приобрел славу одного из первых математиков Франции, хотя и не писал книг (научных журналов еще не было), ограничиваясь лишь письмами к коллегам. Среди них были Р. Декарт, Ж. Дезарг, Ж. Роберваль и другие. Он соперничал с французским ученым Р. Декартом в создании аналитической геометрии, общих методов решения задач на максимум и минимум. Его приемы построения касательных к кривым, вычисления площадей криволинейных фигур, вычисления длин кривых прокладывали дорогу к созданию дифференциального и интегрального исчислений. С переписки П. Ферма и Б. Паскаля отсчитывает свою историю теория вероятностей. Имя Ферма носит основной принцип геометрической оптики, в силу которого свет в неоднородной среде выбирает путь, занимающий наименьшее время (впрочем, Ферма считал, что скорость света бесконечна, и формулировал принцип более туманно). Однако больше всего прославили Ферма работы по теории чисел.

Математики Древней Греции со времен Пифагора коллекционировали диковинные факты о конкретных натуральных числах, иногда очень больших, но теорем о числах не доказывали (за несколькими исключениями). Лишь древнегреческий математик Диофант (III в. н.э.) написал книгу «Арифметика», в которой были и отрицательные числа, и элементы символики, но, прежде всего, многочисленные факты о решении в целых числах алгебраических уравнений с несколькими неизвестными (их стали называть диофантовыми). Эта книга (не полностью) стала известна в Европе в XVI в., а в 1621 г. она была издана во Франции и стала настольной книгой Ферма.

Ученый постоянно интересовался арифметическими задачами, обменивался сложными задачами с современниками. Начал Ферма с задач про магические квадраты и кубы, но постепенно переключился на закономерности натуральных чисел – арифметические теоремы. Несомненно влияние Диофанта на Ферма, и символично, что он записывает свои удивительные открытия на полях «Арифметики». Заметки и письма – вот и все, что осталось от занятий Ферма арифметикой. Ферма обнаружил, что число $2^{p-1} - 1$ при простом p всегда делится на p (см. *Ферма малая теорема*), а число $2^{2^k} + 1$ простое при $k \leqslant 4$. Он решил, что эти числа простые при всех k, но Л. *Эйлер* впоследствии показал, что при $k = 5$ имеется делитель 641. Эйлер также доказал гипотезу П. Ферма: простые числа вида $4k + 1$ представляются в виде суммы квадратов ($5 = 4 + 1$; $13 = 9 + 4$), а вида $4k + 3$ – нет.

Ферма занимают «невозможные» задачи – задачи, не имеющие решений. Он обнаружил, что нельзя найти прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, у которого площадь – точный квадрат Самое знаменитое утверждение о «невозможности» – великая теорема Ферма. С работ Ферма началась новая математическая наука – теория чисел.

ло 99, на 13 – опять-таки число 999 999. Чтобы получить число, делящееся на 17, придется взять число из 16 девяток, на 19 – число из 18 девяток. И всегда можно быть уверенным, что нужное число найдется, хотя и может оказаться очень длинным.

На чем основано доказательство этого факта? Дело в том, что при делении с остатком на p может встретиться конечное число различных остатков: 0, 1, 2, ..., $p-1$. Поэтому найдутся два числа из девяток (пусть одно – из l девяток, а другое – из m девяток, $l > m$), такие, что оба они при делении на p дают один и тот же остаток. Тогда число из $l-m$ девяток будет делиться на p. Заметим, что обсуждаемое утверждение равносильно тому, что для всякого простого p, не равного 2 и 5, существует число вида 1000...00 (единица с нулями), дающее при делении на простое число p остаток 1. Это очень важное утверждение. На нем основана, например, периодичность бесконечной десятичной дроби, полученной при обращении обыкновенной дроби $1/p$, где $p \neq 2$ и $p \neq 5$ (если выписывать последовательные десятичные знаки при делении 1 на p, то с некоторого места они начнут периодически повторяться).

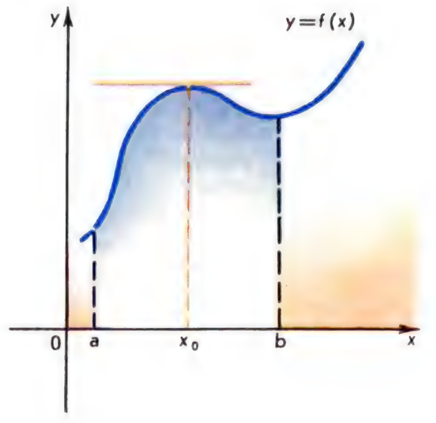
Другая связь имеется с признаками *делимости*. Признак делимости на 3 основывается на том, что 9 делится на 3. Для того чтобы узнать, делится ли на 11 число $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1}$, достаточно разбить его на двузначные числа справа налево: $\overline{a_2 a_1}$, $\overline{a_4 a_3}$, ... (последнее число может оказаться однозначным), сложить эти числа, и если полученная сумма делится на 11, то на 11 делится и A, а если не делится, то и A не будет делиться. Этот признак делимости основывается на том, что 99 делится на 11. Аналогичный признак делимости с разбиением на трехзначные числа имеется для 37. Такие признаки делимости можно построить для всех простых чисел p, не равных 2 и 5, но они могут оказаться неудобными.

Естественно попытаться уточнить, сколько же в точности девяток надо взять, чтобы получилось число, делящееся на p. Оказывается, что всегда годится число, состоящее из $p-1$ девяток. Однако иногда достаточно и меньшего числа, но всегда это наименьшее число девяток l является делителем $p-1$. До сих пор не известен ответ на вопрос, волновавший еще *Гаусса*: конечно или бесконечно число таких p, для которых $l = p-1$ (так обстоит дело для $p = 7$, 17, 19, 23, 29, 47, ...).

Утверждение о делимости чисел, составленных из девяток, является частным случаем значительно более общего утверждения, носящего название малой теоремы Ферма: если p – простое число, a – натуральное число, не делящееся на p, то a^{p-1} при делении на p дает остаток 1 (утверждение о девятках получается при $a = 10$). «Меня озарило ярким светом», – писал Ферма, впервые сообщая об этом своем открытии в письме (1640). В самом деле, эта теорема стала одним из самых фундаментальных фактов в теории делимости натуральных чисел. Ферма не оставил доказательства теоремы, и первое известное доказательство принадлежит Л. *Эйлеру*. В заключение дадим формулировку этой теоремы, не содержащую ограничений на число a: если p – простое число, a – натуральное число, то $a^p - a$ делится на p.

ФЕРМА ТЕОРЕМА

Теорема Ферма – одна из первых теорем *дифференциального исчисления*, устанавливающая связь между поведением функции и значением ее производной. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $]a;b[$ и в некоторой точке x_0 этого интервала принимает наибольшее или наименьшее значение; если в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.



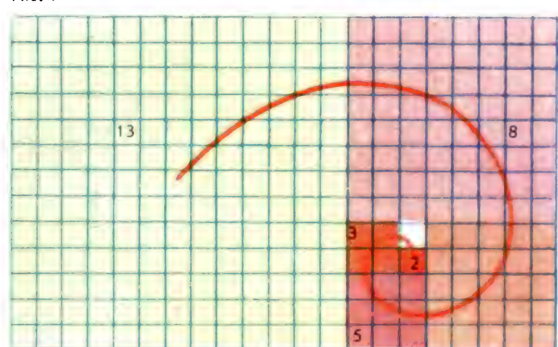
Геометрически это означает, что если в самой высокой или самой низкой точке графика функции, рассматриваемого на интервале $]a;b[$, существует касательная, то эта касательная параллельна оси Ox.

Теорема носит имя французского математика П. *Ферма*. Надо отметить, что сам Ферма не знал понятия производной, и теорема представляет уточнение его соображений и метода.

ФИБОНАЧЧИ ЧИСЛА

Имя Леонардо Фибоначчи (Леонардо Пизанского) – крупного итальянского математика, автора «Книги об абаке» (1202), которая несколько веков оставалась основным хранили-

Рис. 1



щем сведений по арифметике и алгебре, сейчас встречается чаще всего в связи с замечательной числовой последовательностью
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Эта последовательность определяется условиями: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (для каждого натурального $n > 1$). Ее члены называются числами Фибоначчи. Они возникают в самых разных математических ситуациях — комбинаторных, числовых, геометрических.

Если вы любите отыскивать числовые закономерности в живой природе, то заметите, что эти числа часто встречаются в различных спиральных формах, которыми так богат мир растений; черенки листьев примыкают к стеблю по спирали, которая проходит между двумя соседними листьями: 1/3 полного оборота – у орешника, 2/5 – у дуба, 3/8 – у тополя и груши, 5/13 – у ивы; чешуйки на еловой шишке, ячейки на ананасе и семена подсолнечника расположены спиралями, причем количества спиралей каждого направления также, как правило, числа Фибоначчи.

На рис. 1 числа Фибоначчи выражают длины сторон спиральной последовательности квадратов на клетчатой бумаге. Из этого рисунка нетрудно получить такое равенство: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$ (для любого n). Это и другие любопытные соотношения между числами Фибоначчи, такие, как

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1\,;$$

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = u_{n+2}u_{n-1} - u_n u_{n-1} = (-1)^n\,;$$

$$u_{m+k} = u_{k-1}u_m + u_k u_{m+1}\,,$$

можно доказать методом *математической индукции*.

Много интересного в арифметике чисел Фибоначчи. Каждое третье число Фибоначчи четно, каждое четвертое делится на три, каждое пятнадцатое оканчивается нулем, и вообще для каждого d числа Фибоначчи, делящиеся на d, встречаются периодически. Два соседних числа Фибоначчи взаимно просты; u_m делится на u_n тогда и только тогда, когда m делится на n.

При детальном исследовании свойств делимости чисел Фибоначчи выясняется особая роль числа 5, например: если простое число p имеет вид $5t \pm 2$, то u_{p+1} делится на p, а если p имеет вид $5t \pm 1$, то u_{p-1} делится на p.

Число 5 участвует и в приведенной ниже формуле Бине (французский ученый Ж. Бине, 1786–1856), выражающей u_n как функцию от номера n:

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Из этой формулы следует, что u_n растет примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

точнее, u_n равно ближайшему целому числу к $\tau^n/\sqrt{5}$.

Формулу Бине можно доказать по индукции или с помощью производящей функции для последовательности Фибоначчи:

$$u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Выражение для n-го члена в виде суммы нескольких геометрических прогрессий, аналогичное формуле Бине, можно написать и для других последовательностей, определяемых соотношением $x_{n+r} = a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \ldots + a_{r-1} x_{n+r-1}$. Знаменатели этих прогрессий

Пусть через один такт времени красная клетка превращается в зеленую, а та в свою очередь через один такт делится на две – красную и зеленую. Тогда число клеток каждого поколения можно выразить числом Фибоначчи

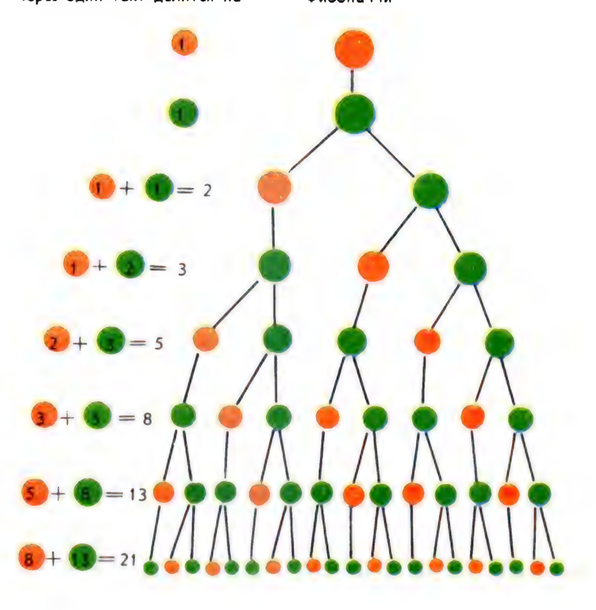
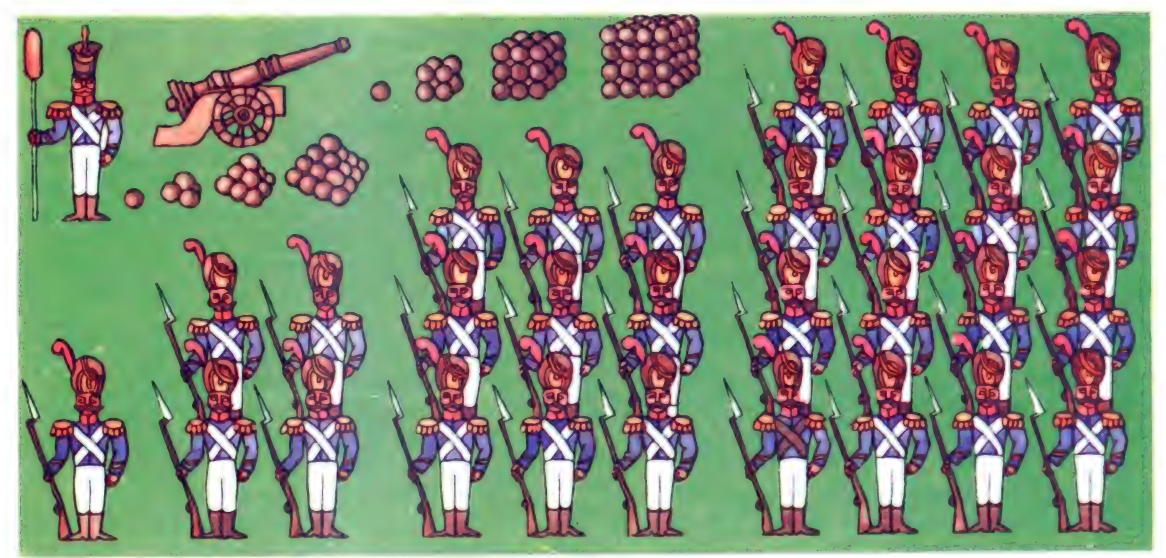


Рис. 1



находятся как корни так называемого характеристического многочлена $p(\lambda) = \lambda^r - a_{r-1}\lambda^{r-1} - \ldots - a_1\lambda - a_0$. Например, для последовательности Фибоначчи характеристический многочлен равен $\lambda^2 - \lambda - 1$. В общем случае надо использовать не только вещественные, но и комплексные корни многочлена (а если к тому же у него какой-то корень λ имеет кратность $k > 1$, то кроме геометрической прогрессии $c\lambda^n$ в сумму могут входить еще последовательности $c_1 n\lambda^n$, $c_2 n^2\lambda^n$, ..., $c_{k-1} n^{k-1}\lambda^n$ – тогда общее число членов в сумме будет всегда равно r).

Уже в нашем веке были найдены новые свойства и применения чисел Фибоначчи. Среди них – самый быстрый способ отыскания экстремума для функции $y = f(x)$ с двумя промежутками монотонности $[a, x^*]$ и $[x^*, b]$ (т.е. с одним экстремумом): оказывается, в наилучшем плане поиска точки экстремума x^*, состоящего из n шагов, участвуют числа Фибоначчи u_1, u_2, ..., u_{n+2}.

ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

Про числа 25, 49, 100 говорят, что они являются квадратами. А почему? Потому что они получаются, если возвести числа 5, 7 и 10 в квадрат. Но имеет ли это название какое-нибудь отношение к геометрической фигуре – квадрату? Посмотрим на рис. 1. Солдаты стоят правильными рядами, образуя квадраты. Число солдат внутри такого квадрата легко подсчитать – нужно умножить их число вдоль горизонтальной стороны на число солдат вдоль вертикальной стороны (заметим, что эти числа равны), и получится общее количество солдат внутри квадрата.

В древности вычислители часто считали с помощью камешков и, естественно, отмечали случаи, когда камешки можно было сложить в виде правильной фигуры. Кроме квадратных чисел были известны треугольные числа, которые получаются так, как это показано на рис. 2 в верхней его части. Нетрудно заметить, что n-е квадратное число равно n^2, а n-е треугольное число равно сумме всех целых чисел от 1 до n, т.е. $\frac{n(n+1)}{2}$ (см. *Арифметическая прогрессия*).

Пятиугольные числа изображены на рис. 2. Чтобы сосчитать n-е пятиугольное число, его нужно разбить на три треугольных, после чего останется еще n точек, как показано на рисунке. В результате получаем, что n-е пятиугольное число равно $n + 3\frac{n(n-1)}{2}$.

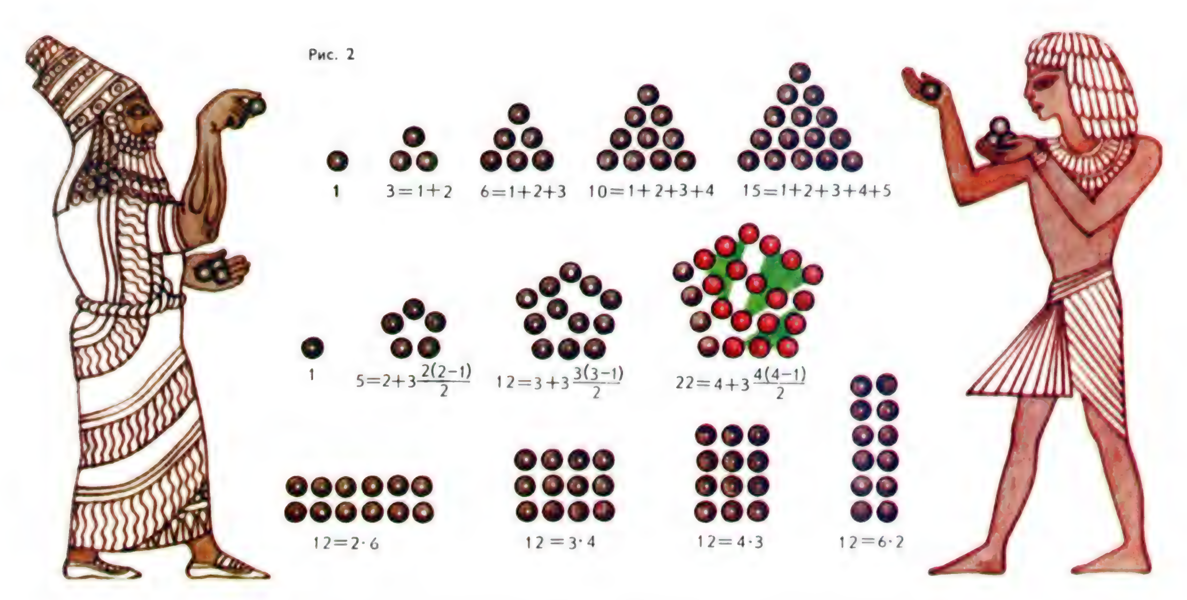
Подобным образом можно образовывать любые многоугольные числа. Формула для n-го k-угольного числа такова:

$$P_n^k = n + (k-2)\frac{n(n-1)}{2}.$$

При $k = 3$ мы получаем треугольные числа, при $k = 4$ – квадратные и т.д.

Аналогично можно представить число в виде прямоугольника. Для числа 12 это можно сделать многими способами (рис. 2), а для числа 13 – лишь расположив все предметы в одну линию. Такое число древние не считали прямоугольным. Таким образом, прямоугольными числами являются все составные числа, а непрямоугольными – *простые числа*.

К фигурным числам также относятся пира-



мидальные числа, которые получаются, если шарики складывать пирамидой, как раньше складывали ядра около пушки. Нетрудно заметить, что n-е пирамидальное число равно сумме всех треугольных чисел – от первого до n-го. Формула для вычисления n-го пирамидального числа имеет вид

$$n_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

ФОРМУЛА

Формула – комбинация математических знаков и букв, выражающая какое-либо предложение.

Например, формула синуса тройного угла (см. *Угол*), выражающая его через синус простого угла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Известно много формул, связывающих между собой элементы *треугольника* (a, b, c – длины сторон, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей). Вот одна из них:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2Rr}.$$

Как правило, термин «формула» употребляют по отношению к комбинациям знаков и букв, которые:

состоят из двух частей, соединенных знаком равенства;

выражают истинное при определенных условиях утверждение;

позволяют выразить некоторую величину через другие.

Особое значение термин «формула» приобретает в *математической логике*, где он применяется по отношению к выражениям формального языка, построенным по определенным правилам.

ФУНКЦИЯ

Функция – это одно из основных математических и общенаучных понятий, выражающее зависимость между переменными величинами.

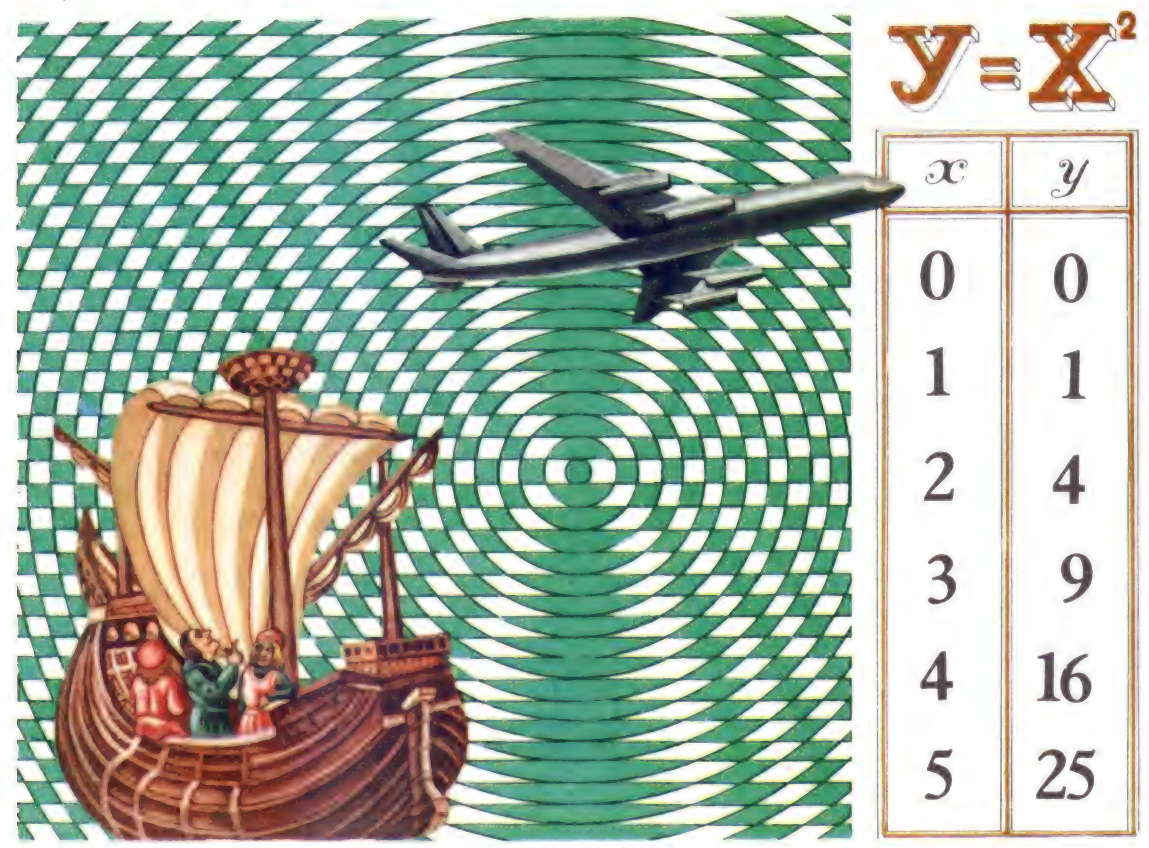
Каждая область знаний: физика, химия, биология, социология, лингвистика и т.д. – имеет свои объекты изучения, устанавливает свойства и, что особенно важно, взаимосвязи этих объектов.

В различных науках и областях человеческой деятельности возникают количественные соотношения, и математика изучает их в виде свойств чисел. Математика рассматривает абстрактные переменные величины и в отвлеченном виде, изучает различные законы их взаимосвязи, которые на математическом языке называются функциональными зависимостями, или функциями.

Например, в соотношении $y = x^2$ геометр или геодезист увидит зависимость площади y квадрата от величины x его стороны, а физик, авиаконструктор или кораблестроитель может усмотреть в нем зависимость силы y сопротивления воздуха или воды от скорости x движения. Математика же изучает зависимость $y = x^2$ и ее свойства в отвлеченном виде. Она устанавливает, например, что при

«Поворотным пунктом в математике была Декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика.»

Ф. Энгельс



зависимости $y = x^2$ увеличение x в 2 раза приводит к четырехкратному увеличению y. И где бы конкретно ни появилась эта зависимость, сделанное абстрактное математическое заключение можно применять в конкретной ситуации к любым конкретным объектам.

Понятие функции для математики и ее приложений, связанных с изучением переменных величин, столь же фундаментально, как понятие числа при изучении количественных соотношений реального мира.

Математическое описание понятия функциональной зависимости или функции состоит в следующем.

Пусть X и Y – какие-то *множества*. Говорят, что имеется функция, определенная на множестве X со значениями в множестве Y, если в силу некоторого закона f каждому элементу $x \in X$ соответствует определенный элемент $y \in Y$.

В этом случае множество X называется областью определения функции; символ x его общего элемента – аргументом функции или независимой переменной; соответствующий конкретному значению $x_0 \in X$ аргумента x элемент $y_0 \in Y$ называют значением функции на элементе x_0 или значением функции при значении аргумента $x = x_0$ и обозначают через $f(x_0)$. При изменении значений аргумента значения $y = f(x) \in Y$, вообще говоря, меняются (в зависимости от значения x). По этой причине величину $y = f(x)$ часто называют зависимой переменной.

Совокупность всех значений, которые функция принимает на элементах множества X, называют множеством значений функции и иногда обозначают через $f(X)$. В частности, если это множество состоит только из одного элемента $y \in Y$, то функция называется постоянной на множестве X.

Например, авиапассажиры сидят в креслах салона пассажирского авиалайнера. Пусть X – множество пассажиров, а Y – множество кресел салона. Тогда возникает естественное соответствие f: каждому пассажиру $x \in X$ сопоставляется то кресло $y = f(x)$, в котором он сидит. Мы имеем здесь, таким образом, простой пример функции, областью определения которой является множество X пассажиров, а областью значений – множество $f(X)$ занимаемых ими кресел. Если заполнены не все кресла Y, то множество значений функции будет подмножеством Y, не совпадающим со всем множеством Y.

Если в кресле y_0 находятся два пассажира x_0' и x_0'' (например, мать и ребенок), то это никак не противоречит определению функции f, которая и x_0', и x_0'' однозначно ставит в со-

«Весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных величин и их функций».

Л. Эйлер



ответствие кресло y_0. Правда, такая функция принимает одно и то же значение y_0 при разных значениях x_0', x_0'' аргумента, подобно тому как числовая функция $y=f(x)=x^2$ принимает одно и то же значение 9 при $x=-3$ и $x=+3$.

Если, однако, какой-то пассажир x_0 ухитрится сесть сразу в два кресла y_0', y_0'', то нарушится принцип однозначной определенности значений функции, поэтому такая ситуация не является функциональной в смысле данного выше определения функции, поскольку требуется, чтобы каждому значению x аргумента соответствовало одно определенное значение $y=f(x)$ функции.

В зависимости от природы множеств X, Y термин «функция» в различных отделах математики имеет ряд полезных синонимов: соответствие, отображение, преобразование, оператор, функционал и т. д. Отображение – наиболее распространенный из них.

Для функции (отображения) приняты следующие обозначения: $f: X \to Y$ и $X \xrightarrow{f} Y$. Если из контекста ясно, каковы область определения и область значений функции, то используют также обозначения $x \to f(x)$ или $y=f(x)$, а иногда обозначают функцию вообще одним лишь символом f. Вместо стандартной тройки (X, f, Y) для обозначения функции можно, разумеется, использовать и любые иные буквы, например рассматривать отображения $\varphi: A \to B$, $\Psi: U \to Y$ и т. д.

Когда функцию $f: X \to Y$ называют отображением, значение $f(x) \in Y$, которое она принимает на элементе $x \in X$, обычно называют образом элемента x. Образом множества $A \subset X$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество $f(A)$ тех элементов Y, которые являются образами элементов множества A.

Рассмотрим еще несколько примеров, поясняющих понятие функции. В них употребляются названные синонимы и введенная терминология.

Формулы $S=x^2$ и $V=x^3$ устанавливают функциональную зависимость площади S квадрата и объема V куба от длины x стороны квадрата и ребра куба соответственно. При такой интерпретации каждая из этих формул задает свою функцию $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, определенную на множестве $\mathbf{R}_+$ положительных чисел со значениями, лежащими в том же множестве $\mathbf{R}_+$.

Здесь и область определения и область значений функции являются числовыми множествами. Такие функции обычно называют числовыми. Числовые функции являются основным, но далеко не единственным видом функций.

Пусть A – множество всевозможных квадратов. Каждый квадрат $a \in A$ имеет сторону вполне определенной длины $l(a)$. Соответствие $a \to l(a)$ порождает, таким образом, действительнозначную функцию $f: A \to \mathbf{R}_+$, определенную на множестве A квадратов и принимающую значения в множестве $\mathbf{R}_+$ положительных чисел.

Пусть B – множество кубов в пространстве.

ВЛАДИМИР АНДРЕЕВИЧ СТЕКЛОВ (1864–1926)



В. А. Стеклов – русский советский математик, видный организатор советской науки.

В трудные для нашей страны годы гражданской войны академик В. А. Стеклов был избран вице-президентом Академии наук (1919). Он взял на себя громадный труд по административно-хозяйственной и организационно-научной деятельности.

26 января 1921 г. В. И. Ленин принял А. М. Горького, В. А. Стеклова и других ученых. Они обсуждали состояние научно-исследовательской работы в РСФСР. После этой беседы В. И. Ленин сказал Горькому: «Вот так, одного за другим мы перетянем всех русских и европейских архимедов, тогда мир, хочет не хочет, а – перевернется».

При непосредственном участии Стеклова был разработан и проведен в жизнь ряд решений, способствовавших развитию науки в нашей стране. В 1921 г. по инициативе ученого при Академии наук был организован Физико-математический институт, первым директором которого его и назначили. (После смерти В. А. Стеклова Математическому институту АН СССР было присвоено его имя.) Ученый принимал активное участие в многочисленных комиссиях и комитетах Академии наук, участвовал в работах по изучению Курской магнитной аномалии, входил в Международную комиссию по изданию трудов Л. Эйлера.

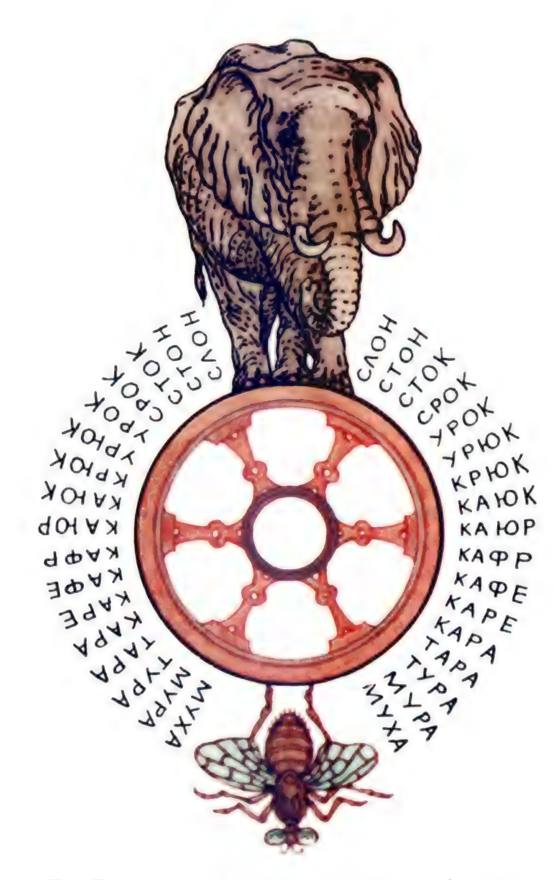
Но главным делом жизни Стеклова были научные исследования, которые он начал в Харьковском университете под руководством русского математика А. М. Ляпунова. Первоначально Стеклов изучал движение твердого тела в жидкости и некоторые вопросы теории упругости, а затем перешел к изучению общих проблем, связанных с решением

Положительному числу $x \in \mathbf{R}_+$ поставим в соответствие один выбранный из множества B куб $b(x)$ с ребром, длина которого равна x. Тогда возникает функция $f: \mathbf{R}_+ \to B$, определенная на множестве чисел $\mathbf{R}_+$, значения которой лежат в множестве B кубов.

Мы часто говорим «рассмотрим последовательность $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n \ldots$ элементов множества Z», имея в виду, что каждому натуральному числу $n \in N$ ставится в соответствие некоторый элемент z_n множества Z. Таким образом, последовательность – это функция $f: N \to Z$, заданная на множестве натуральных чисел.

Если на прямой ввести две системы координат $\{x\}$, $\{x'\}$, имеющие одинаковый масштаб (единицу длины), то координаты x и x' одной и той же точки прямой в этих системах будут связаны соотношением $x' = x - c$, где c – координата в системе $\{x\}$ начала отсчета системы $\{x'\}$. Функция $x' = x - c$ в этом случае обычно называется преобразованием координат. Термин «преобразование» часто встречается в геометрии (см. *Геометрические преобразования*), а также в физике в связи с разнообразными преобразованиями координат.

Каждой числовой функции $f: [0; 1] \to R$, определенной на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$, ставим в соответствие ее значение $f(x_0)$ в некоторой фиксированной точке x_0 этого отрезка. Соответствие $f \to f(x_0)$ порождает принимающую числовые значения функцию $\mathscr{F}: F \to \mathbf{R}$, определенную на множестве $\mathscr{F} = \{f\}$ всех указанных функций f. Для удобства функции, определенные на функциях и принимающие числовые значения, обычно называют функционалами. Так что мы построили функционал $\mathscr{F}: F \to \mathbf{R}$. Другим примером функционала



$L: F = \mathbf{R}$ может служить длина $l(f)$ кривой, являющейся графиком функции $f: [0; 1] \to \mathbf{R}$.

Пусть M – множество всех числовых функций $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, определенных на всей числовой прямой $\mathbf{R}$. Фиксируем число c и каждой функции $f \in m$ поставим в соответствие функцию

уравнений математической физики. Он изучил разложения функций в ряды по многочленам специального вида (этой темой много занимались П. Л. Чебышев и его ученики), дал общее условие разложимости функций в ряд по заданной системе функций, которое, как выяснилось позднее, и является бесконечномерным обобщением теоремы Пифагора, применил полученные результаты к решению различных проблем, в том числе к решению важного для математической физики уравнения Лапласа (этому уравнению удовлетворяет, например, установившееся распределение температуры в теле). Полученные ученым результаты сделали его одним из виднейших специалистов в области математической физики. В 1912 г. он был избран академиком.

В. А. Стеклов был представителем петербургской математической школы, которая объединяла замечательных русских ученых, профессоров высших учебных заведений: П. Л. *Чебышева*, М. В. *Остроградского*, А. М. *Ляпунова*, А. А. *Маркова* и других. К научным работам по математике В. А. Стеклов предъявил требования, характерные для этой школы: единство науки и жизни, выдвижение на первый план проблем, которые непосредственно служат познанию природы. В то же время он считал, что при оценке научных достижений не следует учитывать лишь их прикладную значимость, и подчеркивал, что кажущаяся с первого взгляда отвлеченной научная теория может получить в дальнейшем важные теоретические и практические приложения.

В. А. Стеклов известен также как историк математики, философ и писатель. Его перу принадлежат книги о русских и зарубежных ученых, путевые очерки и т. д.

$f_c \in M$, определяемую следующим соотношением: $f_c(x) = f(x+c)$. Функцию f_c называют сдвигом функции f на величину c. Построенное соответствие $f \to f_c$ порождает функцию $A: M \to M$, называемую оператором сдвига. Оператор, таким образом, это функция, преобразующая одни функции в другие, так $A(f) = f_c$. Операторы мы встречаем на каждом шагу: любой радиоприемник есть оператор, преобразующий электромагнитный сигнал, поступающий на вход приемника, в звуковой сигнал на его выходе; любой из наших органов чувств является оператором (преобразователем) со своими областью определения и областью значений.

Числовые функции изучаются в разделах *математического анализа*, объединяемых названием «теория функций». Функционалы и операторы изучаются в другом (тесно связанном с первым) разделе современного математического анализа, называемом функциональным анализом.

В *теории вероятностей* и *математической статистике* появляются и изучаются еще так называемые случайные функции.

Например, если бросать игральную кость (кубик) и номеру бросания сопоставлять выпавшее при этом бросании число очков, то получится числовая последовательность с целыми значениями в пределах от 1 до 6. Если эту процедуру повторить заново, то получится, вообще говоря, другая последовательность. До проведения опыта мы не знаем точно значения $f(n)$ нашей функции в n-м бросании, хотя все-таки знаем, что с вероятностью 1/6 это может быть, например, 1. Распределение значений и другие свойства так возникающих функций изучают науки вероятностного цикла.

В обращении с функциями наиболее развитым является математический аппарат анализа числовых функций, поэтому большинство реально возникающих функций стремятся задать в числовом виде.

Рассмотрим температуру t в пункте p земной поверхности P. Таким образом, возникает температурная функция $T: P \to \mathbf{R}$, аргументом которой является точка p поверхности P, а значением $t = T(p)$ – температура в этой точке. Чтобы привести эту функцию к числовой записи, точку p характеризуют некоторыми числовыми параметрами, например широтой φ и долготой ψ. После этого вместо $t = T(p)$ пишут $t = T(\varphi, \psi)$, где теперь t, φ, ψ – числа. Но t оказывается, таким образом, зависящей не от одной, а от двух переменных – φ, ψ, поэтому такую числовую функцию называют функцией двух (числовых) переменных. В этом же смысле температура атмосферы в целом есть функция $T(\varphi, \psi, H)$ трех числовых переменных: две первые (φ, ψ) указывают, над какой точкой земной поверхности проводится измерение температуры, а последняя – H – задает высоту, на которой оно выполняется.

Таким образом, то, что раньше выглядело как функция $t = T(p)$ одного аргумента p, при

МИХАИЛ АЛЕКСЕЕВИЧ ЛАВРЕНТЬЕВ (1900–1980)



М. А. Лаврентьев – советский ученый и организатор науки, Герой Социалистического Труда (1967), лауреат Ленинской (1958) и Государственных (1946, 1949) премий, академик (1946), вице-президент Академии наук СССР (1957–1975).

М. А. Лаврентьев родился в Казани, в семье учителя математики Казанского технического училища. В 1918 г. он поступил в Казанский университет, на последнем курсе перевелся в Московский университет и тогда, еще студентом, начал свою педагогическую деятельность в Московском Высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана и в МГУ.

Как математик М. А. Лаврентьев сформировался в научной школе русского математика *Н. Н. Лузина*, из которой вышли такие известные советские ученые, как *П. С. Александров*, А. Н. Колмогоров и другие. М. А. Лаврентьев вспоминал, что «это была особая школа – школа обмена идеями, проблемами, путями поиска их решений, школа творчества, которая связывает людей общими интересами и методами исследований».

М. А. Лаврентьеву принадлежат основополагающие работы по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений и современной теории функций, он создал несколько новых теорий в механике непрерывных сред и газовой динамике.

Когда в конце 50-х гг. Коммунистическая партия и Советское правительство поставили задачу скорейшего развития Сибири и Дальнего Востока, М. А. Лаврентьев возглавил уникальный эксперимент по созданию крупнейшего комплексного научного центра – Сибирского отделения Академии наук СССР. Когда он приехал в Новосибирск, на месте будущего Академгородка на берегу Новосибирского водохранилища стояло лишь несколько бараков. Его талант организатора, огромная зажигающая

переходе к числовой записи может оказаться функцией нескольких числовых аргументов. Такие функции встречаются очень часто. Так, прямоугольный параллелепипед П вполне определяется тройкой чисел (x, y, z) – длинами его ребер, поэтому объем $V_п$ параллелепипеда оказывается функцией $f(x, y, z)$ трех числовых переменных x, y, z. Хорошо известно, что $V_п = f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$.

Задание функции, как правило, предполагает указание *алгоритма* или, по крайней мере, точное описание того, как по фиксированному значению аргумента находить значение функции. Алгоритмическое задание функции является основным для расчетов, выполняемых на электронных вычислительных машинах. В случае числовых функций весьма распространено аналитическое задание функций в виде некоторых математических формул типа $V = x \cdot y \cdot z$, заменяющих словесные описания. В экспериментальных исследованиях, когда какая-то величина измеряется при некотором фиксированном наборе значений параметров, от которых она зависит, возникают таблицы значений функции, которые по найденным значениям функции в отдельных точках позволяют с должной точностью находить ее значения в промежуточных точках. Табличным заданием функций часто пользуются и в математике: таблицы квадратов и кубов чисел, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и т.д. С другой стороны, функции появляются также в графическом задании: например, приборы, регистрирующие температуру или атмосферное давление, часто снабжены самописцем, который выдает показания прибора в виде графика зависимости измеряемого параметра от времени, изображаемого в определенной системе координат.

Понятие «функция» претерпело длительную и довольно сложную эволюцию. Термин «функция» впервые появился в 1692 г. у *Г. В. Лейбница*, правда, в некотором более узком смысле. В смысле, близком к современному, этот термин употребил в письме к Г. Лейбницу от 1698 г. швейцарский ученый И. Бернулли. В формировании современного понимания функциональной зависимости приняли участие многие крупные математики. Описание функции, почти совпадающее с современным, встречается уже в учебниках математики начала XIX в. Активным сторонником такого понимания функции был *Н. И. Лобачевский*.

Мы обсудили понятие функции. Остановимся в заключение на одном общем и важном принципе синтеза и анализа функций.

Хорошо известно, что сколько-нибудь сложная система, например современная технологическая линия, состоит из целого ряда технологических участков, на каждом из которых выполняется какая-то одна сравнительно простая операция. Исходным объектом обработки для следующего участка является продукция предшествующего участка. Такой принцип создания сложных систем из элементов, выполняющих сравнительно простые функции, вы можете увидеть и в радиоприемнике, и в административно-хозяйственном аппарате учреждения.

Отражением этого принципа в математике является операция композиции функций.

Если функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$ таковы,

энергия и научный авторитет в значительной степени обеспечили успех этого эксперимента. Ныне в Академгородке около 50 научно-исследовательских учреждений.

Кузницей молодых научных кадров Сибирского отделения АН СССР стал созданный М. А. Лаврентьевым в 1959 г. Новосибирский государственный университет, в котором преподают ведущие ученые Сибирского отделения и обучение проводится так, что уже студенты II–III курсов начинают заниматься научной работой. По инициативе М. А. Лаврентьева в Академгородке организована физико-математическая школа-интернат, куда принимают наиболее талантливых ребят, победителей всесибирских олимпиад школьников. При своей огромной занятости Михаил Алексеевич всегда находил время для учеников школы-интерната, вникал в их дела и заботы, беседовал с ними. Он неоднократно говорил, что ученому необходимы трудолюбие, энтузиазм, оптимизм, но главное – это требовательность к себе и абсолютная честность. Он считал, что ребятам для развития творческого мышления полезно задавать нестандартные задачи, особенно практического содержания.

Многие теоретические исследования ученого были направлены на решение проблем народного хозяйства.

М. А. Лаврентьев – создатель теории направленного взрыва. И на основе математических расчетов ученого направленным взрывом была создана плотина, которая спасла столицу Казахстана Алма-Ату от разрушительных грязевых потоков – селей.

что одна из них (в нашем случае g) определена на множестве значений другой (f), то можно построить новую функцию $g \circ f\colon X \to Z$, значения которой на элементах множества X определяются формулой $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Построенная «сложная» функция $g \circ f$ называется композицией функций f и g (в таком порядке!).

Композиция функций является, с одной стороны, богатым источником новых функций (синтез), а с другой стороны, способом расчленения сложных функций на более простые (анализ).

С композицией отображений можно столкнуться как в геометрии, рассматривая последовательно выполняемые движения плоскости или пространства, так и в алгебре при исследовании «сложных» функций, полученных композицией простейших элементарных функций. Так, функцию $h(x) = \sin(x^2)$ можно рассматривать как композицию функций $y = f(x) = x^2$ и $g(y) = \sin y$.

Операцию композиции часто приходится проводить несколько раз подряд, и в связи с этим полезно отметить, что она ассоциативна, т.е. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Это обстоятельство, как и в случае сложения или умножения нескольких чисел, позволяет опускать скобки, предписывающие порядок действий. Например, пусть $y_1 = f_1(x) = x^2 - 1$, $y_2 = f_2(y_1) = \sqrt{y_1}$, $y_3 = f_3(y_2) = \cos y_2$, $y_4 = f_4(y_3) = 2y_3$. Тогда

$$f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(x) = 2^{\cos\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Если в композиции $f_n \circ \ldots \circ f_1$ все члены одинаковы и равны f, то часто ее обозначают коротко через f^n.

Известно, что корень квадратный из положительного числа a можно вычислить последовательными приближениями по формуле

$$x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2,$$

начиная с любого начального приближения $x_0 > 0$. Это не что иное, как последовательное вычисление $f^n(x_0)$, где

$$f(x) = (x + a/x)/2.$$

Такая процедура, когда вычисленное на предыдущем шаге значение функции на следующем шаге становится ее же аргументом, называется итерационным процессом. Итерационные процессы очень широко применяются в вычислительной математике.

Отметим также, что даже в том случае, когда обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ определены, вообще говоря, $g \circ f \neq f \circ g$.

Возьмем, например, двухэлементное множество $\{a;\ b\}$ и постоянные функции $f\colon \{a;\ b\} \to a$, $g\colon \{a;\ b\} \to b$. Тогда $g \circ f\colon \{a;\ b\} \to b$, в то время как $f \circ g\colon \{a;\ b\} \to a$.

Отображение $I\colon X \to X$, сопоставляющее каждому элементу множества X его самого (т.е. $I(x) = x$), называется тождественным отображением множества X.

Отображения (функции) $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ называются взаимно-обратными, если $g \circ f = I_X$ и $f \circ g = I_Y$.

Иными словами, если элемент $x \in X$ под действием f перешел в элемент $y = f(x) \in Y$, то под действием обратного отображения g этот элемент $y = f(x)$ будет возвращен именно в $x \in X$, так же как элемент $x = g(y)$ под действием f будет отправлен в элемент y, из которого он получился при отображении g.

Обратное к f отображение g обычно обозначают символом f^{-1}. Таким образом, если f и g взаимно-обратные отображения, то можно записать, что $g = f^{-1}$ и $f = g^{-1}$.

Примерами пар функций, взаимно-обратных на соответствующих числовых множествах $X \subset R$ и $Y \subset R$, могут служить следующие пары элементарных функций:

$y = x^n$ при $x \geqslant 0$ и $x = \sqrt[n]{y}$ при $y \geqslant 0$;

$y = 10^x$ при $x \in R$ и $x = \lg y$ при $y > 0$;

$y = \sin x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и

$x = \arcsin y$ при $y \in [-1, 1]$.

О наиболее часто встречающихся функциях вы прочитаете в статьях *Элементарные функции, Линейная функция, Квадратный трехчлен, Степенная функция, Дробно-линейная функция, Показательная функция, Логарифмическая функция, Тригонометрические функции, Гиперболические функции.*

ЗАДАЧИ

Задача 6. Шифр устроен следующим образом: каждой цифре сопоставлено по три буквы (см. табл.), а знаку * две буквы и пробел.

Таблица.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
а	г	ж	й	м	п	т	х	ш	ы	ю
б	д	з	к	н	р	у	ц	щ	ь	я
в	е	и	л	о	с	ф	ч	ъ	э	

Попробуйте расшифровать следующую запись:

5343934*150413*6*414724144414*81 56215044414*305041080.

Задача 7. Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних (с самого края). Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Докажите, что вторая девочка всегда может выиграть (у ромашки больше двух лепестков).

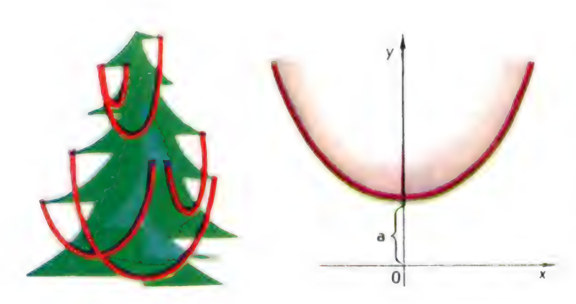
Ц,Ч

ЦЕПНАЯ ЛИНИЯ

Цепная линия – одна из тех плоских кривых, которые мы повседневно наблюдаем, возможно не задумываясь об их форме. Свое название цепная линия получила из-за того, что любая цепочка или любая гибкая тяжелая нерастяжимая струна, закрепленная на концах, является частью цепной линии, как, например, провод электропередачи.

Для записи уравнения цепной линии в качестве оси ординат выбирают ее ось симметрии. Тогда при соответствующем выборе оси абсцисс (рис. 1) уравнение цепной линии примет

Рис. 1

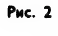


вид

$y = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2.$

Эта функция выражается через одну из *элементарных функций*, а именно $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

Второе замечательное свойство цепной линии обнаружил в 1744 г. Л. *Эйлер*. Он искал такую кривую, проходящую через две заданные точки, чтобы поверхность вращения ее вокруг заданной прямой имела бы наименьшую площадь по сравнению с площадями поверхностей, полученных вращением других кривых, проходящих через эти точки. Оказалось, что такой кривой является цепная линия; соответствующая поверхность была названа катеноидом (цепеобразной). Именно такую форму принимает мыльная пленка, если ее натянуть на два кольца, расположенных на одной оси (рис. 2).


Рис. 2



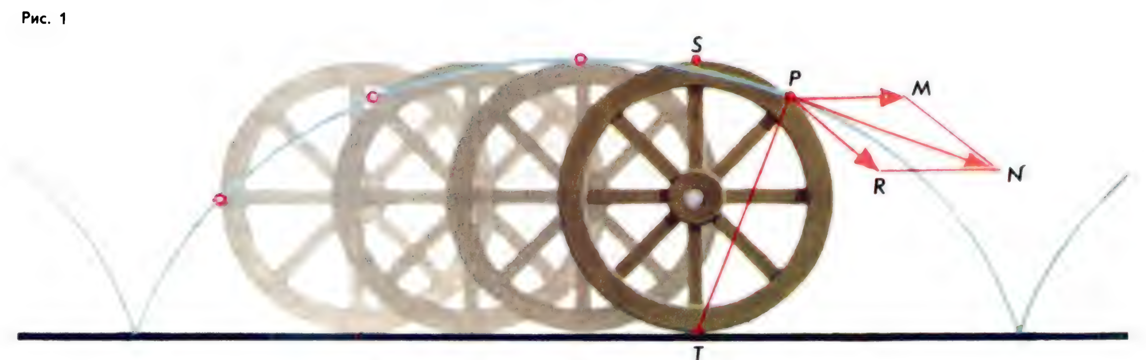
ЦИКЛОИДА

Циклоида (от греческого слова *kykloeides* – «кругообразный») – плоская кривая. Первые исследования циклоиды проводил в XVI в. итальянский физик и астроном Г. Галилей. Позднее этой же замечательной кривой занимались другие блестящие умы: французский физик и математик Б. *Паскаль*, нидерландский механик, физик и математик XVII в. X. Гюйгенс, французский философ и математик Р. *Декарт*.

Циклоида – кривая, которую описывает точка P окружности, катящейся без скольжения по некоторой прямой в той же плоскости (рис. 1). Эту окружность называют порождающей. Описывающая циклоиду точка совершает сложное движение: с одной стороны, она, как и все другие точки катящейся окружности, имеет составляющую скорости в направлении качения окружности, с другой – составляющую по касательной к окружности, поскольку, как и все другие точки окружности, равномерно вращается вокруг ее центра. Величины обеих скоростей равны, поэтому результирующий вектор скорости $\vec{v}$ находится как диагональ ромба $MNRP$. Нетрудно показать, что перпендикуляр к результирующему вектору, проходящий через точку P, пересекает порождающую окружность в точке T ее касания с прямой, по которой она катится, сама же касательная, на которой находится результирующий вектор, проходит через точку S порождающей окружности, диаметрально противоположную точке T.

У циклоиды масса любопытнейших свойств. Оказывается, например, что циклоида является кривой наибыстрейшего спуска. Иначе говоря, скатываясь по снежной горке, профиль которой выполнен в виде циклоиды, мы окажемся у основания горки быстрее, чем в случае другой формы горки. Кроме того, циклоида является такой кривой, по которой должна двигаться тяжелая материальная точка, чтобы период ее колебаний не зависел от амплитуды колебаний. Используя это свойство, X. Гюйгенс сконструировал часы, из-

Рис. 1

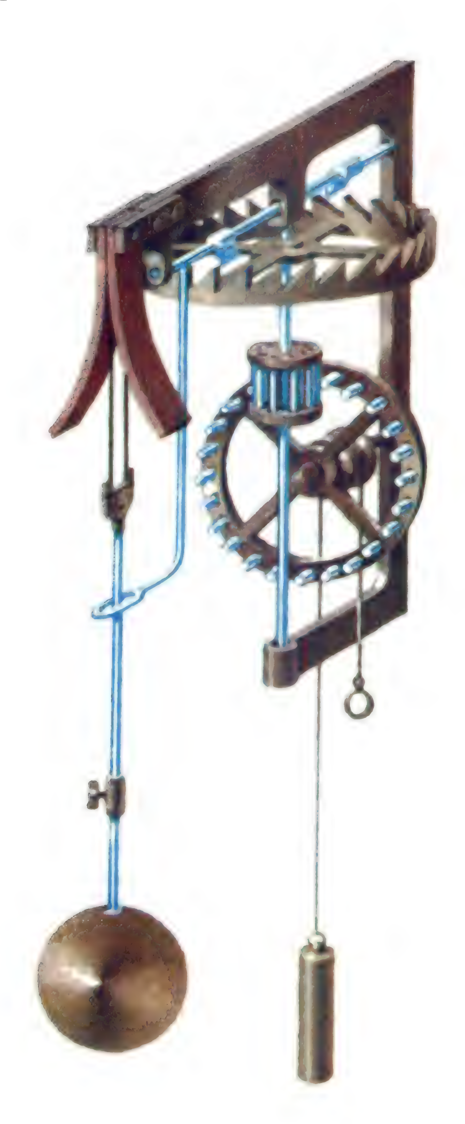


ображенные на рис. 2. Любопытно, что траектория конца маятника, как и ограничивающие его боковые «щеки», представляет из себя циклоиду

Уравнение циклоиды:

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}.$$

Рис. 2



ЦИЛИНДР

Цилиндром называют фигуру, которая получается при вращении прямоугольника вокруг одной из его сторон. Слово «цилиндр» происходит от греческого *kylindros*, что означает «валик», «каток». Рассматривают также цилиндрические поверхности, составленные из всех прямых пространства, параллельных данной прямой (оси) и удаленных от нее на данное расстояние. Составляющие цилиндрическую поверхность прямые называются ее образующими. Конечно, все образующие получаются из одной вращением вокруг оси, и цилиндр можно определить как часть пространства, ограниченную цилиндрической поверхностью и двумя перпендикулярными ее оси плоскостями (рис. 1). Полное наименование такого цилиндра – прямой круговой цилиндр. В пересечении прямой круговой цилиндрической поверхности с плоскостью, не параллельной оси, может получиться либо окружность, либо *эллипс* (рис. 1).

Наряду с прямыми круговыми рассматривают еще и так называемые обобщенные цилиндры и цилиндрические поверхности. Пусть дана плоская фигура m (рис. 2). Параллельные между собой отрезки xx' равной длины, проведенные через все точки x фигуры m по одну сторону от ее плоскости, заполняют некоторую пространственную фигуру, которую и называют обобщенным цилиндром с основанием m и образующими xx'. Если m – круг, а образующие xx' перпендикулярны плоскости m, то как раз и получится прямой круговой цилиндр. Другой частный случай обобщенного цилиндра – *призма*. Она получается, если m – многоугольник.

Объем любого цилиндра вычисляется по формуле $V = S \cdot H$, где S – площадь основания m, а H – высота, т.е. расстояние между плоскостями основания m и получающегося из m параллельным переносом на вектор xx' второго основания m'.

«Я думаю, что никогда до настоящего времени мы не жили в такой геометрический период. Все вокруг – геометрия».

Ле Корбюзье.



Рис. 1

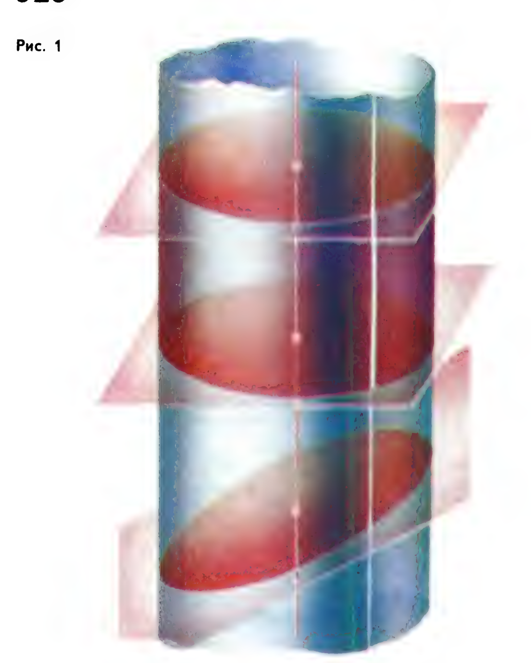
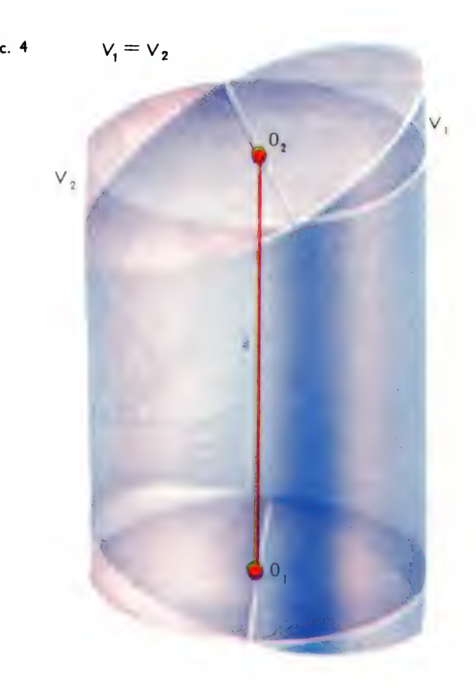
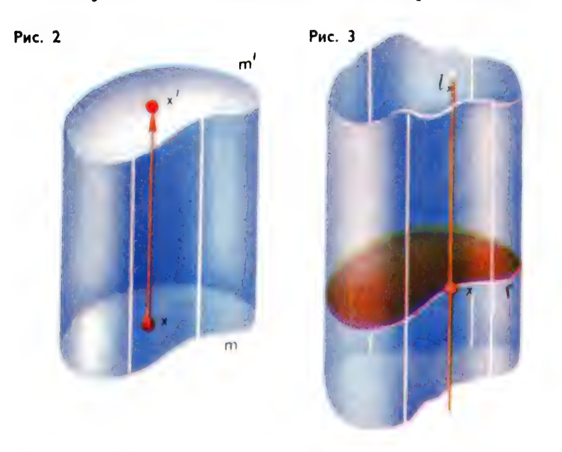


Рис. 4



Если через все точки x плоской замкнутой кривой Г провести параллельные между собой, но не лежащие в плоскости Г прямые l_x, то получится обобщенная цилиндрическая по-

Рис. 2 Рис. 3



верхность с направляющей Г и образующими l_X (рис. 3). Если Г – окружность, а образующие l_X перпендикулярны плоскости Г, то получится уже знакомая прямая круговая цилиндрическая поверхность. Если Г – замкнутая ломаная (граница многоугольника), то получится призматическая поверхность.

Интересно, что объем пространственного тела, ограниченного цилиндрической поверхностью и любыми двумя пересекающими ее ось в точках O_1 и O_2 плоскостями (печной трубы, рис. 4), можно вычислить по формуле $V = S_1 \cdot O_1O_2$, где S_1 – площадь перпендикулярного образующим сечения.

Уравнение поверхности цилиндра, у которого ось параллельна одной из координатных осей, не содержит переменной, соответствующей этой оси. Так, уравнение поверхности прямого кругового цилиндра имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

ЦИФРЫ

Цифры – условные знаки для обозначения чисел.

Первыми записями чисел можно считать зарубки на деревянных бирках или костях, а позднее – черточки. Но большие числа изображать таким способом было неудобно, поэтому стали применять особые знаки (цифры) для некоторых совокупностей черточек.

В Древнем Египте около 5000 лет назад стали обозначать число 10 иероглифом ∩ (возможно, это символ дуги, которую ставили над десятком черточек), число 100 – знаком 𓍢 (это символ измерительной веревки) и т. д. Из таких цифр составляли десятичную запись любого числа, например число 124 обозначали так: ⁞⁞∩∩𓍢

Народы (вавилоняне, ассирийцы, шумеры), жившие в Междуречье Тигра и Евфрата в период от II тысячелетия до н. э. до начала нашей эры, сначала обозначали числа с помощью кругов и полукругов различной величины, но затем стали использовать только два клинописных знака – прямой клин ▼ (1) и лежащий клин ◄ (10). Эти народы использовали шестидесятеричную систему счисления, например число 23 изображали так: ◄◄▼▼▼ Число 60 снова обозначалось знаком ▼, например число 92 записывали так: ▼◄◄◄▼▼

Впоследствии вавилоняне ввели специальный символ ◂ для обозначения пропущенного шестидесятичного разряда.

В начале нашей эры индейцы племени майя,


ЦИФРЫ
0123456789

которые жили на полуострове Юкатан в Центральной Америке, пользовались другой системой счисления – двадцатеричной. Они обозначали 1 точкой, а 5 – горизонтальной чертой, например запись ∸∸∸∸ означала 14. В системе счисления майя был и знак для нуля. По своей форме он напоминал полузакрытый глаз.

В Древней Греции сначала числа 5, 10, 100, 1000, 10 000 обозначали буквами Г, Δ, Н, Х, М, а число 1 – черточкой /. Из этих знаков составляли обозначения ⊏Δ (50), ΔΔΔ Г (35) и т. д. Позднее числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000, 10 000, 20 000 стали обозначать буквами греческого алфавита, к которому пришлось добавить еще три устаревшие буквы. Чтобы отличить цифры от букв, над буквами ставили черточку

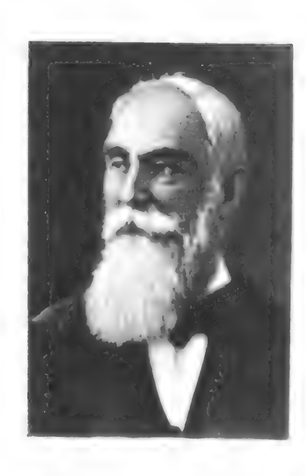
Сходная система обозначения чисел применялась и в Древней Руси, культура которой была тесно связана с греческой культурой Византии. Над буквами, обозначавшими числа, ставили специальный знак – титло.

Большие числа славяне записывали теми же буквами, но для обозначения тысяч рядом с буквой слева внизу ставили знак ≠, например: 1000 – ≠Ã; 3000 – ≠Г̃ Число 10 000 обозначали той же буквой, что и 1, но без титла, и ее обводили кружком. Называлось это число «тьма». Отсюда и выражение «тьма народу». Число следующего разряда – 100 000 – называлось «легион». Для обозначения этого числа писали букву А и вокруг нее ставили кружок из точек; 10 легионов составляли новую единицу – леодр. Леодр обозначали буквой А, заключенной в кружок из черточек.

Тьма тем (т. е. 10^{12}) называлась «легион», легион легионов (т. е. 10^{24}) – «леодр», леодр леодров (т. е. 10^{48}) – «ворон», и наконец, число 10^{49} называлось «колода». Для обозначения воронов букву ставили в кружок из крестиков. Для бóльших чисел уже названий не было.

Из Древнего Рима дошли до нашего времени цифры I (1), V (5), X (10), C (100), D (500), M (1000). Одни ученые полагают, что V обозначает раскрытую ладонь, а X – две ладони или скрещенные руки. Другие же считают, что знак X ведет свое происхождение от двух линий, которыми перечеркивали десяток черточек, а V означает половину от X. От римлян

ПАФНУТИЙ ЛЬВОВИЧ ЧЕБЫШЕВ



П. Л. Чебышев – один из крупнейших математиков прошлого века. Первоначальное образование он получил дома. В 1841 г. Чебышев окончил физико-математический факультет Московского университета, через несколько лет защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей». В 1847 г. он переехал в Петербург и начал чтение лекций по алгебре и теории чисел. В Петербурге Чебышев защитил докторскую диссертацию «Теория сравнений» и стал профессором Петербургского университета. В 1856 г. он был избран академиком Петербургской академии наук. В 1882 г. он прекратил чтение лекций и целиком занялся научной работой.

К 50-м гг. относятся знаменитые работы Чебышева о простых числах. Со времен Пифагора математики интересовались таинственными законами, по которым в натуральном ряду возникают простые числа. Они могут то идти подряд: 5, 7; 11, 13; 8 004 119, 8 004 121, а то появляются большие отрезки, на которых простых чисел вовсе нет (например, между 113 и 127). Математики проделали огромную экспериментальную работу, проявили поразительное остроумие, пытаясь установить закономерность их появления. В 1809 г. французский математик А. Лежандр проанализировал простые числа, лежащие между 10 000 и 1 000 000, и обнаружил, что если обозначить через $\pi(n)$ число простых чисел, не превосходящих n, то при $n \leqslant 10^6$ число $\pi(n)$ очень мало отличается от

$$\frac{n}{\ln n - 1{,}08366}.$$

Другой французский математик – Ж. Бертран подметил (но не доказал), что между n и $2n - 2$ при $n > 3$ обязательно появляется хотя бы одно простое число

Трудно было сомневаться в справедливости этих наблюдений, проверенных на таком большом материале, но доказательство получить не удавалось. А через 40 лет, в 1848–1850 гг., П. Л. Чебышев показал, что если бы Лежандр располагал несравненно бóльшими таблицами, то, скорее всего, постепенно $\pi(n)$ стало ближе к более простому выражению $n/\ln n - 1$. Более точно он доказал, что если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)}{\dfrac{n}{\ln n}}$$

эта нумерация пришла в Европу и многие азиатские страны.

В Китае и Японии для записи чисел применялись иероглифы.

Современная десятичная запись натуральных чисел впервые появилась в Индии в VI в. Через арабов, завоевавших в VII–VIII вв. обширные районы Средиземноморья и Азии, индийская нумерация получила широкое распространение. Отсюда и название – арабские цифры.

В страны Европы новая, индийская нумерация была также занесена арабами в X–XIII вв., однако вплоть до XVIII в. в официальных бумагах разрешалось ставить только римские цифры. Лишь к началу XIX в. индийскую нумерацию стали применять повсеместно.

В России уже в XVII в. во всех без исключения математических рукописях встречается только позиционная десятичная *система счисления.*

ЧИСЕЛ ТЕОРИЯ

Теория чисел – раздел математики, в котором изучаются свойства чисел.

Основной объект теории чисел – натуральные числа (см. *Число*). Главное их свойство, которое рассматривает теория чисел, – это *делимость.* Первый круг задач теории чисел – разложение чисел на множители. Основными «кирпичиками» в таком разложении являются *простые числа,* т. е. числа, делящиеся только на 1 и на себя; 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 – вот первые десять простых чисел (число 1 не относят к простым). Замечательная теорема, называемая основной теоремой арифметики, гласит: всякое натуральное число раскладывается на простые множители, причем единственным способом (с точностью до порядка их расположения). Разложив два числа на простые множители, несложно определить, делится одно из них на другое или нет. Но до сих пор бывает трудно выяснить, является ли данное большое число простым, т. е. делится ли оно на какое-либо другое число, кроме себя и единицы.

С разложением чисел на простые множители связан ряд арифметических функций. Укажем некоторые из них. $\varphi(n)$ – функция Эйлера – количество чисел от 1 до n, взаимно простых с числом n (т. е. не имеющих с n общих множителей, кроме единицы); $\alpha(n)$ – количество делителей числа n, $\tau(n)$ – сумма всех делителей числа n, $\pi(n)$ – функция Чебышева – количество простых чисел, не превосходящих n. С помощью этих функций выражаются многие свойства натуральных чисел. Теорема Евклида утверждает, что простых чисел беско-

существует, то он равен 1. П. Л. Чебышеву удалось доказать неравенство

$$0{,}92 < \frac{\pi(n)}{\frac{\ln}{n}} < 1{,}06,$$

из которого следовала гипотеза Бертрана (постулат Бертрана).

Исследования Чебышева по теории чисел сразу же выдвинули молодого русского математика в число первых ученых Европы.

Второй цикл работ, прославивших Чебышева, составили его исследования по теории вероятностей – молодой тогда области математики. Он получил много интересных результатов. Одним из самых известных является неравенство Чебышева, позволяющее оценивать отклонение частоты появления положительного исхода в эксперименте от теоретической вероятности этого события. Чебышев по праву считается основателем русской школы теории вероятностей.

Для П. Л. Чебышева характерен интерес к задачам математики, выдвигаемым практикой. У Чебышева были работы, посвященные черчению географических карт, рациональному раскрою одежды, он даже изготовил чехол, плотно облегающий шар. Но особенно много сил отдал ученый теоретическим и практическим вопросам создания механизмов. Ему принадлежит много интересных конструкций, в том числе арифмометр, полуавтомат, самокатное кресло, гребной автомат, который повторял движение весел в лодке. Создание механизмов, осуществляющих движение по тем или иным кривым, привело П. Л. Чебышева к рассмотрению вопроса о наилучшем приближении произвольных кривых кривыми из того или иного класса (которые может реализовывать механизм). За этим последовали задачи о приближении произвольных функций многочленами, и были введены различные классы многочленов, лучше всего осуществляющие это приближение. Широкую известность получили многочлены Чебышева, которые имеют наименьший возможный максимум на отрезке $[-1, 1]$ среди многочленов вида $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ (наименее уклоняются от нуля).

П. Л. Чебышев создал первую математическую школу в России, она называлась Петербургской математической школой, из которой вышли первоклассные ученые.

нечно много. Это означает, что $\pi(n) \to \infty$ при возрастании числа n. Удалось выяснить, как быстро функция $\pi(n)$ стремится к бесконечности. Оказалось, что примерно так же, как функция

$$\frac{n}{\ln n}.$$

Эта теорема носит название асимптотического закона распределения простых чисел. Она была сформулирована и в существенной части доказана П. Л. *Чебышевым* (1849), а полностью доказана лишь 50 лет спустя.

Асимптотический закон распределения простых чисел – это результат так называемой аналитической теории чисел, которая широко использует методы математического анализа для исследования теоретико-числовых функций. Обнаруженный во второй половине XIX в. факт связи такого дискретного объекта, как целые числа, с глубокими свойствами функций оказал большое влияние на развитие теории чисел.

Разложение чисел на множители учитывает только структуру множества натуральных чисел, связанную с умножением, наиболее глубокие и трудные задачи теории чисел возникают при сравнении сложения и умножения. К числу таких задач можно отнести, например, проблему Гольдбаха – можно ли всякое четное число представить как сумму двух простых; великую теорему Ферма (см. *Ферма великая теорема*) – можно ли n-ю степень числа представить как сумму n-х степеней двух каких-либо чисел и т. п.

Теория чисел привлекательна тем, что в ней много простых по формулировкам, но трудных и интересных задач. Этих задач – решенных и нерешенных – накопилось очень много, и часто теория чисел представляется собранием разрозненных изящных головоломок. Однако это не так. Теория чисел создала свои замечательные методы, причем многие из них активно развиваются в последние десятилетия, что влило новую живую струю в эту самую древнюю часть математики.

Классическим методом теории чисел является метод *сравнений*. Отождествляя между собой числа, дающие одинаковые остатки при делении на выбранное число, часто удается установить невозможность какого-либо соотношения. Например, рассматривая остатки от деления на 3 (или, как говорят, по модулю 3), легко доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения $3x^2 + 4y^2 = 5z^2$.

Аналитический метод состоит, как мы уже говорили, в том, что, отправляясь от чисел, строят функции, которые исследуют методами математического анализа. Так, советский

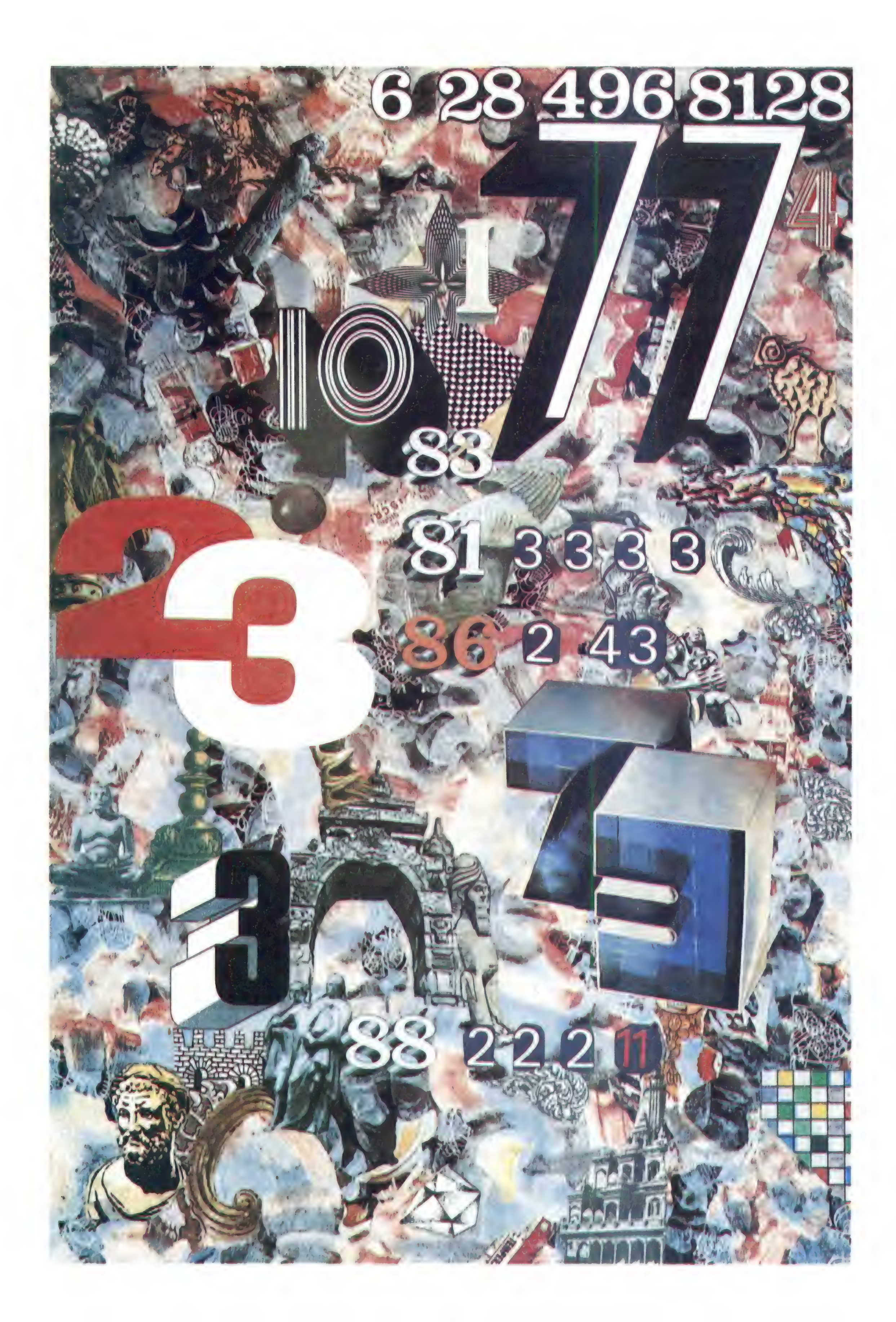
ИВАН МАТВЕЕВИЧ ВИНОГРАДОВ (1891–1983)



И. М. Виноградов – русский советский математик, дважды Герой Социалистического Труда (1945, 1971), лауреат Ленинской (1972) и Государственных (1941, 1983) премий, академик (1929).

Основные работы И. М. Виноградова относятся к теории чисел (см. *Чисел теория*). Ему принадлежит решение одной из двух проблем Гольдбаха, которые были поставлены в переписке Х. Гольдбаха (немецкого математика XVIII в., большую часть жизни прожившего в России) с *Л. Эйлером* в 1742 г. Они формулируются так: каждое четное число $\geqslant 4$ является суммой двух простых чисел (бинарная проблема Гольдбаха) и каждое нечетное число $\geqslant 7$ является суммой трех простых чисел (тернарная проблема Гольдбаха). Эти проблемы не поддавались усилиям крупнейших математиков. И. М. Виноградов не только решил тернарную проблему Гольдбаха, доказав, что каждое достаточно большое нечетное число представляется суммой трех простых чисел, но также получил формулу, выражающую количество таких представлений. По этой формуле можно узнать, сколькими способами заданное нечетное число может быть разложено на сумму трех простых чисел. Для решения проблемы Гольдбаха ученый создал один из самых общих и мощных методов теории чисел – метод тригонометрических сумм. Применяя этот метод, он сам и его последователи получили большое количество выдающихся результатов как в теории чисел, так и в других областях математики.

И. М. Виноградов родился в 1891 г., в небольшом селе Милолюб Великолукского района, в семье сельского священника. Он окончил Великолукское реальное училище (1910), Петербургский университет (1914), работал доцентом и профессором в Пермском университете, затем профессором в ленинградских вузах. Он был организатором и бессменным директором Математического института им. В. А. Стеклова Академии наук СССР – признанного центра математики в СССР и во всем мире.


6 28 496 8128
7 7
4
1
10
83
81 3 3 3 3
2 3
86 2 43
7 3
3
88 2 2 2 11

ученый академик И. М. *Виноградов* доказал вариант проблемы Гольдбаха – представимость достаточно большого нечетного числа в виде суммы трех простых.

Геометрический метод теории чисел мы проиллюстрируем на примере великой теоремы Ферма. В этой теореме идет речь о разрешимости в целых числах уравнения $x^n + y^n = z^n$. Поделив обе части уравнения на z^n и заменив x/z на u, а y/z на v, получим уравнение $u^n + v^n = 1$. Это уравнение задает на плоскости с координатами (u, v) некоторую кривую. Решения исходного уравнения в целых числах соответствуют решениям нового уравнения в рациональных числах. О каждом таком решении (u, v) можно говорить как о точке с рациональными координатами на этой плоскости. Теперь можем попытаться применить геометрические методы к кривой $u^n + v^n = 1$ для исследования на ней множества точек с рациональными координатами.

Большой раздел теории чисел, занимающийся нахождением решений уравнений в целых и рациональных числах, носит название теории *диофантовых уравнений*, по имени древнегреческого ученого Диофанта (III в.).

К числу очень старых и известных задач теории чисел относится задача представления чисел суммами квадратов. Перечислим некоторые из полученных результатов:

каждое целое число можно представить как сумму четырех квадратов целых чисел (например: $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$);

каждое простое число вида $4n + 1$ можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел (например: $5 = 2^2 + 1^2$, $41 = 4^2 + 5^2$ и т. п.), а ни одно целое (не только простое) число вида $4n + 3$ нельзя представить в таком виде;

каждое простое число, кроме чисел вида $8n - 1$, можно представить в виде суммы трех квадратов целых чисел.

Простое алгебраическое тождество

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

позволяет сделать вывод: если два числа представимы суммами двух квадратов, то и их произведение представимо суммой двух квадратов. Алгебраические методы в последнее время широко применяются в теории чисел. Этому способствовало развитие такого общего алгебраического понятия, как *поле*, само появление которого во многом стимулировалось задачами теории чисел.

Чем особенно ценна теория чисел? Ведь найти непосредственное применение ее результатам трудно. Тем не менее задачи теории чисел привлекают как пытливых молодых людей, так и ученых в течение многих столетий. В чем же здесь дело? Прежде всего эти задачи, как уже говорилось, очень интересны и красивы. Во все времена человека поражало, что на простые вопросы о числах так трудно найти ответ. Поиски этих ответов часто приводили к открытиям, значение которых далеко превосходит рамки теории чисел. Достаточно упомянуть о так называемой теории идеалов немецкого математика XIX в. Э. Куммера, которая родилась в связи с попытками доказать великую теорему Ферма.

ЧИСЛО

Число – одно из основных понятий математики, позволяющее выразить результаты счета или измерения.

Когда-то численность множества не отделялась от других его качеств, и для того, чтобы сравнить два множества, их элементы располагали друг против друга. Но потом оказалось, что удобнее сравнивать все множества с одним и тем же множеством-посредником. Так как пальцы были всегда при себе, то и стали считать по пальцам. А потом появились особые названия для чисел – сначала для небольших, а потом для все бо́льших и бо́льших.

Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их (см. *Цифры*). При этом вавилоняне уже пользовались, по сути дела, позиционным принципом в обозначении чисел – один и тот же знак обозначал у них и 1, и 60, и 3600 (их *система счисления* была шестидесятеричной). Не знали они только знака для нуля – это замечательное изобретение сделали индийские математики в VI в.

Для практических нужд требовалось не только уметь обозначать числа, но и выполнять с ними арифметические действия. Вавилоняне, чтобы справиться с трудностями своей шестидесятеричной системы счисления, применяли таблицы произведений, квадратов, кубов и т. д. А древние греки и римляне считали с помощью абака – прибора, похожего на русские счеты, но с камешками вместо косточек (см. *Вычислительная техника*).

Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. В III в. до н. э. Архимед разработал систему обозначения чисел вплоть до такого громадного числа, как $10^{8 \cdot 10^{16}}$.

Наряду с натуральными числами применяли дроби – числа, составленные из целого числа долей единицы. Множества натуральных чисел и дробей было достаточно, чтобы выразить результат любого измерения. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения двух таких чисел, т. е. дроби. Древнегреческий философ и математик Пифагор учил, что «...элементы

чисел являются элементами всех вещей и весь мир в целом является гармонией и числом». Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата не соизмерима с его стороной. Отсюда следовало, что натуральных чисел и дробей недостаточно для того, чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основания утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно.

Открытие несоизмеримых величин наложило глубокий отпечаток на развитие древнегреческой математики. Так как в то время не знали чисел, отличных от натуральных и дробей, возникли две науки, которые развивались параллельно, но имели различные объекты изучения: арифметика – наука о числах и геометрия, в которой, в частности, рассматривалось учение о величинах – длинах, площадях, объемах.

Древнегреческие ученые умели складывать и вычитать величины, находить их кратные и доли, а над их отношениями умели выполнять операции умножения, деления, возведения в степень. Однако, поскольку не существовало общей идеи числа, все эти операции невозможно было объединить в единую систему, в арифметику действительных чисел. Это тормозило развитие древнегреческой науки, сковывало, как панцирь, живое тело античной математики. Гораздо свободнее, но менее строго обращались с числами ученые, занимавшиеся практическими задачами: астрономы, землеустроители, географы и т.д. В их работах, относящихся ко II в. до н.э.–III в., постепенно стирается грань между числами и величинами. Этот процесс завершили математики средневекового Востока (Омар Хайям, XI–XII вв.).

С развитием алгебры, уже при решении линейных уравнений с одним неизвестным, возникает необходимость в отрицательных числах. Еще до нашей эры их стали употреблять китайские математики. Широко использовали отрицательные числа и индийские математики (Брахмагупта, VII в.). Замечательным достижением индийских математиков было введение понятия *нуля* и знака для него, что позволило им создать десятичную систему записи натуральных чисел и разработать правила операций над записанными так числами. Эту запись чисел стали применять математики многих восточных стран, откуда она попала в Европу.

В XV в. самаркандский ученый ал-Каши ввел десятичные дроби. Это нововведение оставалось неизвестным европейским математикам, и лишь в 1584 г. нидерландский математик и инженер С. Стевин вновь пришел к этому открытию. Числа целые, дробные (положительные и отрицательные) и нуль получили общее название рациональных чисел.

Следующими важными этапами в развитии понятия числа были открытие *комплексных чисел* и формальное построение теории действительных чисел на основе понятия натурального числа.

Изучение понятия числа шло не только путем обобщения, но и путем выделения из общего понятия числа важных частных случаев. Например, в множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел были выделены рациональные и иррациональные числа, т.е. числа, которые соответственно можно записать в виде дроби p/q и которые нельзя записать в таком виде. По своей десятичной записи эти виды чисел различаются тем, что в записи рационального числа, начиная с некоторого места, неизменно повторяется одна и та же цифра или группа цифр, тогда как в записи иррационального числа такого повторения наступить не может. Так, $0{,}333\ldots(=1/3)$, $5{,}0323232\ldots(=2491/495)$ – рациональные числа; $1{,}4142\ldots(=\sqrt{2})$, $3{,}14159\ldots(=\pi)$ – иррациональные числа.

Далее были выделены алгебраические числа, т.е. числа, являющиеся корнями уравнений вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = c,$$

где a_0, a_1, a_n – целые числа (если, кроме того, $a_0 = 1$, то корень уравнения называют целым алгебраическим числом). Примерами алгебраических чисел могут служить $1+\sqrt{2}$ (корень уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$), $\sqrt[3]{11}$ (корень уравнения $x^3 - 11 = 0$). Каждое рациональное число p/q является алгебраическим, поскольку оно является корнем уравнения $qx - p = 0$.

Все числа, не являющиеся алгебраическими, называют трансцендентными. Очевидно, что все трансцендентные числа иррациональны. Трансцендентно число $\pi = 3{,}1415926\ldots$, играющее важнейшую роль в математике. Отсюда вытекает, в частности, невозможность «квадратуры круга» (см. *Классические задачи древности*). Трансцендентно и число $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = 2{,}71828\ldots$, которое очень часто встречается в математическом анализе. Советский математик А.О. Гельфонд доказал, что любое число вида α^β, где α – алгебраическое число, отличное от 0 и 1, а β – иррациональное алгебраическое число, является трансцендентным. Хотя абстрактное доказательство существования трансцендентных чисел довольно просто (оно проводится с помощью общих теорем о множествах), проверить, что некоторое конкретное число трансцендентно, весьма сложно. Существуют числа, для которых вопрос об их трансцендентности не выяснен до сих пор.

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Рассмотрим два зубца хорошо всем известного профиля пилы. Направим ось Ox вдоль ровной стороны пилы, а ось Oy – перпендикулярно к ней. Получим график некоторой функции, изображенный на рис. 1.

Совершенно очевидно, что и в точке a_1, и в точке a_2 значения функции оказываются наибольшими в сравнении со значениями в соседних точках справа и слева, а в точке b_2 – наименьшим в сравнении с соседними точками. Точки a_1, a_2, b_2 называются точками экстремума функции (от латинского *extremum* – «крайний»), точки a_1 и a_2 – точками максимума, а точка b_2 - точкой минимума (от латинских *maximum* и *minimum* – «наибольший» и «наименьший»).

Уточним определение экстремума.

Говорят, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, если найдется интервал, содержащий точку x_0 и принадлежащий области определения функции, такой, что для всех точек x этого интервала оказывается $f(x) < f(x_0)$. Соответственно функция $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум, если для всех точек некоторого интервала выполняется условие $f(x) > f(x_0)$.

На рис. 2 и 3 приведены графики функций, имеющие в точке $x = 0$ экстремум.

Обратим внимание на то, что по определению точка экстремума должна лежать внутри промежутка задания функции, а не на его конце. Поэтому для функции, изображенной на рис. 1, нельзя считать, что в точке b_1 она имеет минимум.

Если в данном определении максимума (минимума) функции заменить строгое неравенство на нестрогое $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$), то получим определение нестрогого максимума (нестрогого минимума). Рассмотрим для примера профиль вершины горы (рис. 4). Каждая точка x плоской площадки – отрезка $[x_1, x_2]$ является точкой нестрогого максимума.

В *дифференциальном исчислении* исследование функции на экстремумы очень эффективно и достаточно просто осуществляется с помощью производной. Одна из основных теорем дифференциального исчисления, устанавливающая необходимое условие экстремума дифференцируемой функции,– теорема Ферма (см. *Ферма теорема*). Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум. Если в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то она равна нулю.

На геометрическом языке теорема Ферма означает, что в точке экстремума касательная к графику функции горизонтальна (рис. 5). Обратное утверждение, разумеется, неверно, что показывает, например, график на рис. 6.

Теорема названа в честь французского математика П. *Ферма*, который одним из первых решил ряд задач на экстремум. Он еще не располагал понятием производной, но применял при исследовании метод, сущность которого выражена в утверждении теоремы.

Достаточным условием экстремума дифференцируемой функции является смена знака производной. Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, т.е. ее убывание сменяется возрастанием, то точка x_0 будет точкой минимума. Напротив, точка x_0 будет точкой максимума, если производная

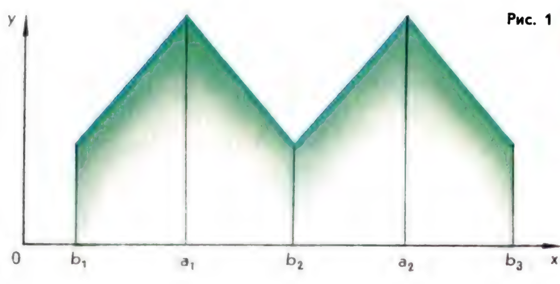


Рис. 1

Рис. 2

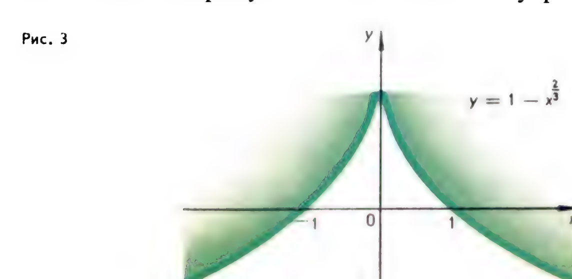


Рис. 3

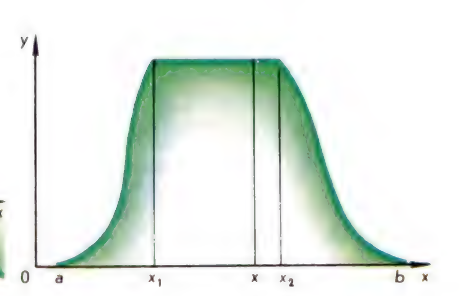


Рис. 4

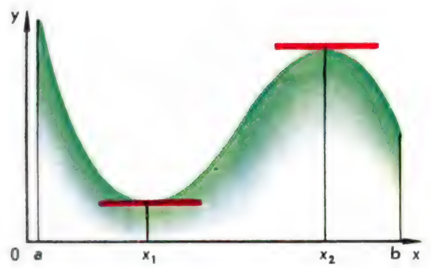


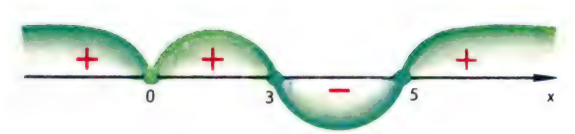
Рис. 5

меняет знак с плюса на минус, т.е. переходит от возрастания к убыванию.

Точка, где производная функции равна нулю, называется стационарной. Если исследуется на экстремум дифференцируемая функция, то следует найти все ее стационарные точки и рассмотреть знаки производной слева и справа от них.

Исследуем на экстремум функцию $y = x^3 (x-5)^2$.

Рис. 7



Найдем ее производную: $y' = 5x^2 (x-5)(x-3)$.

Определяем стационарные точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. Нетрудно заметить, что в ин-

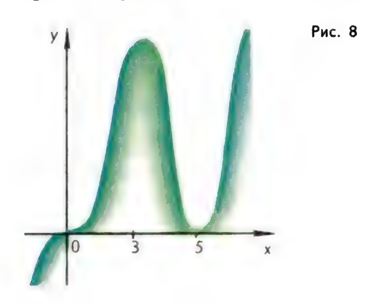


Рис. 8

тервалах между стационарными точками знак производной не изменяется, на каждом из интервалов он отмечен на рис. 7. Используя достаточное условие экстремума, можно сделать заключение: в точке $x_1 = 0$ экстремума нет; точка $x_2 = 3$ – точка максимума; точка $x_3 = 5$ – точка минимума.

Находим значения функции в точках экстремума: $y(3) = 108$, $y(5) = 0$. График функции показан на рис. 8.

Заметим, что возможны случаи, когда экстремум достигается в точке, в которой производная не существует. Таковы точки экстремума у профиля пилы, пример такой функции дан и на рис. 1.

Задачи на максимум и минимум имеют важнейшее значение в физике, механике, различных приложениях математики. Они были

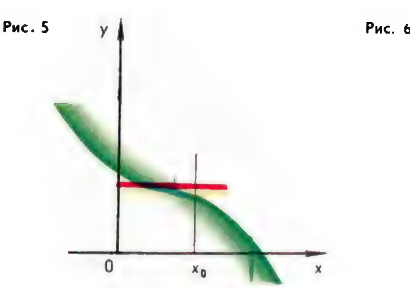


Рис. 6

теми задачами, которые привели математику к созданию *дифференциального исчисления*, а дифференциальное исчисление дало мощный общий метод решения задач на экстремум с помощью производной.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Основными элементарными функциями считаются: *многочлен*, рациональная функция, которая представляет собой отношение двух многочленов, *степенная функция*, *показательная функция*, *логарифмическая функция*, *тригонометрические функции* и *обратные тригонометрические функции*.

К элементарным функциям относятся и те функции, которые получаются из элементарных путем применения (конечного числа раз) основных четырех арифметических действий и образования сложной функции. Приведем несколько примеров элементарных функций:

$$f_1(x) = \sqrt[3]{1 + \frac{x-1}{x^2+1}}, \quad f_2(x) = \cos \lg x,$$

$$f_3(x) = x2^x + \operatorname{arctg} x,$$

$$f_4(x) = \log_3 \frac{x^2-9}{\sin 2x}, \quad f_5 = x^{\sin x} - \sin \operatorname{tg} x.$$

Отметим, что функция $f(x) = |x|$ также является элементарной, поскольку $|x| = \sqrt{x^2}$.

Элементарные функции наиболее изучены и часто используются в приложениях математики.

Хотя понятие *функции* сформировалось лишь в XVII в., однако зависимости между двумя величинами рассматривались и ранее. К XVII в. почти все основные элементарные функции были достаточно хорошо изучены: к этому времени уже были составлены высокой точности таблицы значений тригонометрических функций и появились первые таблицы *логарифмов*. *Дифференциальное исчисление* дало законченное исследование основных элементарных функций, в частности было установлено, что производная от элементарной функции есть также элементарная функция.

Развитие *математического анализа*, решение различных прикладных задач привели к рассмотрению функций, которые не являются элементарными. Например, не выражаются через элементарные функции решения дифференциальных уравнений:

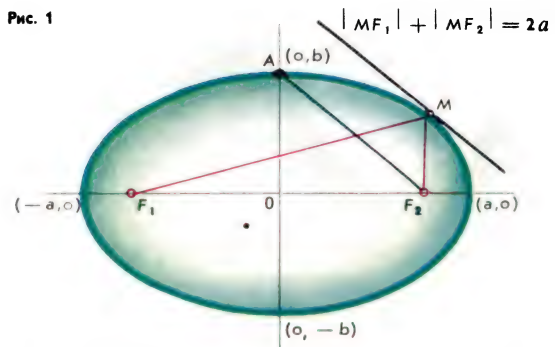
$$y' = e^x/x, \quad y' = e^{x^2}.$$

При изучении неэлементарных функций их, как правило, выражают через элементарные с помощью *пределов*, *интегралов*, бесконечных *рядов* и исследуют методами *математического анализа.*

ЭЛЛИПС

Эллипс – одно из *конических сечений*. Его также можно определить как фигуру, состоящую из всех тех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2 (называемых фокусами эллипса) является постоянной величиной, обычно обозначаемой через $2a$ (рис. 1).

Рис. 1



Из этого определения нетрудно установить, что прямая, проходящая через фокусы эллипса, есть его ось симметрии, как и прямая, являющаяся серединным перпендикуляром отрезка F_1F_2. Точка O пересечения этих прямых служит центром симметрии эллипса, его называют просто центром эллипса. Если взять указанные прямые в качестве осей координат, то уравнение эллипса запишется в виде $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

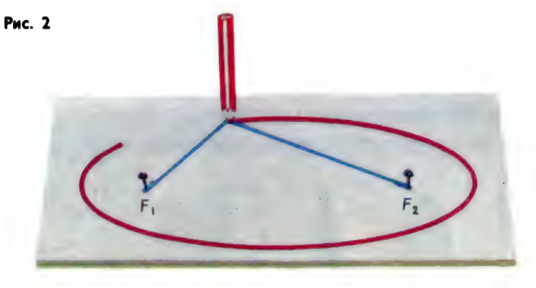
Из уравнения эллипса следует, что ось абсцисс эллипс пересекает в точках (a,O) и $(-a,O)$, а ось ординат – в точках (b,O) и $(-b,O)$. Эти четыре точки называются вершинами эллипса. Отрезок между вершинами на оси абсцисс называется большой осью, а на оси ординат – малой осью. Их отрезки от вершины до центра эллипса называются полуосями.

Зная определение эллипса, можно сделать простейший прибор, вычерчивающий эллипс. Для этого надо связать две булавки ниткой и воткнуть их в чертежную доску (рис. 2), взять карандаш и двигать его по бумаге так, чтобы грифель карандаша все время натягивал нитку. Тогда кончик грифеля будет рисовать на бумаге эллипс.

А как получить эллипс с данными полуосями a и b? Оказывается, не случайно сумма расстояний от фокусов до точки на эллипсе обозначена через $2a$. Эта сумма равна длине большой оси. Укрепленные на доске булавки задали расстояние между фокусами, его обычно обозначают через $2c$, таким образом, c – расстояние от центра эллипса до его фокуса. Если рассмотреть теперь прямоугольный треугольник OAF_2 на рис. 1, то из него видно, что $a^2 = b^2 + c^2$. Таким образом, если известны величины полуосей эллипса, то расстояние от его центра до каждого из фокусов будет катетом прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной большой полуоси, и вторым катетом, равным малой полуоси. Итак, все нужные величины имеются, и можно построить искомый эллипс. Этот способ часто используют садовники при разбивке клумб.

Второй способ построения эллипса основан на том факте, что при сжатии окружности к ее диаметру получается эллипс. Способ построения точек эллипса с полуосями a и b ясен из рис. 3, где внешняя и внутренняя окружности имеют радиусы соответственно a и b.

Рис. 2



Отношение b/a характеризует «сплюснутость» эллипса. Чем меньше это отношение, тем сильнее вытянут эллипс вдоль большой оси. Однако степень вытянутости эллипса принято выражать через другой параметр, общий для всех конических сечений,– эксцентри-

Рис. 3

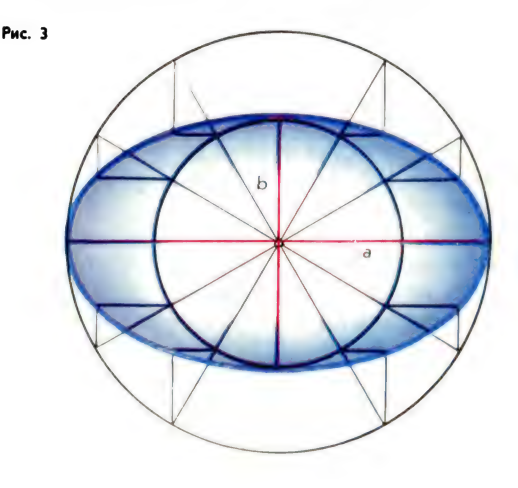
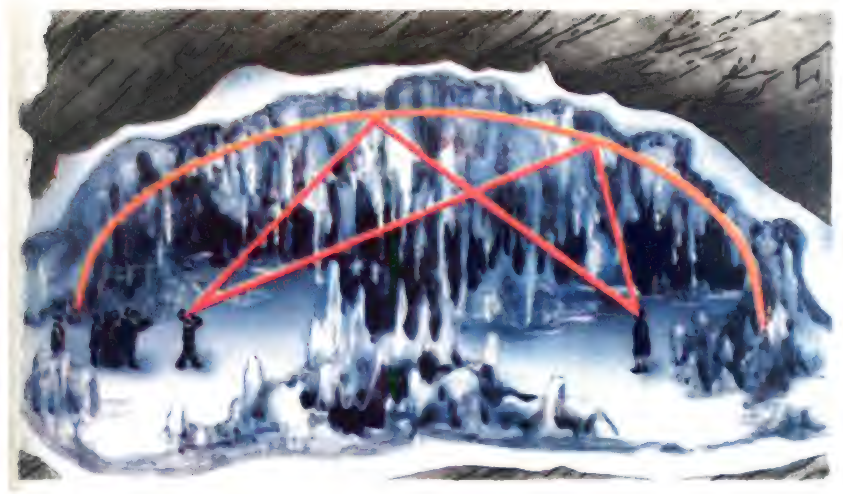



Рис. 4



ситет ε, который в данном случае лучше определить как отношение расстояния от центра до фокуса к длине большой полуоси ($\varepsilon = c/a$). Для разных эллипсов эксцентриситет меняется в пределах от 0 до 1, оставаясь всегда меньше единицы. У планет, которые, как известно, движутся по эллипсам, самый маленький эксцентриситет имеет орбита Венеры (0,0068), следующий по величине эксцентриситет у Нептуна (0,0086), затем у Земли (0,0167). Самый большой эксцентриситет у Плутона (0,253), однако он не идет ни в какое сравнение с эксцентриситетами комет. Так, комета Галлея имеет эксцентриситет 0,967.

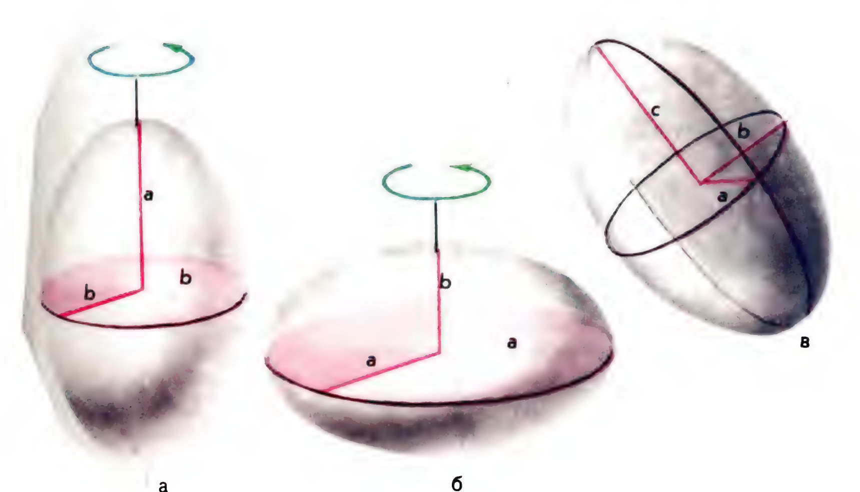
Тот факт, что эллипс является результатом сжатия окружности, объясняет, почему круглые предметы: колеса машин, иллюминаторы кораблей, циферблаты часов и т. д.– мы видим как эллипсы, если смотрим на них под углом.

Одним из самых замечательных свойств эллипса является его оптическое свойство, состоящее в том, что прямые, соединяющие точку эллипса с фокусами, пересекают касательную к эллипсу в этой точке под разными углами. А это значит, что луч, пущенный из одного фокуса, после отражения попадет в другой (рис. 1). Это свойство лежит в основе интересного акустического эффекта, наблюдаемого в некоторых пещерах и искусственных сооружениях, своды которых имеют эллиптическую форму: если находиться в одном из фокусов, то речь человека, стоящего в другом фокусе, слышна так хорошо, как будто он находится рядом, хотя на самом деле расстояние велико (рис. 4).

Рассмотрим поверхность, полученную в результате вращения эллипса вокруг одной из его осей. Такая поверхность называется эллипсоидом вращения. Если вращать эллипс вокруг большой оси, то получится яйцеобразная фигура (рис. 5, *а*). Если вращать его вокруг малой оси, то полученная поверхность – сплюснутая сфера (рис. 5, *б*). Заметим, что Земля имеет такую форму, поскольку расстояние между ее полюсами (12 714 км) меньше, чем расстояние между диаметрально противоположными точками экватора (12 756 км).

Если эллипсоид вращения сжать к одной из плоскостей, проходящих через его ось, то получим поверхность, которая называется трехосным эллипсоидом или просто эллипсоидом (рис. 5, *в*). Уравнение эллипсоида имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Рис. 5



Если какие-нибудь два из чисел *a*, *b* и *c* равны, то соответствующее уравнение описывает эллипсоид вращения, а если равны все три числа – то сферу.

Любое сечение эллипсоида плоскостью является эллипсом.

ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Язык программирования – система обозначений для описания данных (информации) и программ (алгоритмов) их обработки на цифровой вычислительной машине. Программы для первых вычислительных машин составлялись на простейшем из языков программирования – машинном языке. Конечно, простейшим он был не для программистов, которые писали программы, а для машины.

Машины, как правило, работают в двоичной *системе счисления*, и программы на машинном языке записывают при помощи только двух символов: нуля и единицы. Правда, программисты сразу придумали себе облегчение – писали программы не в двоичной, а в восьмеричной системе счисления, а перевод из восьмеричной в двоичную очень прост – каждая восьмеричная цифра заменяется на три двоичные. Например, $(507)_8 = (101\,000\,111)_2$. В машину программа вводилась все равно в двоичном виде и благодаря этому могла непосредственно восприниматься и выполняться аппаратурой машины.

Программа на машинном языке имеет вид таблицы из цифр, каждая ее строчка соответствует одному оператору – машинной команде, которая является приказом машине выполнить определенные действия. При этом в команде, например, первые несколько цифр являются кодом операции, т. е. указывают машине, что надо делать (складывать, умножать и т. п.), а остальные цифры указывают, где именно в памяти машины находятся нужные числа (слагаемые, сомножители и т. п.) и где следует запомнить результат операции (сумму, произведение и т. п.).

Например, команда сложения для ЭВМ БЭСМ-2 выглядит так: 01 0070 0071 0072.

Первые две цифры 01 – это код операции сложения. По такой команде машина складывала число, хранящееся в ячейке памяти с номером 0070, с числом из ячейки с номером 0071. Результат записывался в ячейку с номером 0072. Номера ячеек в команде могут совпадать. Если перед выполнением команды 01 0073 0074 0073 в ячейку 0074 записать число 1, то число в ячейке 0073 увеличится на единицу, а после выполнения команды 01 0075 0075 0075 число в ячейке 0075 увеличится вдвое.

Составление программ на машинном языке – очень тяжелая и кропотливая работа, требующая чрезвычайного внимания и высокой квалификации программиста. Чтобы облегчить и повысить производительность его труда, были разработаны языки программирования, похожие на привычный язык математических формул.

Язык программирования задается тремя компонентами: алфавитом, синтаксисом и семантикой.

Алфавит – это набор различимых символов: букв, цифр, специальных знаков и т. п.

Например, алфавит машинного языка состоит из двух символов: 0 и 1, а если программа записана в восьмеричной системе счисления, то из восьми символов: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7.

Алфавит одного из популярных языков программирования – ФОРТРАНа (ФОРТРАН – сокращение от ФОРмульный ТРАНслятор, т. е. формульный переводчик) содержит такие символы:

двадцать шесть прописных (заглавных) букв латинского алфавита: A, B, C, …, Z;

десять арабских цифр: Ø, 1, 2, …, 9 (цифра 0 обычно перечеркивается, чтобы отличить ее от буквы *O*);

специальные знаки: « » (пробел), «=» (для операции присваивания), «+» (для операции сложения), «−» (для операции вычитания), «*» (для операции умножения), «* *» (для операции возведения в степень) «/» (для операции деления), «(» и «)» (для изменения порядка проведения вычислений, для записи функций и др.), «,» (используется как разделительный знак при перечислениях), «.» (для отделения целой части числа от дробной вместо более привычной десятичной запятой), «'» (апостроф используется при печати текстов), «¤» (служебный знак для обозначения денежной единицы, иногда заменяется на знак доллара «$» или на ромб «◇»).

Синтаксис в языке программирования – это совокупность правил образования конструкций языка из символов, определенных алфавитом. Например, правило образования одной из конструкций языка ФОРТРАН – идентификатора, или просто имени, заключается в следующем: идентификатор – это последовательность от одной до шести букв или цифр, обязательно начинающаяся с буквы.

Примеры идентификаторов:

A	A12345	ALFA
I	1Ø6789Ø	INDEX

Семантикой в языке программирования называют совокупность правил истолкования конструкций языка, образованных в соответствии с синтаксисом.

Например, правила истолкования идентификатора переменной в ФОРТРАНе состоят в следующем:

идентификатор определяет место в памяти машины, выделенное для хранения текущего значения переменной;

первая буква идентификатора указывает, какого вида информация хранится в определяемом месте: если идентификатор начинается с одной из букв I, J, K, L, M или N, то переменная может принимать только целочисленные значения.

Большинство из языков программирования, разработанных к настоящему времени, являются последовательными. Программы, написанные на них, представляют собой последовательность приказов (инструкций, операторов). Эти операторы последовательно один за другим обрабатываются на машине при помощи так называемых трансляторов. Как правило, транслятор – это довольно большая программа на машинном языке, которая заменяет каждый оператор языка программирования соответствующей ему группой машинных команд.

В результате выполнения оператора присваивания языка ФОРТРАН переменная, записанная в левой части оператора (до знака «=»), получит значение, вычисленное по правилу, записанному в правой части (после знака «=»). Например, оператор

X = Y

означает, что переменная X должна принять то же самое значение, что и переменная Y, а оператор

X1 = (– B + SQRT(B**2 – 4.*A*C))/(2.*A)

обеспечивает вычисление одного из решений квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по известной формуле

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Идентификатор SQRT (от английского *square root* – «квадратный корень») указывает машине, что из значения выражения в скобках

(B**2–4.*A*C)

нужно извлечь квадратный корень.

Различают языки программирования низкого и высокого уровня.

Языки низкого уровня существенно зависят от организации и принципов работы конкретной ЭВМ, поэтому они называются машинно-зависимыми, или машинно-ориентированными языками. К ним относятся автокоды, ассемблеры, а также машинные языки. В отличие от машинного, автокоды и ассемблеры допускают использование условных (мнемонических) обозначений, которые с помощью трансляторов переводятся в команды данной ЭВМ.

Языки высокого уровня, или машинно-независимые языки практически никак не связаны с устройством конкретной ЭВМ. Программы, написанные на таких языках, имеют наглядный, близкий к математическому языку вид, дают возможность использовать выражения, символические имена для переменных и функций.

К языкам высокого уровня относятся БЕЙСИК, ФОРТРАН, ПЛ/I, АЛГОЛ, ПАСКАЛЬ, АДА, КОБОЛ, ЛИСП и др.

Существующие языки программирования отличаются между собой допускаемыми типами данных, а также типами операций и средств, управляющих последовательностью применения операций к данным. Данные являются пассивной компонентой – это информация, хранящаяся в памяти машины. Активная компонента – операции – позволяет создавать, уничтожать и преобразовывать данные. Средства управления связывают данные и операции таким образом, что каждая операция применяется к соответствующим данным в соответствующее время.

Дальнейшее развитие *вычислительной техники* неминуемо влечет за собой развитие и совершенствование языков программирования. В дальнейшем производительность вычислительных машин будет повышаться за счет параллельного (одновременного) выполнения операций, а большинство существующих языков программирования рассчитано на последовательное выполнение операций. Поэтому будущее, по-видимому, за такими языками программирования, которые позволят описывать саму решаемую задачу, а не последовательность выполнения операторов. Последовательность же должна генерироваться уже самой машиной в процессе решения задачи.

ЗАДАЧИ

Задача 8. Доля блондинов среди голубоглазых больше, чем их доля среди всего населения. Верно ли, что доля голубоглазых среди блондинов больше, чем их доля среди всего населения?

Задача 9. Из книги выпали страницы. Первая страница имеет номер 387, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Сколько страниц выпало из книги?

Задача 10. Имеется несколько кувшинов, среди которых есть два кувшина разной формы, а также два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы и разного цвета.

СПРАВОЧНЫЙ ОТДЕЛ
Основные формулы элементарной математики

Арифметика и алгебра

Пропорции

В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ числа a и d называются крайними членами, b и c – средними. Основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних, т. е. $ad = bc$.
Производные пропорции:

$$\frac{a \pm b}{a}=\frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Действия со степенями

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n}=a^{m-n},$$

$$\frac{1}{a^n}=\frac{a^0}{a^n}=a^{-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}.$$

Действия с корнями

(корни предполагаются арифметическими, т. е. подкоренное выражение $\geqslant 0$ и, кроме того, сам корень берется со знаком $+$).

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdot c}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}, \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}, \quad a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n},$$

$$(\sqrt[m]{a^n})^p=\sqrt[m]{a^{np}}, \quad \sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Разложение на множители

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (разность квадратов),

$(a^n \pm b^n)=(a \pm b)(a^{n-1} \mp a^{n-2}b \pm \ldots + (\mp 1)^{n-1}b^{n-1})$,

в частности,

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (сумма кубов),

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (разность кубов).

Квадратные уравнения

Уравнение $x^2+px+q=0$ решается по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Уравнение $ax^2+bx+c=0$ решается по формуле

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$ и $x_1x_2=q$.
$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$.
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Прогрессии

a_1 – первый член, a_n – n-й член, d – разность арифметической прогрессии;
u_1 – первый член, u_n – n-й член, q – знаменатель геометрической прогрессии;
S_n – сумма n членов прогрессии, S – сумма бесконечно убывающей прогрессии:

$$a_n=a_1+d(n-1), \quad S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2},$$

$$S_n=\frac{[2a_1+d(n-1)]n}{2};$$

$$u_n=u_1q^{n-1}, \quad S_n=\frac{u_nq-u_1}{q-1}; \quad S_n=\frac{u_1(q^n-1)}{q-1},$$

$$S=\frac{u_1}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Логарифмы
($N>0$, $a>0$ и $a \neq 1$)

Запись $\log_a N = x$ равносильна записи $a^x=N$, поэтому $a^{\log_a N}=N$.
Логарифмирование:
$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0,$

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N, \quad \log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,$$

$$\log_a N^m = m\log_a N, \quad \log_a\sqrt[m]{N}=\frac{1}{m}\log_a N.$$

Обозначения: $\log_{10}N=\lg N$, $\log_e N=\ln N$.

Соотношения: $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$, $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

(число $\log_b a$ в последней формуле называется модулем перехода от системы логарифмов с основанием b к системе с основанием a).

Комбинаторика

$A_m^n=m(m-1)\ldots(m-n+1)$ (размещения);
$P_m=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m=m!$ (перестановки);

$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$ (сочетания).

Бином Ньютона

$$(x+a)^m=x^m+C_m^1x^{m-1}a+\ldots+C_m^kx^{m-k}a^k+\ldots+C_m^{m-1}xa^{m-1}+a^m,$$

в частности,
$(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$ (квадрат суммы);
$(x-a)^2=x^2-2xa+a^2$ (квадрат разности);
$(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$ (куб суммы);
$(x-a)^3=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3$ (куб разности).
Свойства биномиальных коэффициентов C_m^n:
$1+C_m^1+C_m^2+\ldots+C_m^{m-1}+1=2^m$,
$1-C_m^1+C_m^2-\ldots+(\pm 1)^m=0, \quad C_m^n=C_m^{m-n}.$

Геометрия и тригонометрия

Длина окружности C и ее дуги l

$C = 2\pi R$, $l = \dfrac{\pi R a}{180°} = R\alpha$ (a – градусная мера дуги, α – радианная мера, R – радиус).

Площади

Треугольник: $S = \dfrac{ah}{2}$ (a – основание, h – высота); $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (p – полупериметр, a, b и c – стороны); $S = \dfrac{ab\sin C}{2}$ (C – угол, противолежащий стороне c).

Для равностороннего треугольника $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a – сторона треугольника).

Параллелограмм: $S = bh$ (b – основание, h – высота).

Ромб: $S = \dfrac{d_1 d_2}{2}$ (d_1 и d_2 – диагонали).

Трапеция: $S = \dfrac{a+b}{2}h$ (a и b – основания, h – высота).

Правильный многоугольник: $S = \dfrac{Pa}{2}$ (P – периметр, a – апофема).

Круг: $S = \pi R^2$.

Круговой сектор: $S = \dfrac{Rl}{2} = \dfrac{R^2\alpha}{2} = \dfrac{\pi R^2 a}{360°}$ (a – градусная мера дуги сектора, α – радианная мера, l – длина дуги сектора).

Поверхности

Призма: $S_{бок} = Pl$ (P – периметр перпендикулярного сечения, l – боковое ребро).

Правильная пирамида: $S_{бок} = \dfrac{Pa}{2}$ (P – периметр основания, a – апофема).

Правильная усеченная пирамида: $S_{бок} = \dfrac{P_1 + P_2}{2}a$ (P_1 и P_2 – периметры оснований, a – апофема).

Цилиндр: $S_{бок} = 2\pi Rh$ (h – высота).

Конус: $S_{бок} = \pi Rl$ (l – образующая).

Усеченный конус: $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l$.

Шар: $S = 4\pi R^2$.

Объемы

Призма: $V = Sh$ (S – площадь основания, h – высота).

Пирамида: $V = \dfrac{Sh}{3}$.

Усеченная пирамида: $V = \dfrac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

Цилиндр: $V = \pi R^2 h$.

Конус: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$.

Усеченный конус: $V = \dfrac{\pi h}{3}(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$.

Шар: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно

$\alpha = \dfrac{\pi \cdot a°}{180°}$, $a° = \dfrac{\alpha \cdot 180°}{\pi.}$ (α – радианная мера угла, a – градусная).

Основные соотношения между тригонометрическими функциями

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$,

$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$

Формулы приведения

$\sin(\alpha + n\pi) = \pm\sin\alpha$, $\cos(\alpha + n\pi) = \pm\cos\alpha$,

$\operatorname{tg}(\alpha + n\pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\sin\left(\alpha + n\dfrac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$,

$\cos\left(\alpha + n\dfrac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\left(\alpha + n\dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

(в первых трех формулах n может быть любым целым числом, причем верхний знак соответствует значению $n = 2k$, а нижний – значению $n = 2k + 1$; в последних трех формулах n может быть только нечетным числом, причем верхний знак берется при $n = 4k + 1$, а нижний – при $n = 4k - 1$.

Формулы сложения

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$,

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Тригонометрические функции двойного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в суммы и разности

$\sin m\alpha \cos n\alpha = \dfrac{1}{2}[\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha]$,

$\sin m\alpha \sin n\alpha = \dfrac{1}{2}[\cos(m-n)\alpha - \cos(m+n)\alpha]$,

$\cos m\alpha \cos n\alpha = \dfrac{1}{2}[\cos(m+n)\alpha + \cos(m-n)\alpha]$.

Значения тригонометрических функций для значений аргумента $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$

Аргумент		Тригонометрические функции					
В градусном измерении	В радианах	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
0°	0	0	1	0	не существует	1	не существует
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7322$	$\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	1	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$	$\sqrt{2} \approx 1{,}4142$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7322$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}1547$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	не существует	0	не существует	1

Соотношения между элементами прямоугольного треугольника

(a, b – катеты, c – гипотенуза, A, B – острые углы, C – прямой)

$a = c\sin A = c\cos B,\quad b = c\sin B = c\cos A,$

$a = b\operatorname{tg} A = b\operatorname{ctg} B,\quad b = a\operatorname{tg} B = a\operatorname{ctg} A.$

Соотношения между элементами произвольного треугольника

(a, b, c – стороны, A, B, C – противолежащие им углы)

Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}.$

Теорема косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$

Теорема тангенсов: $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{A-B}{2}}.$

Основные формулы математического анализа

Пределы

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}7183,\quad \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c^x-1}{x} = \ln c,\quad c>0,$

$\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1,\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{x} = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x} = \omega,\ -\infty < \omega < +\infty,$

$\lim\limits_{x\to 0+} x^a\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{-a}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^a e^{-x} = 0,$

$a > 0.$

Основные правила дифференцирования

$(f+g)' = f' + g';\quad (f\cdot g)' = f'g + fg';$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2};\quad (f(kx+b))' = kf'(kx+b);$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x).$

Производные

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$		
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
		$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$1/x$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
a^x	$a^x\ln a$		
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

Неопределенные интегралы

(C – произвольная постоянная)

$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1;$

$\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 1,\ a \neq 1,$ в частности

$\int e^x dx = e^x + C;$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

Приставки СИ и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Приставка	Обозначение приставки		Множитель
	международное	русское	
экса	*E*	Э	10^{18}
пета	*P*	П	10^{15}
тера	*T*	Т	10^{12}
гига	*G*	Г	10^{9}
мега	*M*	М	10^{6}
кило	*k*	к	10^{3}
гекто	*h*	г	10^{2}
дека	*da*	да	10^{1}
деци	*d*	д	10^{-1}
санти	*c*	с	10^{-2}
милли	*m*	м	10^{-3}
микро	μ	мк	10^{-6}
нано	*n*	н	10^{-9}
пико	*p*	п	10^{-12}
фемто	*f*	ф	10^{-15}
атто	*a*	а	10^{-18}

Неметрические русские единицы

Наименование		Значение в единицах СИ, кратных и дольных от них
величины	единицы	
Длина	миля (7 верст)	7,4676 км
	верста (500 саженей)	1,0668 км
	сажень (3 аршина; 7 футов; 100 соток)	2,1336 м
	сотка	21,336 мм
	аршин (4 четверти; 16 вершков; 28 дюймов)	711,2 мм
	четверть (4 вершка)	177,8 мм
	вершок	44,45 мм
	фут (12 дюймов)	304,8 мм (точно)
	дюйм (10 линий)	25,4 мм (точно)
	линия (10 точек)	2,54 мм (точно)
	точка	254 мкм (точно)
Площадь	квадратная верста	1,13806 км^2
	десятина	10,9254 м^2
	квадратная сажень	4,55224 м^2
	кубическая сажень	9,7126 м^3
Объем	кубический аршин	0,35973 м^3
	кубический вершок	87,824 см^3
Вместимость	ведро	12,2994 дм^3
	четверть (для сыпучих тел)	209,91 дм^3
	четверик (8 гарнцев; 1/8 четверти)	26,2387 дм^3
	гарнец	3,27984 дм^3
	берковец (10 пудов)	163,805 кг
	пуд (40 фунтов)	16,3805 кг
	фунт (32 лота; 96 золотников)	409,512 г
	лот (3 золотника)	12,7973 г
	золотник (96 долей)	4,26575 г
	доля	44,4349 мг
Сила, вес	берковец (163,805 кгс)	1606,38 Н
	пуд (16,3805 кгс)	160,638 Н
	фунт (0,409 512 кгс)	4,01594 Н
	лот (12,797 гс)	0,125499 Н
	золотник (4,26575 гс)	41,8327 Н
	доля (44,4349 мгс)	0,435758 мН

Тригонометрические функции

α°	α (рад)	sin α	tg α	ctg α	cos α		
0	0	0	0	∞	1	1,571	90
1	0,017	0,017	0,017	57,29	1,000	1,553	89
2	0,035	0,035	0,035	28,64	0,999	1,536	88
3	0,052	0,052	0,052	19,08	0,999	1,518	87
4	0,070	0,070	0,070	14,30	0,998	1,501	86
5	0,087	0,087	0,087	11,43	0,996	1,484	85
6	0,105	0,105	0,105	9,514	0,995	1,466	84
7	0,122	0,122	0,123	8,144	0,993	1,449	83
8	0,140	0,139	0,141	7,115	0,990	1,431	82
9	0,157	0,156	0,158	6,314	0,988	1,414	81
10	0,175	0,174	0,176	5,671	0,985	1,396	80
11	0,192	0,191	0,194	5,145	0,982	1,379	79
12	0,209	0,208	0,213	4,705	0,978	1,361	78
13	0,227	0,225	0,231	4,331	0,974	1,344	77
14	0,244	0,242	0,249	4,011	0,970	1,326	76
15	0,262	0,259	0,268	3,732	0,966	1,309	75
16	0,279	0,276	0,287	3,487	0,961	1,292	74
17	0,297	0,292	0,306	3,271	0,956	1,274	73
18	0,314	0,309	0,325	3,078	0,951	1,257	72
19	0,332	0,326	0,344	2,904	0,946	1,239	71
20	0,349	0,342	0,364	2,747	0,940	1,222	70
21	0,367	0,358	0,384	2,605	0,934	1,204	69
22	0,384	0,375	0,404	2,475	0,927	1,187	68
23	0,401	0,391	0,424	2,356	0,921	1,169	67
24	0,419	0,407	0,445	2,246	0,914	1,152	66
25	0,436	0,423	0,466	2,145	0,906	1,134	65
26	0,454	0,438	0,488	2,050	0,899	1,117	64
27	0,471	0,454	0,510	1,963	0,891	1,100	63
28	0,489	0,469	0,532	1,881	0,883	1,082	62
29	0,506	0,485	0,554	1,804	0,875	1,065	61
30	0,524	0,500	0,577	1,732	0,866	1,047	60
31	0,541	0,515	0,601	1,664	0,857	1,030	59
32	0,559	0,530	0,625	1,600	0,848	1,012	58
33	0,576	0,545	0,649	1,540	0,839	0,995	57
34	0,593	0,559	0,675	1,483	0,829	0,977	56
35	0,611	0,574	0,700	1,428	0,819	0,960	55
36	0,628	0,588	0,727	1,376	0,809	0,942	54
37	0,646	0,602	0,754	1,327	0,799	0,925	53
38	0,663	0,616	0,781	1,280	0,788	0,908	52
39	0,681	0,629	0,810	1,235	0,777	0,890	51
40	0,698	0,643	0,839	1,192	0,766	0,873	50
41	0,716	0,656	0,869	1,150	0,755	0,855	49
42	0,733	0,669	0,900	1,111	0,743	0,838	48
43	0,750	0,682	0,933	1,072	0,731	0,820	47
44	0,768	0,695	0,966	1,036	0,719	0,803	46
45	0,785	0,707	1,000	1,000	0,707	0,785	45
		cos α	ctg α	tg α	sin α	α (рад)	α°

Значения больших чисел

биллион (миллиард)	$10^{6\cdot 2}$	секстиллион	$10^{6\cdot 6}$
триллион	$10^{6\cdot 3}$	септиллион	$10^{6\cdot 7}$
квадраллион	$10^{6\cdot 4}$	октиллион	$10^{6\cdot 8}$
квинтиллион	$10^{6\cdot 5}$	нонниллион	$10^{6\cdot 9}$

ЧТО ЧИТАТЬ

Александров П.С. Введение в теорию групп.– М.: Наука, 1980.–144 с.–(Б-чка «Квант»).

Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию.– М.: Наука, 1977.–368 с.

Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика.– М.: Наука, 1983.–144 с.–(Б-чка «Квант»).

Байиф Ж.К. Логические задачи.– М.: Мир, 1983.–176 с.

Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс.– М.: Наука, 1987.–(Б-чка «Квант»).

Барр Ст. Россыпи головоломок.– М.: Мир, 1978.–416 с.

Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М. Задачи по математике. Алгебра и анализ.– М.: Наука, 1982.–192 с.–(Б-чка «Квант»).

Башмаков М.И. Уравнения и неравенства.– М.: Наука, 1976.–96 с.–(Б-чка физико-математической школы).

Башмакова И.Г. Диофант и диофантовы уравнения.– М.: Наука, 1972.–68 с.

Беран Л. Упорядоченные множества.– М.: Наука, 1981.–64 с.–(Популярные лекции по математике).

Беррондо М. Занимательные задачи.– М.: Мир, 1983.–232 с.

Берман Г.Н. Циклоида.– М.: Наука, 1980.–112 с.

Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика.– М.: Мир, 1975.–360 с.

Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика.– М.: Мир, 1978.–440 с.

Боголюбов А.Н. Математики, механики: Библиографический справочник.– Киев: Наукова думка, 1983.–640 с.

Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц. Разбиения фигур на меньшие части.– М.: Наука, 1971.–88 с.–(Популярные лекции по математике).

Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология.– М.: Наука, 1982.–160 с.

Варга Б., Димень Ю., Лопариц Н. Язык, музыка, математика.– М.: Мир, 1981.–248 с.

Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые.– М.: Наука, 1976.–112 с.–(Б-чка физико-математической школы).

Васильев Н.Б., Егоров А.А. Всесоюзные математические олимпиады.– М.: Наука, 1988.–(Б-чка математического кружка).

Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П. Математические соревнования. Геометрия.– М.: Наука, 1974.–80 с.–(Б-чка физико-математической школы).

Виленкин Н.Я. Комбинаторика.– М.: Наука, 1969.–328 с.

Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах.– М.: Наука, 1969.–160 с.

Владимиров В.С., Маркуш И.И. Владимир Андреевич Стеклов – ученый и организатор науки.– М.: Наука, 1981.–112 с.

Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи.– М.: Наука, 1978.–144 с.–(Популярные лекции по математике).

Воробьев Н.Н. Признаки делимости.– М.: Наука, 1980.–96 с.–(Популярные лекции по математике).

Ворощук А.Н. Основы ЦВМ и программирование.– М.: Наука, 1978.–464 с.

Виноградов И.М. Основы теории чисел.– М.: Наука, 1981.–168 с.

Гарднер М. Математические чудеса и тайны: Математические фокусы и головоломки.– М.: Наука, 1978.–128 с.

Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.– М.: Мир, 1971.–512 с.

Гарднер М. Математические досуги.– М.: Мир, 1972.–496 с.

Гарднер М. Математические новеллы.– М.: Мир, 1974.–456 с.

Гарднер М. Есть идея.– М.: Мир, 1982.–304 с.

Гасс С. Путешествие в страну линейного программирования.– М.: Мир, 1973.–176 с.

Гжегорчик А. Популярная логика: Общедоступный очерк логики предложений.– М.: Наука, 1979.–112 с.

Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат.– М.: Наука, 1973.–88 с.–(Б-чка физико-математической школы).

Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики.– М.: Наука, 1973.–96 с.–(Б-чка физико-математической школы).

Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах.– М.: Наука, 1983.–64 с.–(Популярные лекции по математике).

Гильде В., Альтрихтер З. С микрокалькулятором в руках.– М.: Мир, 1980.–224 с.

Гик Е.Я. Занимательные математические игры.– М.: Знание, 1982.–344 с.–(Народный университет, естественнонаучный фак.).

Гик Е.Я. Шахматы и математика.– М.: Наука, 1983.–176 с.–(Б-чка «Квант»).

Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках.– М.: Наука, 1981.–192 с.–(Б-чка «Квант»).

Гильде В. Зеркальный мир.– М.: Мир, 1982.–120 с.

Гильберт Д., Кон-Фоссен С.С. Наглядная геометрия.– М.: Наука, 1981.–344 с.

Глейзер Г.И. История математики в школе: 7–8 классы.– М.: Просвещение, 1982.

Глейзер Г.И. История математики в школе: 9–10 классы.– М.: Просвещение, 1983.

Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей.– М.: Наука, 1982.–168 с.

Голомб С.В. Полимино.– М.: Мир, 1975.–208 с.

Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты: Очерки по истории математики.– М.: Мир, 1986.

Демьянов В.П. Геометрия и Марсельеза.–2-е изд., перераб. и доп.– М.: Знание, 1986.–(Творцы науки и техники).

Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах.– М.: Наука, 1974.–328 с.

Дьюдени Г.Э. 520 головоломок.– М.: Мир, 1975.–342 с.

Дьюдени Г.Э. Кентерберийские головоломки.– М.: Мир, 1979.–352 с.

Ефимов Н.В. Высшая геометрия.– М.: Наука, 1978.–576 с.

Замечательные ученые: Сб./Под ред. С.П. Капицы.– М.: Наука, 1980.–192 с.–(Б-чка «Квант»).

Занимательно о физике и математике/Сост. С.С. Кротов, А.П. Савин/М.: Наука, 1987. (Б-чка «Квант»).

Заочные математические олимпиады/Сост. Раббот Ж.М., Тоом А.М., Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л.– М.: Наука, 1981.–128 с.

Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч.– М.: Наука, ч. I–1981, ч. II–1982.

Игнатьев Е.И. В царстве смекалки. 5-е изд., испр.– М.: Наука, 1987.

Избранные задачи: Сб.– М.: Мир, 1977.–597 с.–(Задачи и олимпиады).

Кириллов А.А. Пределы.– М.: Наука, 1973.–96 с.–(Б-чка физико-математической школы).

Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: Лекции, читанные в Геттингенском университете: В 2 т.– М.: Наука, 1987.

Коксетер Г.С., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией.– М.: Наука, 1978.–224 с.–(Б-чка математического кружка).

Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия.– М.: Наука, 1988.–(Б-чка «Квант»).

Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей.– М.: Наука, 1982.–160 с.–(Б-чка «Квант»).

Комацу М. Многообразие геометрии.– М.: Знание, 1981.–208 с.

Конягин С.В. и др. Зарубежные математические олимпиады.– М.: Наука 1987. (Б-чка математического кружка).

Коровкин П.П. Неравенства.– М.: Наука, 1974.– 72 с.–(Популярные лекции по математике).

Кочина П.Я., Зенкевич И.Г. С.В. Ковалевская. М.: Просвещение, 1986.

Кристофидес Н. Теория графов: Алгоритмический подход.– М.: Мир, 1978.–432 с.

Кройль Г. Что умеет мой микрокалькулятор?– М.: Мир, 1981.–133 с.

Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 2-х т.– М.: Высшая школа, 1981. Т. 1–687 с.; т. 2–584 с.

Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание.– М.: Наука, 1980.–144 с.

Курош А.Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней.– М.: Наука, 1983.–32 с.–(Популярные лекции по математике).

Кэрол Л. История с узелками.– М.: Мир, 1973.– 408 с.

Кюршак Й., Нейкомм Д., Хайош Д., Шурани Я. Венгерские математические олимпиады.– М.: Мир, 1976.–543 с.–(Задачи и олимпиады).

Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание.– М.: Мир, 1977.–256 с.

Лойд С. Математическая мозаика.– М.: Мир, 1980.–344 с.

Любич Ю.И., Шор Л.А. Кинематический метод в геометрических задачах.– М.: Наука, 1976.–48 с.

Маркушевич А.И. Ряды.– М.: Наука, 1979.–192 с.

Маркушевич А.И. Возвратные последовательности.– М.: Наука, 1975.–48 с.–(Популярные лекции по математике).

Маркушевич А.И. Замечательные кривые.– М.: Наука, 1978.–48 с.–(Популярные лекции по математике).

Маркушевич А.И. Комплексные числа и конформные отображения.– М.: Наука, 1979.–56 с.–(Популярные лекции по математике).

Маркушевич А.И. Площади и логарифмы.– М.: Наука, 1979.–64 с.–(Популярные лекции по математике).

Математический цветник: Сборник статей и задач / Сост. Д.А. Кларнер.– М.: Мир, 1983.–494 с.

Морозова Е.А., Петраков И.С., Скворцов В.А. Международные математические олимпиады.– М.: Просвещение, 1976.–288 с.

Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.– М.: Наука, 1975.–112 с.

Новиков П.С. Элементы математической логики.– М.: Наука, 1973.–400 с.

Оре О. Приглашение в теорию чисел.– М.: Наука, 1980.–128 с.–(Б-чка «Квант»).

Погорелов А.В. Основания геометрии.– М.: Наука, 1979.–152 с.

Понтрягин Л.С. Знакомство с высшей математикой: Анализ бесконечно малых.– М.: Наука, 1980.– 256 с.

Понтрягин Л.С. Знакомство с высшей математикой: Метод координат.– М.: Наука, 1977.–136 с.

Понтрягин Л.С. Математический анализ для школьников.– М.: Наука, 1980.–88 с.

Постников М.М. Теорема Ферма.– М.: Наука, 1978.–128 с.

Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения.– М.: Наука, 1975.–464 с.

Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание.– М.: Наука, 1976.–448 с.

Пухначев Ю.В., Попов Ю.П. Учись применять математику. Вып. I.– М.: Знание, 1977.–144 с.–(Народный университет, естественнонаучный фак.).

Пухначев Ю.В., Попов Ю.П. Математика без формул. Вып. 3.– М.: Знание, 1979.–160 с.

Реньи А. Трилогия о математике.– М.: Мир, 1980.– 376 с.

Савин А.П. и др. Физико-математические олимпиады.– М.: Знание, 1977.–160 с.–(Народный университет, естественнонаучный фак.).

Салтыков А.И., Семашко Г.Л. Программирование для всех.– М.: Наука, 1980.–160 с.

Смаллиан Р.М. Как же называется эта книга?– М.: Мир, 1981.–238 с.

Соболь И.М. Метод Монте-Карло.– М.: Наука, 1978.–64 с.–(Популярные лекции по математике).

Солодовников А.С. Системы линейных неравенств.– М.: Наука, 1977.–112 с.–(Популярные лекции по математике).

Соколов Э.Т. Кентавр, или как математика помогает физике.– Минск: Вышэйшая школа, 1982.– 223 с.

Сойер У. Путь в современную математику.– М.: Мир, 1972.–200 с.

Соминский И.С. Метод математической индукции.– М.: Наука, 1974.–64 с.–(Популярные лекции по математике).

Страшевич С., Бровкин Е. Польские математические олимпиады.– М.: Мир, 1978.–338 с.–(Задачи и олимпиады).

Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики.– М.: Наука, 1984.–284 с.

Стьюарт Я. Концепции современной математики.– Минск: Вышэйшая школа, 1980.–384 с.

Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Рассказы о прикладной математике.– М.: Наука, 1979.–208 с.

Тригг Ч. Задачи с изюминкой.– М.: Мир, 1975.– 302 с.–(Задачи и олимпиады).

Успенский В.А. Машина Поста.– М.: Наука, 1979.– 86 с.–(Популярные лекции по математике).

Успенский В.А. Треугольник Паскаля.– М.: Наука, 1979.–48 с.–(Популярные лекции по математике).

Фомин С.В. Системы счисления.– М.: Наука, 1980.–48 с.–(Популярные лекции по математике).

Фрейденталь Г. Математика в науке и вокруг нас.– М.: Мир, 1977.–261 с.

Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру.– М.: Мир, 1979.–260 с.

Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия.– М.: Наука, 1982.–160 с.–(Б-чка «Квант»).

Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Стереометрия.– М.: Наука, 1984.–160 с.–(Б-чка «Квант»).

Шилов Г.Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы.– М.: Наука, 1980.–24 с.–(Популярные лекции по математике).

Шилов Г.Е. Математический анализ в области рациональных функций.– М.: Наука, 1970.–48 с.–(Популярные лекции по математике).

Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические задачи на максимум и минимум.– М.: Наука, 1970.–336 с.–(Б-чка математического кружка).

Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии.– М.: Наука, 1974.–384 с.–(Б-чка математического кружка).

Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.– М.: Наука, 1976.– 384 с.–(Б-чка математического кружка).

Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп.– М.: Наука, 1981.–160 с.–(Б-чка «Квант»).

Штейнгауз Г. Сто задач.– М.: Наука, 1976.–168 с.

Штейнгауз Г. Задачи и размышления.– М.: Мир, 1974.–400 с.

Хинчин А.Я. Восемь лекций по математическому анализу.– М.: Наука, 1977.–280 с.

Хинчин А.Я. Цепные дроби.– М.: Наука, 1978.– 112 с.

Хинчин А.Я. Три жемчужины теории чисел.– М.: Наука, 1979.–64 с.

Хованский Г.С. Основы номографии.– М.: Наука, 1976.–352 с.

Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма.– М.: Мир, 1980.–488 с.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Б

В

Г

Д

Е

Ж, З

И

К

Э, Я

ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ

Задача 1. Да, может. День рождения Саши приходится на 31 декабря. Разговор происходил 1 января. 30 декабря ему было еще 10 лет, 1 января ему уже 11 лет, 31 декабря этого года ему исполнится 12 лет, а в будущем году 31 декабря ему исполнится 13 лет.

Задача 2. Заметим, что количество бананов нечетно, и при срывании любой пары плодов оно остается нечетным. Поэтому единственный оставшийся плод может быть только бананом.

Задача 3. Комплект состоит из 91 кости домино.

Задача 4. Ключом к решению этой задачи является тот факт, что видимые (угловые) размеры Солнца и Луны одинаковы, что особенно хорошо видно во время солнечных затмений. Поэтому из подобия следует, что радиус Солнца в 387 раз больше радиуса Луны, а объем Солнца в 387^3 58 000 000 раз больше объема Луны.

Задача 5. В первый раз Гена выложил числа 18, 36, 54, 72, 90, а во второй раз – числа 9, 18, 27, 36, 45.

Задача 6. Зашифрована фраза: «Сколько граней у неочиненного карандаша?» Ответ на этот вопрос – 8.

Задача 7. Своим первым ходом вторая девочка должна разбить венчик цветка на две симметричные половины, а затем отрывать лепестки симметрично тому, что делает первая девочка.

Задача 8. Да. Обозначим через x число голубоглазых блондинов среди N человек, через y – количество блондинов среди этих N человек и через z – количество голубоглазых среди рассмотренных N человек. Тогда по условию $x/y > z/N$. Умножая это неравенство на z и деля его на y, получаем, что $x/y > z/N$, т.е. число голубоглазых среди блондинов больше, чем среди всего населения.

Задача 9. Выпало 174 страницы, если страницей считать листок книги. Заметим, что на последней печатной странице номер должен быть четным и большим, чем 387, т.е. 738.

Задача 10. Возьмем два кувшина разной формы. Если они и разного цвета, то условие выполнено. Если одинакового, то возьмем третий кувшин, отличающийся от них цветом. Его форма не совпадает с формой хотя бы одного из первоначально взятых двух кувшинов, а по выбору они различаются и по цвету.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

в., вв.	век, века
г.	год, город
гг.	годы
до н. э.	до нашей эры
др.	другие
кг	килограммы
км	километры
м	метры
мес	месяцы
мин	минуты
млн.	миллионы
млрд.	миллиарды
Н	ньютоны (в справочном отделе
р.	родился (в алфавитном указателе)
рад	радианы
рис.	рисунок
с.	страница
см.	смотри
см	сантиметр
стер	стерадианы
сут	сутки
т	тонна
т. е.	то есть
тыс.	тысяча
ч	час
ЭВМ	электронные вычислительные машины

Основные математические символы и выражения

∞	бесконечность
$>$	больше
$\geqslant$	больше или равно
$\vec{a}$	вектор
$\forall$	всеобщность
$\vee$	дизъюнкция
$\int$	интеграл неопределенный
$\int_a^b$	интеграл определенный с нижним пределом a и верхним пределом b
$]a, b[$	интервал (открытый промежуток)
	композиция
$\cong$	конгруэнтность
$\wedge$	конъюнкция
lg	логарифм десятичный
ln	логарифм натуральный
$\log_a b$	логарифм числа b при основании a
$<$	меньше
$A = \{a, b, c\}$	множество состоит из элементов
$x \in A$	x принадлежит множеству A
$x \notin A$	x не принадлежит множеству A
$A \subset B$	A является подмножеством множества B
$A \cap B$	множества A и B имеют общую часть, пересекаются
$A \cup B$	объединение множеств A и B
$\|x\|$, $\mathrm{mod}\, x$	модуль числа x
$\max f$	наибольшее значение функции f
$\min f$	наименьшее значение функции f
$[AB]$	отрезок
$\|AB\|$	длина отрезка
	отрицание
det	определитель
$\parallel$	параллельно
$\perp$	перпендикулярно
lim	предел
$\approx$	приближенно равно
Δ	приращение
π	произведение
%	проценты
$\varnothing$	пустое множество
$\Rightarrow$	следует
$\to$	стремится к
Σ	сумма
$\exists$	существование
$\equiv$	тождественно
$\triangle$	треугольник
$\angle$	угол
$f(\ )$, $F(\ )$	функция одной или нескольких переменных
$\Leftarrow$	эквивалентно

ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ ЮНОГО МАТЕМАТИКА

Составитель
АНАТОЛИЙ ПАВЛОВИЧ САВИН

Заведующий редакцией словарей и справочников для детей и юношества
ЧУБА А. А.

Ведущий редактор
БАГРОВА Л. А.

Специальные редакторы
БИТЮЦКОВ В. И.
УМАНСКИЙ Г. С.

Контрольный редактор
ИВАНОВ А. Б.

Младший редактор
ОВЧИНКИНА Т. В.

Художественный редактор
ХРАМОВ В. П.

Младший художественный редактор
СОРОКА Т. П.

Технический редактор
ИВАНОВА Т. Г.

Корректоры:
АНТОНОВА В. С.
РЕЙБЕКЕЛЬ В. Н.

Авторы:
АБРАМОВ А. М.
АБРАМОВ В. М.
АФАНАСЬЕВ Н. К.
БАШМАКОВ М. И.
БЕККЕР Б. М.
БЕРЕЗИН В. Н.
БОЛТЯНСКИЙ В. Г.
ВАВИЛОВ В. В.
ВАСИЛЬЕВ Н. Б.
ВИЛЕНКИН Н. Я.
ГИНДИКИН С. Г.
ГИК Е. Я.
ГНЕДЕНКО Б. В.
ДУБРОВСКИЙ В. Н.
ЗЕМЛЯКОВ А. Н.
ЗОРИЧ В. А.
ИВАНИЛОВ Ю. П.
ИВАНОВ А. Б.
ИВЛЕВ Б. М.
КОСТРИКИН А. И.
КАЛИНИН А. Т.
КАНТОРОВИЧ В. Л.
КАРАЦУБА А. А.
КОЛЕСНИКОВА С. И.
КОЛМОГОРОВ А. Н.
МАЛЬЦЕВ А. А.
МАТВИЕВСКАЯ Г. П.
ОЛЕЙНИК О. А.
ПИГОЛКИНА Т. С.
ПОЧУЕВ В. Р.
ПУХНАЧЕВ Ю. В.
САВИН А. П.
СОЛОВЬЕВ С. А.
ФРУМИН И. Д.
ЧЕНЦОВ Н. Н.
ШЕНЬ А.
ШИБАНОВ А. С.

Принципиальный макет художника
ЮЛИКОВА А. М.

Оформление издания художника
КОМАРОВА В. С.

Иллюстрации выполнили:
БЕКМУХАМЕТОВА Р. Г.
БРЕЛЬ О. А.
БУХАРЕВ В. П.
ВАРГИН В. П.
ДОБРОХОТОВА Н. А.
ДОБРОХОТОВА Т. А.
ЕРШОВ В. Г.
КОГАН Е. А.
КОМАРОВ В. С.
КУЛЕМИН А. С.
ЛОБАНОВА И. Г.
СЕМАКОВ А. Б.
СОРОКА Т. П.

НБ № 1469
Сдано в набор и подписано в печать 04.07.88. Формат $70 \times 108^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Гарнитура таймс. Усл.печ.л. 30,80. Уч.изд.л. 39,50. Усл.кр.-отт. 124,07. Тираж 500 000 экз. (1-й завод 1—150000 экз.). Заказ 2219. Цена 3 р. 30 к. Цена 4 р. 60 к. на бумаге мелованной для печати офсетным способом ТУ 810148279. В суперобложке 4 р. 70 к.

Издательство «Педагогика» Академии педагогических наук СССР и Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 107847, Москва, Лефортовский пер., 8. Редакция энциклопедических словарей и справочников для детей и юношества.

Набрано на Можайском полиграфическом комбинате Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 143200, г. Можайск, ул. Мира, 93.

Отпечатано с диапозитивов на ордена Трудового Красного Знамени Калининском полиграфическом комбинате Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Калинин, проспект Ленина, 5.

А Б
В
Г
Д
Е Ж З И
К
Л
М
Н
О
П
Р С
Т
У
Ф
Ц Ч
Э Я

4 р. 60 к.